COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR

ÉDOUARD GOURSAT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

TOME I.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES.
INTÉGRALES DÉFINIES. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

COURS
D'ANALYSE MATHÉMATIQUE.

28219 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

COURS

D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR

ÉDOUARD GOURSAT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

TOME I.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES.
INTÉGRALES DÉFINIES. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

PRÉFACE.

Cet Ouvrage est, à peu de chose près, le résumé de mon Cours de la Faculté des Sciences. J'ai modifié légèrement sur quelques points l'ordre suivi dans l'enseignement, afin de réunir dans un même Volume tout ce qui concerne les fonctions de variables réelles, sauf l'étude des équations différentielles. La notation différentielle ne faisant pas partie du programme de la classe de Mathématiques spéciales, j'ai repris l'exposé de cette notation dès le début, et je suppose simplement le lecteur familiarisé avec le calcul des dérivées.

L'Analyse mathématique étant essentiellement la science du continu, il semble que logiquement tout cours d'Analyse doit commencer par l'étude des nombres irrationnels. Cependant j'ai supposé cette notion acquise. La théorie des incommensurables est exposée dans d'excellents Ouvrages connus de tous, et d'une façon si parfaite que j'ai jugé inutile d'y revenir. Quant aux autres notions fondamentales qui servent de base à l'Analyse, comme celles de limite supérieure, d'intégrale définie, d'intégrale double, etc., je me suis efforcé de les introduire avec toute la rigueur désirable, tout en restant élémentaire, et sans viser à atteindre une généralité superflue dans un livre d'enseignement.

Quelques paragraphes, imprimés en caractères plus fins que le corps de l'Ouvrage, contiennent soit des exemples développés, soit des compléments que le lecteur peut passer sans inconvénient dans une première lecture. Chaque Chapitre est suivi de l'énoncé d'un certain nombre d'exercices. La plupart d'entre eux, qui sont des applications immédiates des méthodes exposées dans le Chapitre, ont été proposés comme sujets d'examens. D'autres, dont l'énoncé est précédé d'un astérisque, sont un peu plus difficiles,

et sont le plus souvent empruntés à des Mémoires originaux auxquels je renvoie.

Deux de mes anciens élèves de l'École Normale, M. Émile Cotton et M. Jean Clairin, ont bien voulu m'aider dans la correction des épreuves ; je leur adresse ici mes affectueux remercîments.

27 janvier 1902.

E. GOURSAT.

COURS
D'ANALYSE MATHÉMATIQUE.

CHAPITRE I.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES.

I. — FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

1. **Limites.** — Lorsque les valeurs successives d'une variable x se rapprochent de plus en plus d'une quantité constante a, de façon que la valeur absolue de la différence $x - a$ finisse par devenir et rester plus petite que tout nombre donné à l'avance, on dit que la variable x a pour limite la constante a. Cette définition nous donne un *criterium* permettant de reconnaître si a est la limite de la variable x; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'étant donné un nombre positif ε, aussi petit qu'on le voudra, il arrive un moment à partir duquel la valeur absolue de $x - a$ reste constamment inférieure à ε, pour toutes les valeurs que la variable x est susceptible d'acquérir.

De nombreux exemples de limites sont fournis par la Géométrie et l'Algèbre. Par exemple, la quantité variable $x = \frac{a^2 - m^2}{a - m}$ a pour limite $2a$ lorsque m tend vers a, car il suffit que la valeur absolue de $m - a$ soit inférieure à ε pour que la valeur absolue de $x - 2a$ soit elle-même plus petite que ε. De même la variable $x = a - \frac{1}{n}$, où n est un nombre entier positif, a pour limite a lorsque ce nombre n augmente indéfiniment, car il suffit que n

soit supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$ pour que $a - x$ soit inférieur à ε. On voit, par ces exemples, que les valeurs successives de la variable x tendant vers sa limite peuvent former une suite continue ou une suite discontinue.

Il est, en général, très difficile de trouver la limite d'une quantité variable. La proposition suivante, que nous admettrons comme évidente, permet, dans bien des cas, d'affirmer l'existence d'une limite :

Toute quantité variable, qui n'est jamais décroissante et qui reste inférieure à une quantité constante L, *tend vers une limite* l, *inférieure ou au plus égale à* L.

De même, *toute quantité variable, qui n'est jamais croissante et qui reste supérieure à une quantité constante* L', *tend vers une limite* l', *supérieure ou au moins égale à* L'.

Par exemple, si une série à termes positifs a ses termes plus petits respectivement que les termes correspondants d'une autre série convergente, à termes positifs, on peut affirmer que la première série est également convergente, car la somme Σ_n des n premiers termes augmente évidemment avec l'indice n et cette somme est toujours plus petite que la somme S de la seconde série.

2. Fonctions. — Lorsque deux quantités variables sont liées de telle façon que la valeur de l'une dépend de la valeur de l'autre, on dit qu'elles sont fonctions l'une de l'autre. L'une d'elles étant considérée comme variant arbitrairement, on l'appelle la *variable indépendante*. Soit x cette variable qui pourra prendre, par exemple, toutes les valeurs comprises entre deux nombres donnés a et $b (a < b)$. Désignons par y une autre variable telle que, à toute valeur de x comprise entre a et b corresponde une valeur bien déterminée de y, ainsi qu'aux valeurs limites a et b; on dit que y est une fonction définie de x dans l'intervalle (a, b), et l'on indique cette dépendance par l'égalité $y = f(x)$. Par exemple, il peut se faire que la valeur de y soit le résultat de certaines opérations arithmétiques effectuées sur la valeur de x; tel est le cas des fonctions les plus simples que l'on étudie dans les éléments, comme les polynomes, les fonctions rationnelles, les radicaux, etc. Une fonction peut aussi être définie graphiquement. Étant donnés,

dans un plan, deux axes de coordonnées Ox, Oy, si l'on joint deux points A et B de ce plan par un arc de courbe ACB de forme arbitraire, tel qu'une parallèle à l'axe Oy ne puisse rencontrer cet arc de courbe en plus d'un point, l'ordonnée d'un point de cette courbe sera une fonction de l'abscisse. Cet arc de courbe ACB peut d'ailleurs se composer de plusieurs portions distinctes appartenant à des courbes différentes, telles que des portions de droite, des arcs de cercle, etc. Bref, on pourrait se donner une loi absolument arbitraire pour déduire la valeur de y de celle de x. Le mot de *fonction*, pris dans son acception la plus large, ne signifie pas autre chose que ceci : à une valeur de x correspond une valeur de y.

3. **Continuité.** — La définition des fonctions auxquelles s'applique le calcul infinitésimal ne comporte pas une aussi grande indétermination. Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle (a, b); prenons une valeur x_0 comprise dans cet intervalle et une valeur voisine $x_0 + h$ comprise dans le même intervalle. Si la différence $f(x_0 + h) - f(x_0)$ tend vers zéro, lorsque la valeur absolue de h tend vers zéro, la fonction $f(x)$ sera dite *continue pour la valeur* x_0. D'après la définition même de la limite, on peut dire encore qu'*une fonction* $f(x)$ *est continue pour* $x = x_0$ *si à tout nombre positif* ε, *aussi petit qu'on le suppose, on peut faire correspondre un autre nombre positif* η *tel que l'on ait*

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

pour toute valeur de h moindre que η *en valeur absolue* (¹). Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) si elle est continue pour toute valeur de x comprise dans cet intervalle et si les différences

$$f(a + h) - f(a), \quad f(b - h) - f(b)$$

tendent vers zéro lorsque la différence h tend vers zéro en restant positive.

On démontre dans tous les Cours d'Algèbre que les polynomes, les fonctions rationnelles, la fonction exponentielle, la fonction

(¹) Le symbole $|a|$ désigne la valeur absolue de a.

logarithmique, les fonctions trigonométriques et les fonctions inverses sont des fonctions continues, sauf pour certaines valeurs particulières de la variable. Il résulte aussi de la définition que la somme ou le produit d'un nombre quelconque de fonctions continues est encore une fonction continue; il en est de même du quotient de deux fonctions continues, sauf pour les valeurs de la variable qui annulent le dénominateur.

Il me paraît superflu d'expliquer ici pour quelles raisons nous sommes conduits à admettre que les fonctions définies physiquement sont continues, au moins en général.

Parmi les propriétés des fonctions continues, nous citerons dès maintenant les deux suivantes, que l'on serait tenté de considérer comme évidentes, mais qui constituent de véritables théorèmes dont on trouvera plus loin une démonstration rigoureuse ([1]).

I. *Soit* $y = f(x)$ *une fonction continue dans l'intervalle* (a, b) *et* N *un nombre compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$; *l'équation* $f(x) = \mathrm{N}$ *a au moins une racine comprise entre* a *et* b.

II. *Il existe au moins une valeur de* x *appartenant à l'intervalle* (a, b) (*y compris* a *et* b) *pour laquelle* y *prend une valeur* M *supérieure ou au moins égale à toute autre valeur de la fonction dans le même intervalle. Il existe de même une valeur de* x *pour laquelle* y *prend une valeur* m *inférieure ou au plus égale à toute autre valeur de la fonction dans le même intervalle.*

Les nombres M et m sont les valeurs maximum et minimum de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). Il est clair que la valeur de x pour laquelle $f(x)$ prend sa valeur maximum M peut se confondre avec l'une des limites a ou b, et il en est de même de la valeur de x qui correspond au minimum. De la combinaison des propositions précédentes on déduit immédiatement que l'équation $f(x) = \mathrm{N}$, où N est un nombre compris entre M et m, admet au moins une racine comprise entre a et b.

4. Exemples de discontinuité. — Les fonctions que nous étu-

([1]) *Voir* Chapitre IV.

dierons sont en général continues, mais elles peuvent cesser de l'être pour certaines valeurs exceptionnelles de la variable. Voici quelques exemples des discontinuités que l'on rencontre le plus fréquemment.

La fonction $y = \frac{1}{x-a}$ est continue pour toute valeur x_0 de x, différente de a. L'opération qu'il faut effectuer pour déduire la valeur de y de la valeur de x n'a plus aucun sens lorsqu'on donne à x la valeur a; mais nous remarquons que lorsque x a une valeur très voisine de a, y est très grand en valeur absolue et positif ou négatif, suivant que x est plus grand ou plus petit que a. Lorsque la différence $x - a$ diminue de plus en plus, la valeur absolue de y augmente indéfiniment, de façon à devenir supérieure à tout nombre donné à l'avance. On exprime ce fait d'une façon abrégée en disant que la fonction $\frac{1}{x-a}$ est infinie pour $x = a$. C'est un genre de discontinuité d'une grande importance en Analyse.

Prenons encore la fonction $y = \sin\frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers zéro, $\frac{1}{x}$ augmente indéfiniment et y ne tend vers aucune limite, tout en restant compris entre -1 et $+1$; l'équation $\sin\frac{1}{x} = A$, où l'on suppose $|A| < 1$, admet toujours une infinité de racines comprises entre 0 et ε, aussi petit que soit ε. Quelle que soit la valeur que l'on convienne de prendre pour y lorsqu'on suppose $x = 0$, la fonction considérée ne peut être continue pour $x = 0$.

Un exemple de discontinuité d'une autre nature nous est fourni par la somme de la série convergente

$$S(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots.$$

Lorsque $x = 0$, tous les termes de la série étant nuls, on a $S(0) = 0$. Si l'on donne à x une valeur différente de zéro, on a une progression géométrique décroissante, dont la raison est $\frac{1}{1+x^2}$; on a donc

$$S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2(1+x^2)}{x^2} = 1 + x^2.$$

Lorsque x tend vers zéro, $S(x)$ a pour limite l'unité, tandis que

l'on a $S(o) = o$. Ainsi, dans ce cas, la fonction tend bien vers une limite lorsque x tend vers zéro, mais cette limite est différente de la valeur que prend cette fonction pour $x = o$.

5. **Dérivées**. — Soit $f(x)$ une fonction continue; les deux termes du rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tendent vers zéro simultanément lorsque, x restant fixe, la valeur absolue de h diminue indéfiniment. Si ce rapport tend vers une limite, on dit que cette limite est la dérivée de la fonction $f(x)$, et on la représente par y' ou $f'(x)$, suivant la notation de Lagrange.

A la notion analytique de la dérivée se rattache une notion géométrique importante. Soit $y = f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b); considérons dans un plan le point de coordonnées (x, y). Lorsque x varie de a à b, ce point décrit un arc de courbe AMB, qui représente graphiquement la marche de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). Soient M et M′ deux points voisins de cet arc de courbe, d'abscisses x et $x+h$. Le coefficient angulaire de la droite MM′ est égal à

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

lorsque h tend vers zéro, le point M′ se rapproche indéfiniment du point M et, si la fonction $f(x)$ admet une dérivée, le coefficient angulaire de la droite MM′ tend vers la limite y'. La droite MM′ tend donc vers une position limite MT, qu'on appelle la *tangente à la courbe;* l'équation de cette tangente est, d'après ce qui précède,

$$Y - y = y'(X - x),$$

X et Y étant les coordonnées courantes.

Plus généralement, considérons une courbe quelconque dans l'espace et soient

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

les expressions des coordonnées d'un point de cette courbe en fonction d'un paramètre variable t. Prenons sur cette courbe deux points M, M′ correspondant aux deux valeurs t et $t+h$ du para-

mètre; les équations de la corde MM' sont

$$\frac{X - f(t)}{f(t+h) - f(t)} = \frac{Y - \varphi(t)}{\varphi(t+h) - \varphi(t)} = \frac{Z - \psi(t)}{\psi(t+h) - \psi(t)}.$$

Si l'on divise tous les dénominateurs de ces rapports par h, et qu'on fasse ensuite tendre h vers zéro, on voit que la corde MM' tend vers une position limite qui est représentée par les équations

$$\frac{X - f(t)}{f'(t)} = \frac{Y - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{Z - \psi(t)}{\psi'(t)};$$

ceci suppose, bien entendu, que les trois fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ admettent une dérivée. La détermination de la tangente à une courbe se ramène donc analytiquement à un calcul de dérivées.

Toute fonction qui admet une dérivée est nécessairement continue, mais la réciproque n'est pas vraie. Il est facile de donner des exemples de fonctions continues n'ayant pas de dérivée pour des valeurs exceptionnelles de la variable. Telle est la fonction $y = x \sin \frac{1}{x}$ pour $x = 0$; lorsque x tend vers zéro, il en est de même de y et la fonction est bien continue, mais le rapport $\frac{y}{x} = \sin \frac{1}{x}$ ne tend vers aucune limite, comme nous l'avons déjà observé.

Soit encore $y = x^{\frac{2}{3}}$; cette fonction est continue pour toute valeur de x et l'on a $y = 0$ pour $x = 0$; mais le rapport $\frac{y}{x} = x^{-\frac{1}{3}}$ croît indéfiniment lorsque x tend vers zéro. Nous dirons pour abréger que la dérivée est infinie pour $x = 0$; la courbe qui représente la marche de la fonction est tangente à l'origine à l'axe des y.

La fonction $y = x \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ est nulle pour $x = 0$, mais le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers deux limites différentes suivant que x tend vers zéro en restant positif, ou en restant négatif. Lorsque x est positif et très petit, $e^{\frac{1}{x}}$ est positif et très grand; le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers l'unité; au contraire, si x est négatif et très petit en valeur absolue, $e^{\frac{1}{x}}$ est très voisin de zéro et le rapport $\frac{y}{x}$ a pour limite zéro. Il

existe donc deux valeurs distinctes pour la dérivée, suivant la façon dont x tend vers zéro; la courbe qui représente la marche de la fonction présente un point *anguleux* à l'origine des coordonnées.

On voit par ces exemples qu'il est facile de former des fonctions continues n'admettant pas de dérivée pour certaines valeurs particulières de la variable. Mais les inventeurs du Calcul infinitésimal et leurs successeurs n'avaient jamais mis en doute qu'une fonction continue n'eût *en général* une dérivée. Il y avait même eu quelques tentatives de démonstration, insuffisantes il est vrai, lorsque M. Weierstrass est venu trancher complètement la question, en donnant des exemples de fonctions continues qui n'admettent de dérivée pour aucune valeur de la variable ([1]). Ces fonctions n'ayant reçu jusqu'ici aucune application, nous ne nous en occuperons pas. Quand nous dirons par la suite qu'une fonction $f(x)$ a une dérivée dans l'intervalle (a, b), il faudra toujours entendre par là, à moins de mention expresse, qu'elle admet une dérivée unique et finie pour chaque valeur de la variable comprise entre a et b.

6. **Dérivées successives.** — La dérivée d'une fonction $f(x)$ est elle-même en général une autre fonction de x, $f'(x)$; si $f'(x)$ admet elle-même une dérivée, on appelle la nouvelle fonction la *dérivée seconde* de $f(x)$ et on la représente par le symbole y'' ou $f''(x)$. On définira de même la dérivée troisième y''' ou $f'''(x)$ comme la dérivée de la dérivée seconde, et ainsi de suite; d'une manière générale, la dérivée $n^{\text{ième}}$ $y^{(n)}$ ou $f^{(n)}(x)$ est la dérivée de la dérivée d'ordre $(n-1)$. Si, en prenant ainsi les dérivées successives, on n'arrive jamais à une fonction qui n'admet pas de dérivée, on peut imaginer cette suite d'opérations prolongée indéfiniment; la suite des dérivées de la fonction $f(x)$ d'où l'on est parti est illimitée. C'est ce qui a lieu pour toutes les fonctions qui présentent jusqu'ici quelque intérêt pratique.

La notation qui précède est celle de Lagrange; on se sert aussi

---

([1]) Note lue à l'Académie des Sciences de Berlin, le 18 juillet 1872. On trouvera d'autres exemples dans le Mémoire de M. Darboux, sur les fonctions discontinues (*Annales de l'École Normale Supérieure*, t. IV; 2e série). Un exemple de M. Weierstrass est indiqué plus loin (Chap. IX).



quelquefois de la notation $D_n y$ ou $D_n f(x)$, due à Cauchy, pour représenter la dérivée d'ordre n. Nous verrons un peu plus loin la notation de Leibniz.

7. Théorème de Rolle. — L'emploi des dérivées dans l'étude des équations repose sur la proposition suivante, connue sous le nom de *théorème de Rolle :*

Soient a et b deux racines de l'équation $f(x) = 0$. Si la fonction $f(x)$ est continue et admet une dérivée dans l'intervalle (a, b), l'équation $f'(x) = 0$ a au moins une racine comprise entre a et b.

En effet, la fonction $f(x)$ est nulle par hypothèse pour $x = a$ et pour $x = b$. Si elle est constamment nulle dans l'intervalle (a, b), il en est de même de sa dérivée et le théorème est évident. Si la fonction $f(x)$ n'est pas constamment nulle, elle prendra soit des valeurs positives, soit des valeurs négatives. Supposons, par exemple, qu'elle prenne des valeurs positives; elle prendra alors une valeur maximum M pour une valeur x_1 de x comprise entre a et b (n° 3; théorème II). Le rapport

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h},$$

où l'on suppose $h > 0$, est nécessairement négatif, à moins d'être nul, et la limite de ce rapport, c'est-à-dire $f'(x_1)$, ne peut être un nombre positif; on a donc $f'(x_1) \leqq 0$. En considérant de même $f'(x_1)$ comme la limite du rapport

$$\frac{f(x_1 - h) - f(x_1)}{-h},$$

où h est positif, on verra de la même façon que l'on doit avoir $f'(x_1) \geqq 0$. La comparaison de ces deux résultats prouve que l'on a nécessairement $f'(x_1) = 0$.

8. Formule des accroissements finis. — On déduit sans peine de ce théorème l'importante formule des accroissements finis :

Soit $f(x)$ une fonction continue ayant une dérivée dans

l'intervalle (a, b); *on a*

$$(1) \qquad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c),$$

c désignant un nombre compris entre a et b.

Pour établir cette formule, considérons la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(a + x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x,$$

qui, d'après les hypothèses faites sur $f(x)$, est continue et admet une dérivée dans l'intervalle $(0, b - a)$. Cette fonction s'annule évidemment pour $x = 0$ et pour $x = b - a$; sa dérivée $\varphi'(x)$ ou

$$f'(a + x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

doit donc s'annuler pour une valeur de x comprise entre 0 et $b - a$. La valeur correspondante de $a + x$ est comprise entre a et b, et l'on a bien l'égalité qu'il s'agissait de démontrer. On peut remarquer que la démonstration ne suppose pas la continuité de la dérivée $f'(x)$.

De cette formule on déduit que, si la dérivée $f'(x)$ est nulle dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ conserve une valeur constante dans cet intervalle; car l'application de la formule à deux valeurs x_1, x_2, appartenant à l'intervalle (a, b), conduit à la relation $f(x_2) = f(x_1)$. Il en résulte que, si deux fonctions admettent la même dérivée, leur différence est constante, et la réciproque est évidente. *Quand on connaît une fonction* $F(x)$ *ayant pour dérivée une fonction donnée* $f(x)$, *on obtient toutes les autres fonctions ayant la même dérivée en ajoutant à* $F(x)$ *une constante arbitraire* [1].

[1] On applique quelquefois ce théorème sans avoir égard à toutes les conditions de l'énoncé. Soient, par exemple, $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues, admettant des dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$, dans un intervalle (a, b). Si, entre ces quatre fonctions, on a la relation $f'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi'(x) = 0$, on en conclut que la dérivée de la fonction $\frac{f}{\varphi}$, ou $\frac{f'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2}$, est nulle et par suite que le rapport $\frac{f}{\varphi}$ est constant dans l'intervalle (a, b). Mais la conclusion n'est absolument légitime que si la fonction $\varphi(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b). Supposons, pour fixer les idées, que $\varphi(x)$ s'annule, ainsi que $\varphi'(x)$, pour une valeur c de x comprise entre a et b. Une fonction $f(x)$ égale à $C_1\varphi(x)$

La formule (1) est susceptible d'une interprétation géométrique simple. Représentons-nous, en effet, l'arc de courbe AMB qui figure la marche de la fonction $y=f(x)$ dans l'intervalle (a, b); $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient angulaire de la corde AB, tandis que $f'(c)$ est le coefficient angulaire de la tangente en un point C d'abscisse c de l'arc AMB. La formule (1) exprime donc qu'*il existe sur l'arc* AMB *un point* C *où la tangente est parallèle à la corde* AB.

Lorsque la dérivée $f'(x)$ est continue, si l'on fait tendre a et b vers une limite commune x_0, suivant une loi quelconque, le nombre c, compris entre a et b, tend aussi vers x_0, et la formule (1) nous montre que le rapport

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

a pour limite $f'(x_0)$. Voici quelle est l'interprétation géométrique : sur la courbe $y=f(x)$, considérons le point M d'abscisse x_0 et les deux points A et B d'abscisses a et b. Le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est égal au coefficient angulaire de la corde AB, tandis que $f'(x_0)$ représente le coefficient angulaire de la tangente au point M. On voit donc que, lorsque les deux points A et B se rapprochent indéfiniment du point M suivant une loi quelconque, la sécante AB a pour limite la tangente au point M.

Il n'en est plus de même, en général, lorsque la dérivée $f'(x)$ n'est pas continue. Par exemple, si l'on prend sur la courbe $y=x^{\frac{2}{3}}$ deux points infiniment voisins de l'origine, de part et d'autre de l'axe Oy, il est évident sur la figure que la direction de la droite qui joint ces deux points reste absolument indéterminée lorsqu'ils se rapprochent l'un et l'autre de l'origine.

9. **Généralisation de la formule.** — On a indiqué diverses généralisations de la formule des accroissements finis. La suivante est due à

---

entre a et c, et à $C_2\varphi(x)$ entre c et b, C_1 et C_2 étant deux constantes différentes, est continue et admet une dérivée dans l'intervalle (a, b), et l'on a bien

$$f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)=0,$$

pour toute valeur de x comprise dans cet intervalle. L'interprétation géométrique est facile.

M. Stieltjes (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XVI, p. 100). Considérons, pour fixer les idées, trois fonctions $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, continues et admettant des dérivées du premier et du second ordre, et soient a, b, c trois valeurs particulières de la variable ($a < b < c$). Définissons le nombre A par l'égalité

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

et considérons la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix};$$

cette fonction est nulle pour $x = b$ et pour $x = c$, donc sa dérivée doit s'annuler pour une valeur ζ comprise entre b et c, ce qui nous donne

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\zeta) & g'(\zeta) & h'(\zeta) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & 2\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on remplace b par x dans cette relation, on a une fonction qui est nulle pour $x = a$ et pour $x = b$. Sa dérivée est donc nulle pour une valeur ξ comprise entre a et b, ce qui nous donne une nouvelle relation

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f'(\zeta) & g'(\zeta) & h'(\zeta) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2\xi \\ 0 & 1 & 2\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin, si l'on remplace ζ par x dans le premier membre de cette égalité, on a encore une fonction de x qui s'annule pour $x = \xi$ et pour $x = \zeta$; sa dérivée est donc nulle pour une valeur η comprise entre ξ et ζ et par conséquent entre a et c. On a donc pour A l'expression suivante

$$A = \frac{1}{1.2} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) \end{vmatrix},$$

ξ étant compris entre a et b, et η entre a et c.

La démonstration ne suppose pas la continuité des dérivées secondes $f''(x)$, $g''(x)$, $h''(x)$; si ces dérivées secondes sont continues, et si les valeurs a, b, c tendent vers une même valeur limite x_0, on a, à la limite,

$$\lim A = \frac{1}{1.2} \begin{vmatrix} f(x_0) & g(x_0) & h(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) & h'(x_0) \\ f''(x_0) & g''(x_0) & h''(x_0) \end{vmatrix}.$$

Il existe des formules analogues pour n fonctions, que l'on établit de la même façon. Si l'on a seulement deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, il suffit de supposer $g(x) = 1$ pour retrouver la formule des accroissements finis proprement dite.

On doit à M. Schwarz une généralisation analogue (*Annali di Matematica*, 2[e] série, t. X).

II. — FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

10. Généralités. — Une quantité variable ω dont la valeur dépend des valeurs de plusieurs autres quantités variables $x, y, z, \ldots, t$, indépendantes les unes des autres, s'appelle une *fonction des variables indépendantes* $x, y, z, \ldots, t$, et l'on indique cette liaison par le symbole $\omega = f(x, y, z, \ldots, t)$. Soit, pour fixer les idées, $\omega = f(x, y)$ une fonction des deux variables indépendantes x et y; si l'on regarde x et y comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans un plan, à tout système de valeurs des variables (x, y) correspond un point M, et inversement. Lorsque à tout point d'une aire A, limitée par un ou plusieurs contours de forme quelconque, correspond une valeur de ω, nous disons que la fonction $f(x, y)$ est définie dans la portion A du plan.

Soient (x_0, y_0) les coordonnées d'un point M_0 pris dans cette portion du plan. On dit que *la fonction $f(x, y)$ est continue pour le système de valeurs x_0, y_0, si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un autre nombre positif η, tel que l'on ait*

$$|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 y_0)| < \varepsilon,$$

à la seule condition que l'on ait $|h| < \eta$, $|k| < \eta$.

On peut interpréter comme il suit la définition de la continuité. Imaginons que l'on construise, dans le plan des xy, un carré de centre M_0, de côté égal à 2η, et ayant ses côtés parallèles aux axes; le point M' de coordonnées $(x_0 + h, y_0 + k)$ est à l'intérieur de ce carré, pourvu que l'on ait $|h| < \eta$, $|k| < \eta$. Dire que la fonction est continue pour $x = x_0$, $y = y_0$, cela revient à dire que l'on peut prendre le côté de ce carré assez petit pour que la différence des valeurs de la fonction au point M_0 et en un autre point quelconque de ce carré soit moindre que ε en valeur absolue. Il

est évident, d'après cela, que l'on pourrait remplacer ce carré par un cercle de centre (x_0, y_0); car, si la condition précédente est satisfaite pour tous les points situés à l'intérieur d'un carré, elle le sera aussi pour tous les points intérieurs au cercle inscrit. Inversement, si la condition est satisfaite pour tous les points intérieurs à un cercle, elle l'est aussi pour tous les points intérieurs à un carré inscrit dans ce cercle. On pourrait donc définir la continuité en disant que l'on peut faire correspondre les nombres ε et η positifs de telle façon que l'inégalité $\sqrt{h^2+k^2} < \eta$ entraîne l'inégalité

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

La continuité se définit de même pour une fonction de 3, 4, ..., n variables indépendantes.

Il est clair que toute fonction continue des deux variables x, y est une fonction continue de chacune des deux variables prise isolément, mais la réciproque n'est pas toujours exacte ([1]).

11. Dérivées partielles. — Si, dans une fonction continue $f(x, y)$, on attribue à l'une des variables, y par exemple, une valeur constante, d'ailleurs quelconque, on a une fonction de la seule variable x, dont on désignera la dérivée, si elle existe, par $f'_x(x, y)$ ou ω'_x; on désignera, de même, par ω'_y ou $f'_y(x, y)$, la dérivée de la fonction $f(x, y)$, où l'on regarde x comme une constante et y comme la variable indépendante; $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ sont les *dérivées partielles* de la fonction $f(x, y)$. Ces dérivées partielles sont elles-mêmes, en général, des fonctions des deux variables x, y; si l'on prend, à leur tour, leurs dérivées partielles, on obtient les dérivées partielles du second ordre de $f(x, y)$. On a ainsi quatre dérivées partielles du second ordre f''_{x^2}, f''_{xy},

---

([1]) Considérons, par exemple, une fonction $f(x, y)$ égale à $\frac{2xy}{x^2+y^2}$, lorsque l'une au moins des valeurs de x ou de y est différente de zéro, et égale à zéro, lorsque $x = y = 0$. Il est évident que cette fonction est une fonction continue de x lorsqu'on suppose y constant, et inversement. Cependant elle n'est pas une fonction continue des deux variables x, y, pour le système de valeurs $x = y = 0$, car si le point (x, y) tend vers l'origine en restant sur la droite $y = x$, la fonction $f(x, y)$ a pour limite 1, et non pas zéro. L'étude des fonctions de cette nature a été faite par M. Baire dans sa Thèse.

f''_{yx}, f''_{y^2}. On définira de même les dérivées partielles du troisième ordre, du quatrième ordre, etc.; d'une manière générale, étant donnée une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes $\omega = f(x, y, z, \ldots, t)$, une dérivée partielle d'ordre n est le résultat de n dérivations successives effectuées sur cette fonction f dans un certain ordre, par rapport à quelques-unes des variables qui y figurent. Nous allons établir que ce résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue ces dérivations.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Soit $\omega = f(x, y)$ une fonction des deux variables x, y; on a $f''_{xy} = f''_{yx}$, pourvu que ces deux dérivées partielles soient continues.

Nous allons, pour cela, mettre sous deux formes différentes l'expression

$$U = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y),$$

où l'on suppose que x, y, Δx, Δy aient des valeurs déterminées. Si l'on pose, en désignant par v une variable auxiliaire,

$$\varphi(v) = f(x + \Delta x, v) - f(x, v),$$

on peut en effet écrire

$$U = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y);$$

l'application du théorème des accroissements finis à la fonction $\varphi(v)$ nous donne

$$U = \Delta y \varphi'_y(y + \theta \Delta y), \qquad \text{où} \qquad 0 < \theta < 1.$$

Remplaçons φ'_y par sa valeur; il vient encore

$$U = \Delta y [f'_y(x + \Delta x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y + \theta \Delta y)].$$

Une nouvelle application de la formule des accroissements finis à la fonction $f'_y(u, y + \theta \Delta y)$, en y regardant maintenant u comme la variable indépendante, nous donne

$$U = \Delta x \Delta y f''_{yx}(x + \theta' \Delta x, y + \theta \Delta y), \qquad 0 < \theta' < 1.$$

D'après la symétrie de l'expression U en x, y, Δx, Δy, on trou-

verait de même, en échangeant le rôle des variables x et y,

$$U = \Delta y\, \Delta x f''_{xy}(x + \theta'_1 \Delta x, y + \theta_1 \Delta y),$$

θ_1 et θ'_1 désignant encore des facteurs positifs inférieurs à un. Égalons ces deux valeurs de U; en divisant par $\Delta x\, \Delta y$, il reste

$$f''_{xy}(x + \theta'_1 \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) = f''_{yx}(x + \theta' \Delta x, y + \theta\, \Delta y);$$

les dérivées f''_{xy} et f''_{yx} étant supposées continues, si l'on fait tendre Δx et Δy vers zéro, les deux membres de l'égalité précédente tendent respectivement vers f''_{xy} et f''_{yx}, et l'on parvient à l'égalité qu'il s'agissait de démontrer.

Il est à remarquer que la démonstration précédente ne suppose rien sur les autres dérivées du second ordre f''_{x^2} et f''_{y^2}; elle s'applique aussi au cas où la fonction $f(x, y)$ dépend d'autres variables indépendantes que x et y, en nombre quelconque, puisque ces variables doivent être traitées comme des constantes dans les dérivations précédentes.

Cela posé, soit $\omega = f(x, y, z, \ldots, t)$ une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes et Ω une dérivée partielle d'ordre n de cette fonction. Toute permutation, dans l'ordre des dérivations qui conduisent à Ω, peut être obtenue par une suite d'échanges entre deux dérivations consécutives et, comme ces opérations ne changent pas le résultat, d'après ce que nous venons de voir, il en sera de même de la permutation considérée. Il suit de là que, pour avoir une notation qui désigne sans ambiguïté une dérivée partielle d'ordre n, il suffira d'indiquer le nombre de dérivations qui sont effectuées par rapport à chacune des variables indépendantes. Ainsi les dérivées partielles d'une fonction de trois variables $\omega = f(x, y, z)$ seront représentées par l'une ou l'autre des deux notations

$$f^{(n)}_{x^p y^q z^r}(x, y, z), \quad D^n_{x^p y^q z^r} f(x, y, z),$$

où $p + q + r = n$. L'une ou l'autre de ces deux notations représente le résultat que l'on obtient en dérivant successivement p fois par rapport à x, q fois par rapport à y, r fois par rapport à z, ces opérations étant effectuées dans un ordre arbitraire. Il y a trois dérivées partielles du premier ordre, f'_x, f'_y, f'_z, six dérivées partielles du second ordre, f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}, f''_{yz}, f''_{xz}, ...

D'une façon générale, une fonction de p variables indépendantes a autant de dérivées partielles d'ordre n qu'il y a de termes distincts dans un polynome homogène d'ordre n à p variables, c'est-à-dire

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots(p-2)(p-1)},$$

comme l'apprend la théorie des combinaisons.

Règles pratiques. — On établit, dans tous les cours d'Algèbre, un certain nombre de règles pratiques pour le calcul des dérivées. Ces règles sont résumées dans le Tableau suivant où on a mis sur la même ligne la fonction et sa dérivée

$$y = x^\alpha, \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1},$$
$$y = a^x, \qquad y' = a^x \log a,$$

le signe log désignant le logarithme népérien,

$$y = \log x, \qquad y' = \frac{1}{x},$$
$$y = \sin x, \qquad y' = \cos x,$$
$$y = \cos x, \qquad y' = -\sin x,$$
$$y = \text{arc} \sin x, \qquad y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}},$$
$$y = \text{arc tang}\, x, \qquad y' = \frac{1}{1+x^2},$$
$$y = uv, \qquad y' = u'v + uv',$$
$$y = \frac{u}{v}, \qquad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$
$$y = f(u), \qquad y'_x = f'(u)u'_x,$$
$$y = f(u, v, w), \qquad y'_x = u'_x f'_u + v'_x f'_v + w'_x f'_w.$$

Les dernières règles donnent la dérivée d'une fonction de fonction et d'une fonction composée. Grâce à l'emploi de ces règles, on peut obtenir les dérivées successives des fonctions que l'on étudie dans les éléments, polynomes, fonctions rationnelles et irrationnelles, exponentielle et logarithme, fonctions circulaires et fonctions inverses, et de celles que l'on obtient par leur combinaison.

12. Plan tangent à une surface. — De même que la dérivée

d'une fonction d'une seule variable donne la tangente à une courbe, les dérivées partielles d'une fonction de deux variables interviennent dans la recherche du plan tangent à une surface. Soit

$$(2) \qquad z = F(x, y)$$

l'équation d'une surface S; nous supposons que la fonction F est continue et admet des dérivées partielles continues en un point (x_0, y_0) du plan des xy, auquel correspond la valeur z_0 pour z et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de la surface S. Considérons une courbe quelconque C située sur la surface et passant au point M_0, et soient

$$(3) \qquad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

les coordonnées d'un point de cette courbe exprimées en fonction d'un paramètre variable t; $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont trois fonctions continues du paramètre t qui se réduisent respectivement à x_0, y_0, z_0 pour une valeur particulière t_0 de t. La tangente à cette courbe au point M_0 est représentée par les équations (n° 5)

$$(4) \qquad \frac{X - x_0}{f'(t_0)} = \frac{Y - y_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{Z - z_0}{\psi'(t_0)}.$$

D'autre part, puisque la courbe C est située sur la surface S, on a la relation

$$\psi(t) = F[f(t), \varphi(t)]$$

qui doit être vérifiée, quel que soit t. Les deux membres doivent donc être identiques; prenons la dérivée du second membre d'après la règle qui donne la dérivée d'une fonction composée, et faisons $t = t_0$. Il vient

$$(5) \qquad \psi'(t_0) = f'(t_0) F'_{x_0} + \varphi'(t_0) F'_{y_0}.$$

Entre les équations (4) et (5) on peut éliminer $f'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, et le résultat de l'élimination est

$$(6) \qquad Z - z_0 = (X - x_0) F'_{x_0} + (Y - y_0) F'_{y_0};$$

cette équation représente un plan, qui est le lieu des tangentes à toutes les courbes situées sur la surface et passant au point M_0. On l'appelle le *plan tangent à la surface*.

13. Passage des différences aux dérivées. — On a défini les dérivées

de proche en proche, les dérivées d'ordre n se déduisant des dérivées d'ordre $n-1$, et ainsi de suite. Il est naturel de se demander si l'on ne pourrait pas définir directement une dérivée partielle d'ordre n comme limite d'un quotient, sans passer par l'intermédiaire des dérivées d'ordre inférieur à n. Nous avons fait quelque chose de ce genre pour f''_{xy} (*voir* n° 11), car la démonstration donnée plus haut prouve que f''_{xy} est la limite du rapport

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)-f(x, y+\Delta y)+f(x, y)}{\Delta x\, \Delta y},$$

lorsque Δx et Δy tendent tous les deux vers zéro. On démontre de la même façon que f''_{x^2} est la limite du rapport

$$\frac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)-f(x+h_2)+f(x)}{h_1 h_2},$$

lorsque h_1 et h_2 tendent l'un et l'autre vers zéro

Si l'on pose, en effet,

$$f_1(x)=f(x+h_1)-f(x),$$

ce rapport peut s'écrire

$$\frac{f_1(x+h_2)-f_1(x)}{h_1 h_2}=\frac{f'_1(x+\theta h_2)}{h_1}, \qquad 0<\theta<1$$

ou encore

$$\frac{f'(x+h_1+\theta h_2)-f'(x+\theta h_2)}{h_1}=f''(x+\theta' h_1+\theta h_2), \qquad 0<\theta'<1.$$

La limite de ce rapport est donc la dérivée seconde f''_{x^2}, pourvu que cette dérivée soit continue.

Passons maintenant au cas général. Soit, pour fixer les idées,

$$\omega=f(x, y, z)$$

une fonction de trois variables indépendantes. Nous poserons

$$\begin{aligned}
\Delta_x^h \omega &= f(x+h, y, z)-f(x, y, z),\\
\Delta_y^k \omega &= f(x, y+k, z)-f(x, y, z),\\
\Delta_z^l \omega &= f(x, y, z+l)-f(x, y, z);
\end{aligned}$$

$\Delta_x^h \omega$, $\Delta_y^k \omega$, $\Delta_z^l \omega$ sont les *différences premières* de ω. Si l'on considère h, k, l comme des constantes données, ces trois différences premières sont elles-mêmes des fonctions de x, y, z, dont on peut prendre les différences relatives à des accroissements h_1, k_1, l_1 des variables, et l'on a ainsi les *différences secondes* $\Delta_x^{h_1}\Delta_x^h \omega$, $\Delta_x^{h_1}\Delta_y^k \omega$, ... Le procédé peut se continuer indéfiniment; une différence d'ordre n se définira comme une différence première d'une différence d'ordre $n-1$. Comme on peut intervertir l'ordre

de deux quelconques des opérations précédentes, il suffira d'indiquer les accroissements successifs attribués à chaque variable. Une différence d'ordre n sera représentée par un symbole tel que le suivant

$$\Delta^{(n)}\omega = \Delta_x^{h_1}\Delta_x^{h_2}\ldots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\ldots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\ldots\Delta_z^{l_r}f(x, y, z) \quad \text{où} \quad p+q+r=n,$$

les accroissements h_i, k_i, l_i pouvant être égaux ou inégaux. Cette différence peut s'exprimer au moyen d'une dérivée partielle d'ordre n; elle est égale au produit

$$h_1 h_2 \ldots h_p k_1 \ldots k_q l_1 \ldots l_r \\ \times f_{x^p y^q z^r}^{(n)}(x+\theta_1 h_1+\ldots+\theta_p h_p, y+\theta'_1 k_1+\ldots+\theta'_q k_q, z+\theta''_1 l_1+\ldots+\theta''_r l_r),$$

tous les θ_i étant compris entre 0 et 1. La formule a déjà été établie pour les différences premières et secondes. Pour démontrer qu'elle est générale, admettons qu'elle est exacte pour une différence d'ordre $n-1$, et soit

$$\varphi(x, y, z) = \Delta_x^{h_2}\ldots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\ldots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\ldots\Delta_z^{l_r}f;$$

on aura, par hypothèse,

$$\varphi(x, y, z) = h_2\ldots h_p k_1\ldots k_q l_1\ldots l_r f_{x^{p-1}y^q z^r}^{(n-1)}(x+\theta_2 h_2+\ldots+\theta_p h_p, y+\ldots).$$

Mais la différence $n^{\text{ième}}$ considérée est égale à

$$\varphi(x+h_1, y, z) - \varphi(x, y, z),$$

et il suffit d'appliquer de nouveau la formule des accroissements finis à cette différence pour parvenir à la formule que l'on voulait démontrer.

Inversement, la dérivée partielle $f_{x^p y^q z^r}^{(n)}$ est la limite du rapport

$$\frac{\Delta_x^{h_1}\Delta_x^{h_2}\ldots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\ldots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\ldots\Delta_z^{l_r}f}{h_1 h_2\ldots h_p k_1 k_2\ldots k_q l_1\ldots l_r},$$

lorsque tous les accroissements h, k, l tendent vers zéro.

Il est intéressant de remarquer que cette définition des dérivées partielles d'ordre supérieur est quelquefois plus étendue que la définition ordinaire. Considérons, par exemple, la fonction

$$\omega = f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

où les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ n'admettent pas de dérivée. La fonction ω n'admet pas non plus de dérivées partielles du premier ordre; il n'y a donc pas lieu *a fortiori* de parler des dérivées partielles du second ordre. Cependant, si l'on adoptait la nouvelle définition, on serait conduit, pour trouver f''_{xy}, à chercher la limite du rapport

$$\frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)}{hk}$$

qui est égal à

$$\frac{\varphi(x+h)+\psi(y+k)-\varphi(x+h)-\psi(y)-\varphi(x)-\psi(y+k)+\varphi(x)+\psi(y)}{hk}.$$

Le numérateur de ce rapport est toujours nul; il a donc zéro pour limite, et nous sommes conduits à écrire $f''_{xy} = 0$ (¹).

III. — NOTATION DIFFÉRENTIELLE.

La notation différentielle, la plus ancienne des notations employées, est due à Leibniz. Quoiqu'elle ne soit pas indispensable, elle offre des avantages de symétrie dans les formules et de généralité qui sont très appréciables, surtout dans l'étude des fonctions de plusieurs variables. L'origine de cette notation se trouve dans la considération des infiniment petits.

14. Différentielles. — On appelle *quantité infiniment petite,* ou simplement *infiniment petit,* toute quantité *variable* qui tend vers zéro. La condition que la quantité soit variable est essentielle; une quantité constante, aussi petite qu'on la suppose, n'est pas un infiniment petit.

Habituellement on considère plusieurs quantités qui sont infiniment petites en même temps, et l'on choisit l'une d'elles comme terme de comparaison; c'est l'*infiniment petit principal.* Soit α cet infiniment petit principal, et β un autre infiniment petit; on dit que β est infiniment petit par rapport à α, si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers zéro. Au contraire, on dit que β est un infiniment petit

---

(¹) On peut faire des remarques analogues pour les fonctions d'une seule variable. Par exemple, la fonction $f(x) = x^3 \cos\frac{1}{x}$ a pour dérivée

$$f'(x) = 3x^2 \cos\frac{1}{x} + x \sin\frac{1}{x},$$

et $f'(x)$ n'admet pas de dérivée pour $x = 0$. Cependant le rapport

$$\frac{f(2\alpha) - 2f(\alpha) + f(0)}{\alpha^2}$$

ou $8\alpha \cos\frac{1}{2\alpha} - 2\alpha \cos\frac{1}{\alpha}$ a pour limite zéro lorsque α tend vers zéro.

du premier ordre si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers une limite K différente de zéro. S'il en est ainsi, on a

$$\frac{\beta}{\alpha} = K + \varepsilon,$$

ε étant un autre infiniment petit; on en tire

$$\beta = \alpha(K + \varepsilon) = K\alpha + \alpha\varepsilon,$$

et $K\alpha$ s'appelle la *partie principale* de β. Le terme complémentaire $\alpha\varepsilon$ est infiniment petit par rapport à la partie principale. D'une manière générale, si l'on peut trouver une puissance positive de α, telle que α^n, de façon que le rapport $\frac{\beta}{\alpha^n}$ tende vers une limite finie K différente de zéro, β est un infiniment petit d'ordre n. On a alors

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = K + \varepsilon,$$

ou

$$\beta = \alpha^n(K + \varepsilon) = K\alpha^n + \alpha^n\varepsilon;$$

$K\alpha^n$ s'appelle encore la *partie principale*.

Cela posé, soit $y = f(x)$ une fonction continue admettant une dérivée $f'(x)$; attribuons à x un accroissement Δx, et désignons par Δy l'accroissement correspondant de y. D'après la définition même de la dérivée, on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro en même temps que Δx; si l'on considère Δx comme l'infiniment petit principal, Δy est lui-même un infiniment petit dont la partie principale est $f'(x)\Delta x$. C'est cette partie principale qu'on appelle la *différentielle* de y et qu'on représente par dy

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Lorsque la fonction $f(x)$ se réduit à x, la formule précédente se réduit à $dx = \Delta x$, et l'on écrit pour plus de symétrie

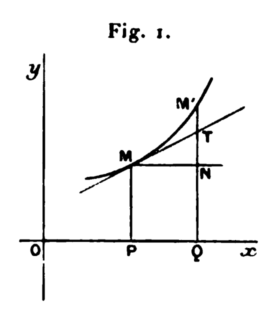
$$dy = f'(x)\,dx,$$

mais en convenant de considérer l'accroissement dx de la variable

indépendante comme une quantité constante, d'ailleurs quelconque.

Considérons sur la courbe C, représentée par l'équation $y = f(x)$,

Fig. 1.



les deux points M et M' d'abscisses x et $x + dx$. Dans le triangle MTN on a

$$NT = MN \operatorname{tang} \widehat{TMN} = dx f'(x);$$

NT représente donc la différentielle dy, tandis que Δy est égale à NM'. Il est visible sur la figure que la partie M'T est infiniment petite par rapport à NT, lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M.

Les différentielles successives se définissent de proche en proche comme les dérivées successives. Ainsi l'on appelle *différentielle du second ordre* la différentielle de la différentielle du premier ordre, dx étant toujours considéré comme une constante, et on la représente par d^2y

$$d^2y = d(dy) = [f'(x)\,dx]\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

On a de même pour la différentielle troisième

$$d^3y = d(d^2y) = [f'''(x)\,dx^2]\,dx = f'''(x)\,dx^3,$$

et ainsi de suite. D'une manière générale, la différentielle d'ordre n, qui se définit comme la différentielle de la différentielle d'ordre $n-1$, a pour expression

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ... peuvent inversement s'exprimer au moyen des différentielles, et l'on a une nouvelle

notation pour représenter les dérivées

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}, \quad \ldots.$$

A chaque règle pour calculer une dérivée correspond une règle pour calculer une différentielle. On a, par exemple,

$$dx^m = mx^{m-1}dx, \qquad da^x = a^x \log a\, dx,$$
$$d\log x = \frac{dx}{x}, \qquad d\sin x = \cos x\, dx, \qquad \ldots,$$
$$d\arcsin x = \frac{dx}{\pm\sqrt{1-x^2}}, \qquad d\,\mathrm{arc\,tang}\, x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Arrêtons-nous un moment sur le cas d'une fonction de fonction. Soit $y = f(u)$, u étant une fonction de la variable indépendante x; on a

$$y'_x = f'(u)u'_x,$$

et, en multipliant les deux membres par dx, il vient

$$y'_x dx = f'(u) \times u'_x dx,$$

c'est-à-dire

$$dy = f'(u)\,du.$$

La formule qui donne dy est donc la même que si u était la variable indépendante. C'est là un des avantages de la notation différentielle. Avec la notation des dérivées, on a deux formules différentes

$$y'_x = f'(x), \qquad y'_x = f'(u)u'_x,$$

pour représenter la dérivée de y par rapport à x, suivant que y est donné directement en fonction de x, ou que y dépend de x par l'intermédiaire d'une autre fonction u. Avec la notation différentielle, la même formule s'applique aux deux cas.

Si $y = f(u, v, w)$ est une fonction composée, on a

$$y'_x = u'_x f'_u + v'_x f'_v + w'_x f'_w$$

et, en multipliant par dx, il vient

$$y'_x dx = u'_x dx f'_u + v'_x dx f'_v + w'_x dx f'_w,$$

c'est-à-dire

$$dy = f'_u du + f'_v dv + f'_w dw.$$

Ainsi

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Les mêmes règles permettront de calculer les différentielles successives. Soit, par exemple, à calculer les différentielles successives d'une fonction de fonction $y = f(u)$; on a déjà trouvé

$$dy = f'(u)\,du.$$

Pour calculer d^2y, il faut remarquer que du ne doit pas être traité comme constant, puisque u n'est pas la variable indépendante. On a donc à calculer la différentielle d'une fonction composée $f'(u)\,du$, où u et du sont deux fonctions intermédiaires, ce qui donne

$$d^2y = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u.$$

Pour calculer d^3y, il faudra considérer d^2y comme une fonction composée avec trois fonctions intermédiaires u, du, d^2u; on trouve de cette façon

$$d^3y = f'''(u)\,du^3 + 3f''(u)\,du\,d^2u + f'(u)\,d^3u,$$

et ainsi de suite. Il est à remarquer qu'à cause des termes en d^2u, d^3u, ... les formules qui donnent les différentielles d^2y, d^3y, ... ne sont plus les mêmes que si u était la variable indépendante.

Les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables se représentent par une notation analogue. Ainsi la dérivée partielle d'ordre n de $f(x, y, z)$ qui est représentée, dans la notation de Lagrange, par $f^{(n)}_{x^p y^q z^r}$ est représentée, dans la notation de Leibniz, par

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r};$$

cette notation est purement symbolique et ne représente nullement un quotient, comme dans le cas d'une fonction d'une seule variable indépendante.

15. Différentielles totales. — Soit $\omega = f(x, y, z)$ une fonction de trois variables indépendantes x, y, z; on appelle *différentielle totale* $d\omega$ l'expression suivante

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz,$$

où dx, dy, dz sont trois accroissements constants, d'ailleurs arbitraires, attribués aux variables indépendantes x, y, z. Les



trois produits $\frac{\partial f}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f}{\partial y}dy$, $\frac{\partial f}{\partial z}dz$ sont les différentielles partielles.

La différentielle totale du second ordre $d^2\omega$ est la différentielle totale de la différentielle totale du premier ordre, les accroissements dx, dy, dz restant constants et toujours les mêmes quand on passe d'une différentielle à la suivante. On a donc

$$d^2\omega = d(d\omega) = \frac{\partial\, d\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\, d\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\, d\omega}{\partial z}dz,$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} d^2\omega &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dz\right)dx \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dz\right)dy \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right)dz \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dy\,dz. \end{aligned}$$

Si l'on remplace, dans le second membre, $\partial^2 f$ par ∂f^2, on a le développement du carré de $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$; on peut donc écrire l'égalité symbolique

$$d^2\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(2)},$$

où l'on doit convenir que ∂f^2 doit être remplacé par $\partial^2 f$ après le développement du carré. Cette loi est générale; si nous convenons d'appeler *différentielle totale d'ordre n* la différentielle totale de la différentielle totale d'ordre $n-1$, on a, quel que soit n, l'égalité symbolique

$$d^n\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)},$$

∂f^n devant être remplacé par $\partial^n f$ après le développement. Cette loi étant vérifiée pour $n=1$, $n=2$, il nous suffira de montrer que, si elle est vraie pour $d^n\omega$, elle est encore vraie pour $d^{n+1}\omega$.

La loi étant admise pour $d^n \omega$, on a, en développant,

$$d^n \omega = \Sigma A_{pqr} \frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} dx^p dy^q dz^r,$$

où $p+q+r=n$, le coefficient A_{pqr} étant le même que le coefficient de $dx^p dy^q dz^r$ dans la puissance $n^{\text{ième}}$ du trinome

$$(dx + dy + dz)^n,$$

c'est-à-dire

$$A_{pqr} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r}.$$

On déduit de la formule précédente

$$d^{n+1}\omega = \Sigma A_{pqr} \left[\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{p+1} \partial y^q \partial z^r} dx^{p+1} dy^q dz^r + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^p \partial y^{q+1} \partial z^r} dx^p dy^{q+1} dz^r + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^{r+1}} dx^p dy^q dz^{r+1} \right];$$

si l'on remplace maintenant $\partial^{n+1} f$ par ∂f^{n+1}, le second membre peut s'écrire symboliquement

$$\Sigma A_{pqr} \frac{\partial f^n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} dx^p dy^q dz^r \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right),$$

ou encore

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right)^n \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right).$$

On a donc bien, avec les mêmes conventions,

$$d^{n+1}\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right)^{(n+1)}.$$

Remarque. — Supposons que, par un moyen quelconque, on ait obtenu l'expression de la différentielle totale $d\omega$

$$(7) \qquad d\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

P, Q, R étant des fonctions de x, y, z. Comme on a par définition

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz,$$

on en déduit la relation

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - P \right) dx + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - Q \right) dy + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} - R \right) dz = 0;$$

or dx, dy, dz sont, par convention, des constantes quelconques. Il faudra donc que l'on ait séparément

$$(8) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = R;$$

l'équation (7) est équivalente aux trois relations distinctes (8) et nous fait connaître à la fois les trois dérivées partielles du premier ordre.

Plus généralement, si l'on a obtenu, par un moyen quelconque, la différentielle totale d'ordre n

$$d^n \omega = \Sigma C_{pqr} dx^p dy^q dz^r,$$

les coefficients C_{pqr} sont égaux, à des facteurs numériques près, aux dérivées partielles d'ordre n de ω. On a ainsi à la fois toutes les dérivées partielles du même ordre; nous verrons un peu plus loin une application de cette remarque.

16. Différentielles successives d'une fonction composée. — Soit $\omega = F(u, v, w)$ une fonction composée, u, v, w étant des fonctions des variables indépendantes x, y, z, t; écrivons les expressions des dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

En multipliant ces quatre équations par dx, dy, dz, dt respectivement et les ajoutant, on a au premier membre

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \omega}{\partial t} dt,$$

c'est-à-dire $d\omega$, tandis que les coefficients de $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial F}{\partial w}$ sont égaux respectivement à du, dv, dw. Il vient donc

$$(9) \qquad d\omega = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial w} dw,$$

de sorte que *l'expression de la différentielle totale du premier ordre d'une fonction composée est la même que si les fonctions intermédiaires étaient des variables indépendantes.* Nous voyons se manifester ici un des principaux avantages de la notation différentielle; la relation (9) ne dépend ni du nombre, ni du choix des variables indépendantes, et elle équivaut à autant de relations distinctes qu'il y a de variables indépendantes.

Pour calculer $d^2\omega$, nous appliquerons la règle qui vient d'être établie à $d\omega$, en observant que dans le second membre de la formule (9), il entre six fonctions intermédiaires u, v, w, du, dv, dw. On a donc

$$\begin{aligned} d^2\omega = {} & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial w} du\, dw + \frac{\partial F}{\partial u} d^2 u \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial w} dv\, dw + \frac{\partial F}{\partial v} d^2 v \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial w} du\, dw + \frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial w} dv\, dw + \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} dw^2 + \frac{\partial F}{\partial w} d^2 w, \end{aligned}$$

ou, en réduisant et employant la même notation symbolique que plus haut,

$$d^2\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial w} dw\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial F}{\partial v} d^2 v + \frac{\partial F}{\partial w} d^2 w.$$

La formule est plus compliquée que dans le cas où u, v, w sont les variables indépendantes, à cause des termes en $d^2 u$, $d^2 v$, $d^2 w$, qui disparaissent lorsque u, v, w sont les variables indépendantes. Pour avoir $d^3\omega$, on appliquera de nouveau la même règle à $d^2\omega$, en observant que $d^2\omega$ dépend de neuf fonctions intermédiaires u, v, w, du, dv, dw, $d^2 u$, $d^2 v$, $d^2 w$, et ainsi de suite. L'expression générale de ces différentielles devient de plus en plus compliquée; $d^n\omega$ est une fonction entière de du, dv, dw, $d^2 u$, ..., $d^n u$, $d^n v$, $d^n w$, et les termes qui contiennent $d^n u$, $d^n v$, $d^n w$ sont égaux à

$$\frac{\partial F}{\partial u} d^n u + \frac{\partial F}{\partial v} d^n v + \frac{\partial F}{\partial w} d^n w.$$

Si dans $d^n\omega$ on remplace u, v, w, du, dv, dw, ... par leurs expressions au moyen des variables indépendantes, $d^n\omega$ devient un polynome entier en dx, dy, dz, ... dont les coefficients sont égaux (*voir* la remarque du n° 15) aux dérivées partielles d'ordre n

de ω, multipliées par certains facteurs numériques. On a ainsi du même coup toutes les dérivées partielles d'ordre n.

Supposons, par exemple, qu'on veuille calculer les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction composée $\omega = f(u)$, où u est une fonction de deux variables indépendantes, $u = \varphi(x, y)$. Si l'on calcule ces dérivées séparément, on a d'abord les deux dérivées partielles du premier ordre

$$(10) \qquad \frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y},$$

et, en prenant les dérivées de ces deux équations par rapport à x et par rapport à y, on a trois relations distinctes seulement qui donnent les dérivées du second ordre

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \end{aligned}\right.$$

la seconde des relations (11) s'obtient en différentiant par rapport à y la première des équations (10), ou la seconde par rapport à x. Avec les différentielles totales, ces cinq relations (10) et (11) peuvent être remplacées par deux seulement

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial\omega}{\partial u}\,du, \\ d^2\omega &= \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\,du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial u}\,d^2 u; \end{aligned}\right.$$

si l'on remplace dans ces deux formules du par $\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$, $d^2 u$ par $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2$, les coefficients de dx et dy dans la première donneront les dérivées partielles du premier ordre de ω, et les coefficients de dx^2, $2\,dx\,dy$, dy^2 dans la deuxième donneront de même les dérivées partielles du second ordre de ω.

17. Différentielles d'un produit. — La formule qui donne la différentielle totale d'ordre n d'une fonction composée se sim-

plifie dans certains cas d'une application fréquente dans la pratique. Ainsi, soit à calculer la différentielle totale d'ordre n d'un produit de deux facteurs $\omega = uv$. On a, pour les premières valeurs de n,

$$d\omega = v\,du + u\,dv, \qquad d^2\omega = v\,d^2u + 2du\,dv + u\,d^2v, \qquad \ldots$$

et, d'une manière générale, il est visible, d'après la loi de formation de ces différentielles, que l'on a

$$d^n\omega = v\,d^nu + C_1\,dv\,d^{n-1}u + C_2\,d^2v\,d^{n-2}u + \ldots + u\,d^nv,$$

$C_1, C_2, \ldots$ étant des nombres entiers positifs. On pourrait démontrer de proche en proche que ces coefficients sont identiques à ceux du développement de $(a+b)^n$, mais on y arrive d'une façon plus élégante au moyen de l'artifice suivant qui s'applique à une foule de questions du même genre. Observons que $C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots$ ne dépendent pas de la nature des fonctions u et v; il suffit donc de les déterminer pour des fonctions particulières. Prenons pour cela $u = e^x$, $v = e^y$, x et y étant deux variables indépendantes; on a

$$\omega = e^{x+y}, \qquad d\omega = e^{x+y}(dx+dy), \qquad \ldots, \qquad d^n\omega = e^{x+y}(dx+dy)^n,$$

$$du = e^x\,dx, \qquad d^2u = e^x\,dx^2, \qquad \ldots,$$
$$dv = e^y\,dy, \qquad d^2v = e^y\,dy^2, \qquad \ldots$$

et la formule générale devient, après avoir divisé par e^{x+y},

$$(dx+dy)^n = dx^n + C_1\,dy\,dx^{n-1} + C_2\,dy^2\,dx^{n-2} + \ldots + dy^n.$$

Comme dx et dy sont arbitraires, il s'ensuit que l'on doit avoir

$$C_1 = \frac{n}{1}, \qquad C_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}, \qquad \ldots, \qquad C_p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}, \qquad \ldots$$

et la formule générale est par conséquent

$$(13)\quad d^n(uv) = v\,d^nu + \frac{n}{1}\,dv\,d^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}\,d^2v\,d^{n-2}u + \ldots + u\,d^nv.$$

Cette formule s'applique quel que soit le nombre des variables indépendantes; si, en particulier, u et v sont fonctions d'une seule variable x, on aura, en divisant par dx^n, l'expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux facteurs.

Il existe des formules analogues à la formule (13) pour le pro-

duit d'un nombre quelconque de facteurs. On les démontre de la même manière.

La formule qui donne $d^n\omega$ se simplifie également lorsque les fonctions intermédiaires u, v, w sont des fonctions entières et linéaires des variables indépendantes x, y, z,

$$\begin{aligned} u &= ax + by + cz + f, \\ v &= a'x + b'y + c'z + f', \\ w &= a''x + b''y + c''z + f'', \end{aligned}$$

les coefficients a, a', a'', b, b', ..., étant des constantes. On a

$$\begin{aligned} du &= a\,dx + b\,dy + c\,dz, \\ dv &= a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz, \\ dw &= a''\,dx + b''\,dy + c''\,dz, \end{aligned}$$

et toutes les différentielles $d^n u$, $d^n v$, $d^n w$, où $n > 1$, sont nulles. La formule qui donne $d^n\omega$ est donc la même que si u, v, w étaient les variables indépendantes

$$d^n\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv + \frac{\partial F}{\partial w}\,dw\right)^{(n)}.$$

Voici une application de cette remarque.

18. Fonctions homogènes. — Une fonction $\varphi(x, y, z)$ est dite homogène et de degré m, si l'on a identiquement

$$\varphi(tx, ty, tz) = t^m\varphi(x, y, z).$$

Considérons pour un moment x, y, z comme ayant des valeurs déterminées et t comme la seule variable indépendante; la formule précédente peut s'écrire

$$\varphi(u, v, w) = t^m\varphi(x, y, z),$$

en posant

$$u = tx, \qquad v = ty, \qquad w = tz.$$

Égalons les différentielles d'ordre n des deux membres en observant que u, v, w sont des fonctions linéaires de t et que l'on a

$$du = x\,dt, \qquad dv = y\,dt, \qquad dw = z\,dt;$$

il vient, d'après la remarque de tout à l'heure, en supprimant le

facteur commun dt^n,

$$\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial u}+y\frac{\partial\varphi}{\partial v}+z\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)t^{m-n}\varphi(x,y,z).$$

Si maintenant on fait $t=1$, u, v, w se réduisent à x, y, z et un terme quelconque du premier membre supposé développé

$$A_{pqr}\frac{\partial^n\varphi}{\partial u^p\partial v^q\partial w^r}x^py^qz^r,$$

se réduit à

$$A_{pqr}\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}x^py^qz^r;$$

on est donc conduit à l'égalité symbolique

$$\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)\varphi(x,y,z),$$

qui se réduit pour $n=1$ à la formule bien connue

$$m\varphi(x,y,z)=x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Notations diverses. — En définitive, nous avons trois notations pour représenter les dérivées partielles des différents ordres d'une fonction de plusieurs variables, celle de Leibniz, celle de Lagrange et celle de Cauchy. Ces différentes notations ont l'inconvénient d'être un peu surchargées et deviennent rapidement fastidieuses dès que l'on a un calcul un peu long à effectuer. Aussi a-t-on imaginé diverses notations plus abrégées. Une des plus employées est celle que l'on doit à Monge pour les dérivées partielles du premier et du second ordre d'une fonction de deux variables; si z est une fonction des deux variables x et y, on pose

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y},\qquad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

et les différentielles totales dz et d^2z ont pour expressions

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$
$$d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2.$$

Une autre notation que l'on commence à employer est la suivante. Si z est une fonction d'un nombre quelconque n de variables

indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on pose

$$p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

quelques-uns des indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pouvant être nuls.

19. **Applications.** — Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe plane C, rapportée à deux axes rectangulaires. La tangente en un point $M(x, y)$ de cette courbe a pour équation

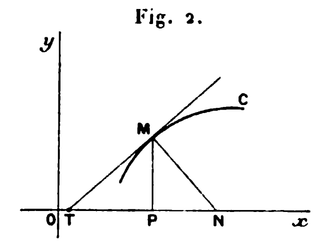
$$Y - y = y'(X - x);$$

la normale, c'est-à-dire la perpendiculaire à la tangente menée par le point de contact, a pour coefficient angulaire $-\frac{1}{y'}$, et son équation est par conséquent

$$(Y - y)y' + (X - x) = 0.$$

Soient P le pied de l'ordonnée, T et N les points de rencontre de l'axe des x avec la tangente et la normale; la longueur PN s'appelle la sous-normale, PT est la sous-tangente, MN la normale et MT la tangente.

Fig. 2.



De l'équation de la normale on tire pour l'abscisse du point N la valeur $x + yy'$, ce qui montre que la sous-normale est égale à $\pm yy'$. Si l'on convient d'appeler sous-normale la longueur PN affectée d'un signe, le signe + ou le signe — suivant que la direction de P vers N coïncide avec la direction positive de ox ou avec la direction opposée, la sous-normale a pour expression yy', quelle que soit la disposition de la courbe C. L'expression de la sous-tangente est de même $-\frac{y}{y'}$.

Quant aux longueurs MN et MT, les triangles rectangles MPN et MPT nous donnent respectivement

$$MN = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PN}^2} = y\sqrt{1 + y'^2},$$
$$MT = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PT}^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2},$$

On peut se proposer sur ces lignes diverses questions. Cherchons, par exemple, toutes les courbes dont la sous-normale est constante et égale à une longueur donnée a; cela revient à trouver toutes les fonctions $y = f(x)$ satisfaisant à la relation $yy' = a$. Le premier membre est la dérivée de $\frac{y^2}{2}$, le second membre la dérivée de ax; ces deux fonctions ne doivent différer que par une constante, et l'on a

$$y^2 = 2ax + C,$$

équation d'une parabole ayant ox pour axe de symétrie. En cherchant de même les courbes dont la sous-tangente est constante, on est conduit à l'équation

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{a},$$

d'où l'on tire

$$\log y = \frac{x}{a} + \log C, \qquad \text{ou} \qquad y = Ce^{\frac{x}{a}},$$

équation d'une courbe transcendante, asymptote à l'axe des x. Pour trouver les courbes dont la normale est constante, on a l'équation $y\sqrt{1+y'^2} = a$, qui peut encore s'écrire

$$\frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm 1;$$

le premier membre est la dérivée de $-\sqrt{a^2 - y^2}$, et l'on a, par conséquent,

$$\sqrt{a^2 - y^2} = x + C,$$

ou

$$(x + C)^2 + y^2 = a^2,$$

équation d'un cercle de rayon a, ayant son centre sur l'axe ox.

Les courbes dont la tangente est constante sont des courbes transcendantes, que nous étudierons plus tard.

Soient maintenant $y = f(x)$, $Y = F(x)$ les équations de deux courbes planes C, C', et soient M, M' les deux points correspondant à une même abscisse x. Pour que les sous-normales aux deux courbes C et C' aux points correspondants aient la même longueur, il faut et il suffit que l'on ait

$$YY' = \pm yy',$$

et par suite $Y^2 = \pm y^2 + C$, le double signe provenant de ce que les sous-normales peuvent être dirigées dans le même sens ou en sens opposé. On satisfait à la relation précédente en posant

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \qquad Y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2},$$

ou

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \qquad Y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2},$$

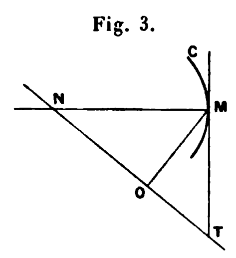
ce qui donne une construction facile de la normale à l'ellipse et à l'hyperbole.

EXERCICES.

1. Soit $\rho = f(\omega)$ l'équation en coordonnées polaires d'une courbe plane. Par le pôle O on mène une droite perpendiculaire au rayon vecteur OM, dont on prend l'intersection avec la tangente MT et la normale MN. On demande d'exprimer les diverses lignes OT, ON, MN, MT en fonction de $f(\omega)$ et de $f'(\omega)$.

Quelles sont les courbes pour lesquelles l'une de ces lignes est constante?

Fig. 3.



2. Soient $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ les équations d'une courbe gauche Γ; soit N le point où le plan normal en un point M, c'est-à-dire le plan perpendiculaire à la tangente, rencontre l'axe des z, et soit P le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur Oz. Quelles sont les courbes Γ pour lesquelles une des lignes PN ou MN est constante?

R. Ces courbes sont situées sur des paraboloïdes de révolution ou des sphères.

3. Déterminer un polynome entier en x et du septième degré $f(x)$, sachant que $f(x)+1$ est divisible par $(x-1)^4$ et $f(x)-1$ par $(x+1)^4$. Généraliser la question.

4. Soient P et Q deux polynomes entiers en x tels que l'on ait

$$\sqrt{1-P^2} = Q\sqrt{1-x^2}$$

on a, en désignant par n un nombre entier,

$$\frac{dP}{\sqrt{1-P^2}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

R. De la relation

$$(a)\qquad 1-P^2 = Q^2(1-x^2),$$

on tire, en différentiant,

$$(b)\qquad -2PP' = Q[2Q'(1-x^2)-2Qx];$$

la relation (a) montre que Q est premier avec P, et la seconde que Q divise P'.

5. *Soit $R(x)$ un polynome du quatrième degré n'ayant que des racines simples, et $x = \frac{U}{V}$ une fonction rationnelle de t telle que l'on ait

$$\sqrt{R(x)} = \frac{P(t)}{Q(t)}\sqrt{R_1(t)},$$

$R_1(t)$ étant un polynome du quatrième degré, et $\frac{P}{Q}$ une fonction rationnelle. Démontrer que cette fonction $\frac{U}{V}$ satisfait à une relation de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{k\,dt}{\sqrt{R_1(t)}},$$

[JACOBI.]

k étant une constante.

R. On remarque que toutes les racines de l'équation $R\left(\frac{U}{V}\right) = 0$, qui n'annulent pas $R_1(t)$, doivent annuler $UV'-VU'$ et, par suite $\frac{dx}{dt}$.

6. *La dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction $y = \varphi(u)$, où u est fonction de la variable indépendante x, a pour expression

$$(a)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = A_1\varphi'(u) + \frac{A_2}{1.2}\varphi''(u) + \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(u),$$

où

$$(b)\qquad \begin{cases} A_k = \dfrac{d^n u^k}{dx^n} - \dfrac{k}{1}u\dfrac{d^n u^{k-1}}{dx^n} + \dfrac{k(k-1)}{1.2}u^2\dfrac{d^n u^{k-2}}{dx^n} + \ldots \\ \quad + (-1)^{k-1}ku^{k-1}\dfrac{d^n u}{dx^n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

On remarque d'abord que l'expression de la dérivée d'ordre n est de la forme (a), les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ne dépendant pas de la forme de la fonction $\varphi(u)$. Pour obtenir ces coefficients, il suffit de faire succes-

sivement $\varphi(u) = u$, $\varphi(u) = u^2$, ..., $\varphi(u) = u^n$, et de résoudre les équations obtenues par rapport aux coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$; ce qui donne les valeurs (b).

7. *La dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\varphi(x^2)$ a pour expression

$$\frac{d^n\varphi(x^2)}{dx^n} = (2x)^n\varphi^{(n)}(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2}\varphi^{(n-1)}(x^2) + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{1.2\ldots p}(2x)^{n-2p}\varphi^{(n-p)}(x^2) + \ldots,$$

le nombre p variant depuis zéro jusqu'au plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{2}$, et $\varphi^{(i)}(x^2)$ désignant la dérivée d'ordre i par rapport à x^2.

Application aux fonctions e^{-x^2}, $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tang} x$.

8. *Si l'on pose $x = \cos u$, on a

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = (-1)^{m-1}\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{m}\sin mu.$$

[OLINDE RODRIGUE.]

9. Le polynome de Legendre

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

satisfait à l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2} - 2x\frac{dX_n}{dn} + n(n+1)X_n = 0;$$

en déduire les coefficients de ce polynome.

10. Les quatre fonctions

$$y_1 = \sin(n\arcsin x),\qquad y_3 = \sin(n\arccos x),$$
$$y_2 = \cos(n\arcsin x),\qquad y_4 = \cos(n\arccos x),$$

satisfont à l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

En déduire les développements de ces fonctions lorsqu'elles se réduisent à des polynomes.

11. *Démontrer la formule

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

[HALPHEN.]

12. Toute fonction $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisfait, quelles que soient les fonctions φ et ψ, à la relation

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

13. La fonction $z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$ satisfait, quelles que soient les fonctions φ et ψ, à la relation $r - 2s + t = 0$.

14. La fonction $z = f[x - \varphi(y)]$ satisfait à la relation $ps = qr$, quelles que soient les fonctions f et φ.

15. La fonction $z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^{-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisfait, quelles que soient les fonctions φ et ψ, à la relation

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 + px - qy = n^2 z.$$

16. La fonction

$$y = |x - a_1|\varphi_1(x) + |x - a_2|\varphi_2(x) + \ldots + |x - a_n|\varphi_n(x),$$

où $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ sont des fonctions continues, ainsi que les dérivées $\varphi'_1(x)$, $\ldots$, $\varphi'_n(x)$, admet une dérivée discontinue pour les valeurs a_1, a_2, $\ldots$, a_n.

17. Trouver une relation entre les dérivées du premier et du second ordre de la fonction $z = f(x_1, u)$, où $u = \varphi(x_2, x_3)$, x_1, x_2, x_3 étant trois variables indépendantes, $f(x_1, u)$, $\varphi(x_2, x_3)$, deux fonctions arbitraires.

18. Soit $f(x)$ une fonction quelconque de x et $f'(x)$ sa dérivée. Si l'on pose $u = [f'(x)]^{-\frac{1}{2}}$, $v = f(x)[f'(x)]^{-\frac{1}{2}}$, on a

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}.$$

19. *La dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction $u = \varphi(y)$, où $y = \Psi(x)$, a pour expression

$$D_x^n\varphi = \sum \frac{n!}{i!j!\ldots k!} D_y^p\varphi\left(\frac{\Psi'}{1}\right)^i\left(\frac{\Psi''}{1.2}\right)^j\left(\frac{\Psi'''}{1.2.3}\right)^h\cdots\left(\frac{\Psi^{(l)}}{1.2\ldots l}\right)^k,$$

le signe Σ étant étendu à toutes les solutions en nombres entiers et positifs de l'équation $i + 2j + 3h + \ldots + lk = n$, et p étant égal à $i + j + \ldots + k$.

[Faa de Bruno, *Quarterly Journal of Mathematics*, t. I, p. 359.]

CHAPITRE II.

FONCTIONS IMPLICITES. — DÉTERMINANTS FONCTIONNELS. CHANGEMENTS DE VARIABLES.

I. — FONCTIONS IMPLICITES.

20. Étude d'un cas particulier. — Il arrive souvent que l'on a à étudier des fonctions dont on ne possède pas l'expression explicite, mais qui sont définies par des équations non résolues. Considérons, par exemple, une relation entre trois variables x, y, z,

$$F(x, y, z) = 0; \tag{1}$$

cette équation définit, sous certaines conditions que nous allons préciser, une fonction des deux variables indépendantes x, y. Nous démontrerons pour cela le théorème suivant :

Soient $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ un système de solutions de l'équation (1), *tel que la fonction* F *et ses dérivées partielles du premier ordre soient continues dans le voisinage de ce système de valeurs. Si la dérivée F'_z n'est pas nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, il existe une fonction continue des variables indépendantes x, y, et une seule, satisfaisant à l'équation* (1), *et prenant la valeur z_0, lorsque x et y prennent respectivement les valeurs x_0 et y_0.*

La dérivée F'_z n'étant pas nulle pour les valeurs x_0, y_0, z_0, supposons, pour fixer les idées, qu'elle soit positive. D'autre part, les fonctions F, F'_x, F'_y, F'_z étant continues dans le voisinage de ce système de valeurs, choisissons un nombre l positif assez petit pour que les quatre fonctions F, F'_x, F'_y, F'_z soient continues tant que les valeurs de x, y, z satisfont aux inégalités

$$|x - x_0| \leqq l, \qquad |y - y_0| \leqq l, \qquad |z - z_0| \leqq l, \tag{2}$$

et que l'on ait, pour ces systèmes de valeurs de x, y, z,

$$F'_z(x, y, z) > P,$$

P étant un nombre positif, d'ailleurs quelconque; nous désignerons de même par Q un autre nombre positif, supérieur aux valeurs absolues des deux autres dérivées partielles F'_x et F'_y dans le même domaine.

Cela posé, donnons à x, y, z des valeurs satisfaisant aux inégalités (2). On peut écrire

$$\begin{aligned} F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0) = F(x, y, z) &- F(x_0, y, z) + F(x_0, y, z) \\ &- F(x_0, y_0, z) + F(x_0, y_0, z) - F(x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

ou, en appliquant à chacune des différences la formule des accroissements finis, et observant que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = \ &(x - x_0)F'_x[x_0 + \theta(x - x_0), y, z] \\ &+ (y - y_0)F'_y[x_0, y_0 + \theta'(y - y_0), z] \\ &+ (z - z_0)F'_z[x_0, y_0, z_0 + \theta''(z - z_0)]; \end{aligned}$$

la fonction $F(x, y, z)$ est donc de la forme

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, y, z) = \ &A(x, y, z)(x - x_0) \\ &+ B(x, y, z)(y - y_0) + C(x, y, z)(z - z_0), \end{aligned} \right.$$

les valeurs absolues des fonctions $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$ satisfaisant aux inégalités

$$|A| < Q, \qquad |B| < Q, \qquad |C| > P,$$

lorsque les valeurs attribuées aux variables x, y, z satisfont aux inégalités (2). Soient maintenant ε un nombre positif inférieur à l, et η le plus petit des deux nombres l et $\frac{P\varepsilon}{2Q}$. Supposons que dans l'équation (1) on attribue aux variables x et y des valeurs déterminées vérifiant les conditions

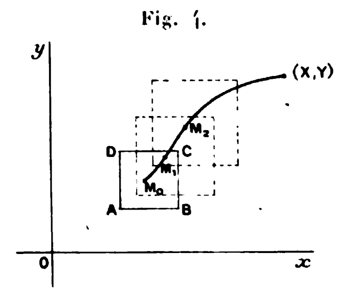
$$|x - x_0| < \eta, \qquad |y - y_0| < \eta,$$

et qu'on veuille obtenir le nombre des racines de cette équation, où z est regardée comme l'inconnue, comprises entre $z_0 - \varepsilon$ et $z_0 + \varepsilon$. Dans l'expression (3) de $F(x, y, z)$, la somme des deux premiers termes est toujours moindre en valeur absolue que $2Q\eta$, tandis que la valeur absolue du dernier terme est supérieure à $P\varepsilon$, quand on y remplace z par $z_0 \pm \varepsilon$. D'après la facon dont on a

choisi η, c'est donc le dernier terme qui donne son signe; on a, par conséquent, $F(x, y, z_0 - \varepsilon) < 0$ et $F(x, y, z_0 + \varepsilon) > 0$, et l'on en conclut que l'équation (1) a au moins une racine comprise entre $z_0 - \varepsilon$ et $z_0 + \varepsilon$. Cette racine est d'ailleurs unique, puisque la dérivée F'_z reste positive lorsque z varie de $z_0 - \varepsilon$ à $z_0 + \varepsilon$. Nous arrivons donc à cette conclusion que l'équation (1) a une racine et une seule qui tend vers z_0 lorsque x et y tendent vers les valeurs x_0 et y_0 respectivement.

Voyons pour quels systèmes de valeurs des variables x et y la racine dont nous venons de démontrer l'existence se trouve bien définie. Soit h le plus petit des deux nombres l et $\frac{Pl}{2Q}$; le raisonnement qui précède nous prouve que si les valeurs des variables x

Fig. 4.



et y satisfont aux inégalités $|x - x_0| < h$, $|y - y_0| < h$, l'équation (1) aura une racine et une seule comprise entre $z_0 - l$ et $z_0 + l$. Appelons R le carré ayant pour centre le point $M_0(x_0, y_0)$ et ses côtés parallèles aux axes de coordonnées, la longueur de chaque côté étant égale à $2h$; tant que le point (x, y) est à l'intérieur de ce domaine, l'équation (1) détermine une fonction bien définie des deux variables x et y, qui reste comprise entre $z_0 - l$ et $z_0 + l$. Cette fonction est continue au point M_0 d'après ce que nous venons de voir; il en est de même en un autre point quelconque M_1 du domaine R, car, en vertu des hypothèses qui ont été faites sur la fonction F et ses dérivées, la dérivée $F'_z(x_1, y_1, z_1)$ sera encore positive au point M_1, puisqu'on aura $|x_1 - x_0| < l$, $|y_1 - y_0| < l$, $|z_1 - z_0| < l$. On se trouvera donc dans les mêmes conditions au point M_1 qu'au point M_0, et, par suite, la racine considérée est encore continue pour $x = x_1$, $y = y_1$.

La racine précédente n'étant définie qu'à l'intérieur du domaine R, nous n'avons ainsi qu'un *élément* de fonction implicite. Pour définir cette fonction en dehors du domaine R, on procède de proche en proche de la façon suivante. Soit L un chemin continu partant du point (x_0, y_0) et aboutissant à un point (X, Y) situé en dehors du domaine R. Imaginons que les variables x et y varient simultanément de telle façon que le point de coordonnées (x, y) décrive le chemin L. Si l'on part du point (x_0, y_0) avec la valeur z_0 pour z, on a une valeur bien déterminée pour cette racine, tant qu'on n'est pas sorti du domaine R. Soient M_1 (x_1, y_1) un point de ce chemin intérieur à R, et z_1 la valeur correspondante de z; les conditions du théorème général se trouvant encore vérifiées pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, il existe un autre domaine R_1, ayant pour centre le point M_1, à l'intérieur duquel la racine qui se réduit à z_1 pour $x = x_1$, $y = y_1$, est définie. Ce nouveau domaine R_1 aura en général des points extérieurs à R; en prenant de nouveau sur le chemin L un autre point M_2, extérieur à R et intérieur à R_1, on pourra recommencer la même construction pour obtenir un nouveau domaine R_2, à l'intérieur duquel la racine de l'équation (1) sera bien déterminée, et ainsi de suite. On pourra continuer l'opération, tant qu'on n'arrivera pas à un système de valeurs pour x, y, z, pour lequel $F'_z = 0$. Je me contenterai ici de ces indications; nous aurons à traiter en détail dans d'autres Chapitres des questions analogues.

21. Dérivées des fonctions implicites. — Revenons au domaine R et à la racine $z = \varphi(x, y)$ de l'équation (1), qui est une fonction continue des deux variables x et y dans ce domaine. Cette fonction admet des dérivées partielles du premier ordre. En effet, laissons y constant et attribuons à x un accroissement Δx qui donne à z un accroissement Δz; nous avons, d'après un calcul déjà fait,

$$\begin{aligned} &F(x + \Delta x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z) \\ &\quad = \Delta x\, F'_x(x + \theta\,\Delta x, y, z + \Delta z) + \Delta z\, F'_z(x, y, z + \theta'\,\Delta z) = 0. \end{aligned}$$

On en tire

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \theta\,\Delta x, y, z + \Delta z)}{F'_z(x, y, z + \theta'\,\Delta z)};$$

lorsque Δx tend vers zéro, il en est de même de Δz, puisque z est une fonction continue de x. Le second membre tend donc vers une limite, et z admet une dérivée partielle par rapport à x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z};$$

on démontrerait de même la formule

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Remarque. — Si l'équation $F = 0$ est de degré m par rapport à z, elle définit m fonctions des variables x et y. Les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ admettent elles-mêmes m valeurs pour chaque système de valeurs des variables x et y; les formules précédentes donnent sans ambiguïté ces dérivées partielles, pourvu que l'on remplace z dans les seconds membres par la valeur de la fonction dont on cherche la dérivée.

Par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

définit deux fonctions $+\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ et $-\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, qui sont continues tant que l'on a $x^2 + y^2 < 1$. Les dérivées partielles de la première sont

$$\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

et les dérivées partielles de la seconde s'obtiendront en changeant les signes. On obtiendrait les mêmes valeurs en partant des formules

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

et y remplaçant z successivement par ses deux déterminations.

22. Application aux surfaces. — Si l'on regarde x, y, z comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace, toute équation

$$(4) \qquad F(x, y, z) = 0$$

représente une surface S. Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées d'un point A de cette surface; si la fonction F est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, z_0, sans que ces trois dérivées soient nulles simultanément au point A, la surface S admet un plan tangent en A. Supposons, par exemple, que la dérivée partielle F'_z ne soit pas nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. D'après le théorème général, l'équation de la surface peut aussi s'écrire, dans le voisinage du point A, en la supposant résolue par rapport à z,

$$z = \varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ étant une fonction continue, et l'équation du plan tangent en A est

$$Z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0);$$

remplaçons $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ par leurs valeurs tirées des formules précédentes : l'équation du plan tangent devient

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (Z - z_0) = 0.$$

Si l'on avait $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0$, et $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \neq 0$, on considérerait y et z comme les variables indépendantes et x comme une fonction de ces variables; on arriverait encore à la même équation (5) pour le plan tangent, ce qui est évident *a priori* d'après la symétrie du premier membre. On verrait de même que la tangente en un point (x_0, y_0) d'une courbe plane représentée par $F(x, y) = 0$ a pour équation

$$(X - x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + (Y - y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Si l'on a à la fois

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0,$$

le point A est un *point singulier;* les tangentes aux diverses courbes situées sur la surface et passant par A forment en général un cône et non un plan. Ce cas sera étudié plus loin (Chap. III).

Dans la démonstration du théorème général sur les fonctions implicites, nous avons supposé que la dérivée F'_{z_0} n'était pas nulle.

L'intuition géométrique fait bien comprendre pourquoi cette condition est essentielle. Si, en effet, on a $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0$ et $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \neq 0$, le plan tangent à la surface S est parallèle à l'axe des z; une parallèle à l'axe des z voisine de la droite $x = x_0$, $y = y_0$ rencontre généralement la surface en deux points voisins du point de contact. L'équation (4) admet donc deux racines tendant vers z_0 lorsque x et y tendent vers x_0 et y_0 respectivement.

Par exemple, si l'on coupe la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ par la droite $y = 0$, $x = 1 + \varepsilon$, il y a deux valeurs de z tendant vers zéro en même temps que ε, réelles si ε est négatif et imaginaires si ε est positif.

23. Dérivées successives. — Dans les formules qui donnent les dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

on peut considérer les seconds membres comme des fonctions composées, z étant une fonction intermédiaire. On pourrait donc calculer les dérivées successives de proche en proche en appliquant la règle de différentiation des fonctions composées. L'existence de ces dérivées successives est d'ailleurs subordonnée à l'existence des dérivées partielles des différents ordres de la fonction $F(x, y, z)$.

On obtient ces dérivées d'une façon plus simple en appliquant la proposition suivante : *Lorsque plusieurs fonctions d'une variable indépendante vérifient une relation* $F = 0$, *leurs dérivées vérifient la relation obtenue en égalant à zéro la dérivée du premier membre, prise par la règle de différentiation des fonctions composées.* Il est clair, en effet, que, si la fonction F se réduit identiquement à zéro quand on y a remplacé les variables dont elle dépend par des fonctions de la variable indépendante, il en est de même de sa dérivée. Le théorème subsiste encore si les fonctions liées par la relation $F = 0$ dépendent de plusieurs variables indépendantes.

Cela posé, supposons d'abord que l'on veuille calculer les dérivées successives de la fonction implicite y de la seule variable x définie par la relation

$$F(x, y) = 0;$$

on en déduit successivement

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} y' + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2} y'^2 + 3\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} y''$$
$$+ \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} y'^3 + 3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y' y'' + \frac{\partial F}{\partial y} y''' = 0.$$

. . . .

et l'on calculera ainsi de proche en proche $y', y'', y''', \ldots$.

Exemple. — Étant donnée une fonction $y = f(x)$, on peut inversement considérer y comme la variable indépendante et x comme une fonction de y définie par l'équation $y = f(x)$. Si la dérivée $f'(x)$ n'est pas nulle pour la valeur x_0, qui donne $y_0 = f(x_0)$, il existe, d'après le théorème général, une fonction et une seule de y qui satisfait à la relation $y = f(x)$ et qui prend la valeur x_0 pour $y = y_0$; c'est ce qu'on appelle la fonction *inverse* de $f(x)$. Pour calculer les dérivées successives x'_y, x''_{y^2}, x'''_{y^3}, ... de cette fonction, il suffit de différentier plusieurs fois de suite, en considérant y comme la variable indépendante, ce qui nous donne

$$1 = f'(x) x'_y,$$
$$0 = f''(x)(x'_y)^2 + f'(x) x''_{y^2},$$
$$0 = f'''(x)(x'_y)^3 + 3 f''(x) x'_y x''_{y^2} + f'(x) x'''_{y^3},$$

. . . .

on en tire

$$x'_y = \frac{1}{f'(x)}, \quad x''_{y^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}, \quad x'''_{y^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x) f'''(x)}{[f'(x)]^5}, \quad \ldots.$$

Il est à remarquer que ce système de formules ne change pas quand on permute x'_y et $f'(x)$, x''_{y^2} et $f''(x)$, x'''_{y^3} et $f'''(x)$, ..., car la relation entre les deux fonctions $y = f(x)$ et $x = \varphi(y)$ est évidemment réciproque.

Pour donner une application de ces formules, supposons que l'on veuille obtenir toutes les fonctions $y = f(x)$ qui satisfont à la relation

$$y' y''' - 3 y''^2 = 0;$$

quand on prend y comme la variable indépendante, et x comme la fonction, cette équation devient

$$x'''_{y^3} = 0.$$

Or, les seules fonctions dont la dérivée troisième soit nulle sont des polynomes, du second degré au plus. On aura donc, pour x, une expression de la forme

$$x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3,$$

C_1, C_2, C_3 étant trois constantes quelconques; en résolvant cette équation par rapport à y, on en conclut que toutes les fonctions $y = f(x)$ qui satisfont à la condition proposée sont comprises dans la formule

$$y = a \pm \sqrt{bx + c},$$

a, b, c étant trois constantes arbitraires. Cette équation représente une parabole ayant son axe parallèle à l'axe des x.

24. Dérivées partielles. — Considérons maintenant une fonction implicite de deux variables définie par l'équation

$$\text{(6)} \qquad F(x, y, z) = 0;$$

les dérivées partielles du premier ordre sont données, comme nous l'avons déjà vu directement, par les relations

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Pour avoir les dérivées partielles du second ordre, il suffit de différentier de nouveau les deux équations (7) par rapport à x et à y, ce qui donne trois relations distinctes seulement, car la dérivée de la première par rapport à y est identique à la dérivée de la seconde par rapport à x,

$$\text{(8)} \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,\\ &\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,\end{aligned}\right.$$

et l'on calculerait de même les dérivées du troisième ordre et d'ordre plus élevé.

L'emploi des différentielles totales permet encore de déterminer en même temps toutes les dérivées partielles du même ordre. Il suffit pour cela de s'appuyer sur le théorème suivant : *Lorsque plusieurs fonctions u, v, w, ... d'un nombre quelconque de variables indépendantes x, y, z, ... vérifient une relation* $F = 0$, *les différentielles totales satisfont à la relation* $dF = 0$, *obtenue en prenant la différentielle totale de* F *comme si toutes les variables dont elle dépend étaient des variables indépendantes*. Pour le démontrer, supposons qu'on

ait une relation $F(u, v, w) = 0$, u, v, w étant des fonctions des variables indépendantes x, y, z, t. Les dérivées partielles de u, v, w satisfont aux quatre équations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} &= 0,\\
\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} &= 0,\\
\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} &= 0,\\
\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} &= 0;
\end{aligned}$$

multiplions-les respectivement par dx, dy, dz, dt et ajoutons-les, il vient

$$\frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv + \frac{\partial F}{\partial w}\,dw = dF = 0.$$

Nous voyons encore ici l'avantage de la notation différentielle, car la relation précédente est indépendante du choix et du nombre des variables indépendantes. Pour avoir une relation entre les différentielles du second ordre, il suffira d'appliquer le théorème général à la relation $dF = 0$, considérée comme une équation entre u, v, w, du, dv, dw, et ainsi de suite; on remplacera seulement par zéro toutes les différentielles d'ordre supérieur au premier des variables que l'on a choisies pour variables indépendantes.

Appliquons ceci au calcul des différentielles totales successives de la fonction implicite définie par l'équation (6), x et y étant les variables indépendantes. Il vient

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0,\\
\left(\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial z}\,d^2 z = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{gathered}$$

et les deux premières de ces équations peuvent remplacer les cinq relations (7) et (8); de l'expression de dz on déduit les deux dérivées du premier ordre, et de l'expression de $d^2 z$ on déduit les trois dérivées du second ordre, etc. Considérons par exemple l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 1,$$

qui donne, en différentiant deux fois,

$$A x\,dx + A'y\,dy + A''z\,dz = 0,$$
$$A\,dx^2 + A'dy^2 + A''dz^2 + A''z\,d^2z =$$

de la première on tire

$$dz = -\frac{A x\,dx + A'y\,dy}{A''z}$$

et, en portant cette valeur de dz dans la seconde, il vient

$$d^2z = -\frac{A(A x^2 + A''z^2)dx^2 + 2AA'xy\,dx\,dy + A'(A'y^2 + A''z^2)dy^2}{A''^2z^3}.$$

On aura donc, en employant la notation de Monge,

$$p = -\frac{A x}{A''z}, \qquad q = -\frac{A'y}{A''z},$$

$$r = -\frac{A(A x^2 + A''z^2)}{A''^2z^3}, \qquad s = -\frac{AA'xy}{A''^2z^3}, \qquad t = -\frac{A'(A'y^2 + A''z^2)}{A''^2z^3}.$$

La méthode est évidemment générale, quel que soit le nombre des variables indépendantes et l'ordre des dérivées partielles que l'on veut calculer.

Exemple. — Soit $z = f(x, y)$ une fonction des deux variables x et y. Considérons, dans la relation précédente, y et z comme deux variables indépendantes, et x comme une fonction implicite de ces deux variables; proposons-nous de calculer les différentielles du premier et du second ordre dx et d^2x. On a d'abord

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy;$$

comme on prend y et z pour variables indépendantes, on doit faire

$$d^2y = d^2z = 0,$$

et, en prenant de nouveau la différentielle, il vient

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x.$$

Ces équations peuvent s'écrire, en employant la notation abrégée de Monge pour désigner les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction $f(x, y)$,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$0 = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x;$$

on tire de la première

$$dx = \frac{dz - q\,dy}{p},$$

et, en portant cette valeur de dx dans la seconde, on a

$$d^2x = -\frac{r\,dz^2 + 2(ps - qr)\,dy\,dz + (q^2r - 2pqs + p^2t)\,dy^2}{p^3}.$$

Les dérivées partielles du premier et du second ordre de x, considérée comme fonction des variables z et y, ont donc les valeurs suivantes

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{q}{p},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{r}{p^3}, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z} = 2\,\frac{qr - ps}{p^3}, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{2pqs - p^2t - q^2r}{p^3}.$$

Proposons-nous, comme application de ces formules, de trouver toutes les fonctions $f(x, y)$ satisfaisant à l'équation $q^2r + p^2t = 2pqs$. Si, dans la relation $z = f(x, y)$, on considère x comme une fonction des variables indépendantes y et z, la condition précédente devient $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$. Cette équation exprime que $\frac{\partial x}{\partial y}$ ne dépend pas de y; on a donc

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction quelconque de z. Cette nouvelle équation peut encore s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial y}[x - y\varphi(z)] = 0,$$

et elle exprime que $x - y\varphi(z)$ ne dépend pas de y. On a donc encore

$$x = y\varphi(z) + \psi(z),$$

$\psi(z)$ étant une autre fonction quelconque de z, et l'on obtiendra toutes les fonctions $z = f(x, y)$ répondant à la question en résolvant l'équation précédente par rapport à z. Cette équation représente une surface engendrée par une droite qui reste parallèle au plan des xy.

25. Théorème général. — *Soit* (E) *un système de n équations*

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \end{cases}$$

entre $n + p$ *variables* $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $x_1, x_2, \ldots, x_p$. *On*

suppose que ces équations sont satisfaites pour les valeurs $x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0$, $u_1 = u_1^0, \ldots, u_n = u_n^0$, *que les fonctions* F_i *sont continues et admettent des dérivées partielles du premier ordre continues dans le voisinage de ces valeurs, et enfin que le déterminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul pour

$$x_i = x_i^0, \qquad u_k = u_k^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans ces conditions, il existe un système de fonctions et un seul $u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, *satisfaisant aux équations* (E), *et se réduisant respectivement à* $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$, *pour* $x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0$.

Le déterminant Δ s'appelle le *Jacobien* (1) ou le *Déterminant fonctionnel* des n fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ par rapport aux variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$. On le représente par la notation

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$

Nous commencerons par établir le théorème dans le cas particulier d'un système de deux équations avec trois variables indépendantes et deux inconnues u et v

$$F_1(x, y, z, u, v) = 0, \tag{9}$$

$$F_2(x, y, z, u, v) = 0. \tag{10}$$

Ces équations sont satisfaites, par hypothèse, pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $u = u_0$, $v = v_0$, et le déterminant

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}$$

n'est pas nul pour ce système de valeurs; il en résulte que l'une au

(1) Jacobi, *Journal de Crelle*, tome 22.

moins des dérivées $\frac{\partial F_1}{\partial v}$, $\frac{\partial F_2}{\partial v}$ n'est pas nulle pour ces mêmes valeurs. Supposons, pour fixer les idées, que $\frac{\partial F_1}{\partial v}$ ne soit pas nulle. D'après le théorème établi plus haut pour une seule équation, la relation (9) définit une fonction v des variables x, y, z, u,

$$v = f(x, y, z, u),$$

qui se réduit à v_0 pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $u = u_0$. Imaginons qu'on ait remplacé v par cette fonction dans l'équation (10); nous sommes conduits à une relation entre x, y, z et u,

$$\Phi(x, y, z, u) = F_2[x, y, z, u, f(x, y, z, u)],$$

qui est vérifiée pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $u = u_0$. On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial F_2}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u};$$

or, de la relation (9) on tire

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{\partial f}{\partial u}$ par cette valeur dans $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, il vient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}}{\frac{\partial F_1}{\partial v}}.$$

On voit que cette dérivée n'est pas nulle pour les valeurs x_0, y_0, z_0, u_0; la relation $\Phi = 0$ est donc satisfaite en prenant pour u une fonction continue $u = \varphi(x, y, z)$ qui est égale à u_0 pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, et, en remplaçant u par $\varphi(x, y, z)$ dans $f(x, y, z, u)$, on a également pour v une fonction continue. La proposition est donc établie pour un système de deux équations.

On démontre, comme plus haut, que ces fonctions admettent des dérivées partielles du premier ordre. Laissant y et z constants, donnons à x un accroissement Δx, et soient Δu et Δv les accroissements correspondants des fonctions u et v. Les équations (9)

et (10) peuvent s'écrire

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)=0,$$
$$\Delta x\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)=0,$$

ε, ε', ε'', η, η', η'' tendant vers zéro lorsque Δx, Δu, Δv tendent vers zéro. On déduit de là

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=-\frac{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta\right)}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)};$$

lorsque Δx tend vers zéro, il en est de même de Δu, Δv et, par suite, de ε, ε', ε'', η, η', η''. Le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ a donc une limite, c'est-à-dire que u admet une dérivée partielle par rapport à x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial x}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}}.$$

On verrait de même que le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tend vers une limite finie $\frac{\partial v}{\partial x}$, qui est donnée par une formule analogue; pratiquement, on calculera ces dérivées partielles au moyen des deux équations

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

et l'on obtiendra, de la même façon, les dérivées partielles par rapport aux variables y et z.

Pour établir maintenant le théorème général, il suffira de montrer que, si la proposition est vraie pour un système de $(n-1)$ équations, elle est encore vraie pour un système de n équations. Le déterminant fonctionnel Δ n'étant pas nul, par hypothèse, pour les valeurs initiales, l'un au moins des mineurs correspondant aux éléments de la dernière ligne est différent de zéro pour ces mêmes valeurs. Supposons qu'il en soit ainsi pour le mineur correspon-

dant à $\frac{\partial F_n}{\partial u_n}$, qui n'est autre que

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})};$$

le théorème étant exact pour un système de $(n-1)$ équations, on tire des $(n-1)$ premières équations (E)

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_n), \qquad \ldots, \qquad u_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_n),$$

les fonctions φ_i étant continues, et, en remplaçant $u_1, \ldots, u_{n-1}$ par les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ dans la dernière des équations (E), on est conduit à une nouvelle relation pour déterminer u_n,

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, u_n) = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, u_n) = 0.$$

Tout se réduit à démontrer que la dérivée $\frac{\partial \Phi}{\partial u_n}$ n'est pas nulle pour les valeurs considérées $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0, u_n^0$; car, s'il en est ainsi, on pourra déduire de cette dernière équation

$$u_n = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

la fonction ψ étant continue, et, en portant cette valeur de u_n dans $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, on aura également pour $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ des fonctions continues. Or on a

$$(11) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} = \frac{\partial F_n}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_n} + \frac{\partial F_n}{\partial u_n},$$

et les dérivées $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_n}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_n}$ sont données par les $n-1$ relations

$$(12) \qquad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_n} + \frac{\partial F_1}{\partial u_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} + \ldots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_n} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_n} = 0; \end{cases}$$

on peut considérer les relations (11) et (12) comme n équations linéaires en $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_n}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}$, et l'on en tire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$



La dérivée $\frac{\partial\Phi}{\partial u_n}$ n'est donc pas nulle pour les valeurs initiales et, par suite, le théorème général est démontré.

Les dérivées successives des fonctions implicites définies par plusieurs équations simultanées se calculent comme dans le cas d'une seule équation. Il faut encore observer que, lorsqu'il y a plusieurs variables indépendantes, il est avantageux de calculer les différentielles totales, pour en déduire toutes les dérivées partielles du même ordre. Supposons, par exemple, qu'on ait deux fonctions u et v des trois variables x, y, z, définies par les deux relations

$$F(x, y, z, u, v) = 0,$$
$$\Phi(x, y, z, u, v) = 0;$$

les différentielles totales du premier ordre du et dv sont données par les deux équations

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz + \frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,du + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\,dv = 0.$$

On aura ensuite d^2u et d^2v au moyen des équations

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \ldots + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial F}{\partial v}\,d^2v = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\,dv\right)^{(2)} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\,d^2v = 0,$$

et ainsi de suite. Dans les équations qui donnent d^nu et d^nv, le déterminant des coefficients de ces différentielles est égal, quel que soit n, au jacobien $\frac{D(F, \Phi)}{D(u, v)}$ qui, par hypothèse, n'est pas nul.

26. Inversion. — Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n fonctions des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, telles que le jacobien $\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ ne soit pas identiquement nul. Les n équations

$$(13)\quad \begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \qquad u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \ldots, \\ u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

définissent inversement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Il suffit, en effet, de considérer un système de valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ pour

lesquelles le jacobien n'est pas nul; $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$ désignant les valeurs correspondantes de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, il existe, d'après le théorème général, un système de fonctions

$$x_1 = \psi_1(u_1, \ldots, u_n), \qquad x_2 = \psi_2(u_1, \ldots, u_n), \qquad \ldots,$$
$$x_n = \psi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

qui satisfont aux relations (13) et qui prennent les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ pour $u_1 = u_1^0, \ldots, u_n = u_n^0$. Ce sont les fonctions *inverses* des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; la détermination effective de ces fonctions s'appelle une *inversion*.

Pour calculer les dérivées des fonctions inverses, il suffit d'appliquer les règles générales. Ainsi, dans le cas de deux fonctions

$$u = f(x, y), \qquad v = \varphi(x, y),$$

si l'on considère inversement u et v comme les variables indépendantes, x et y comme les fonctions, on a les deux relations

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$
$$dv = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy,$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} du - \frac{\partial f}{\partial y} dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \qquad dy = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x} du + \frac{\partial f}{\partial x} dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

On a donc les formules

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

27. Tangente à une courbe gauche. — Considérons une courbe C représentée par un système de deux équations

$$(14) \qquad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0; \end{cases}$$

soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point M_0 de cette courbe,

tel que l'un au moins des trois jacobiens

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial y},\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial z},\quad \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

soit différent de zéro, quand on y remplace x, y, z par x_0, y_0, z_0. Supposons, pour fixer les idées, que $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}$ ne soit pas nul pour les coordonnées du point M_0; des équations (14) on peut alors tirer

$$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x),$$

φ et ψ étant des fonctions continues de x se réduisant respectivement à y_0 et z_0 pour $x = x_0$. La tangente à la courbe C au point M_0 est alors représentée par les deux équations

$$\frac{X - x_0}{1} = \frac{Y - y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{Z - z_0}{\psi'(x_0)};$$

quant aux dérivées $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$, elles se calculent au moyen des deux relations

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial F_1}{\partial z}\psi'(x) = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial F_2}{\partial z}\psi'(x) = 0.$$

Faisons dans ces relations $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ et remplaçons $\varphi'(x_0)$ et $\psi'(x_0)$ par $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$ et $\frac{Z - z_0}{X - x_0}$ respectivement; les équations de la tangente peuvent encore s'écrire

$$(15)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0 (Z - z_0) = 0, \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_0 (Z - z_0) = 0, \end{cases}$$

ou

$$\frac{X - x_0}{\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right]_0} = \frac{Y - y_0}{\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)}\right]_0} = \frac{Z - z_0}{\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right]_0}.$$

L'interprétation géométrique du résultat est bien facile. Les équations (14) représentent respectivement deux surfaces S_1 et S_2, dont la courbe C est l'intersection; les équations (15) représentent les deux plans tangents à ces deux surfaces au

point M_0, de sorte que la tangente à la courbe C est la droite d'intersection de ces deux plans tangents.

Les formules deviennent illusoires, lorsque les trois jacobiens écrits plus haut sont nuls à la fois pour les coordonnées x_0, y_0, z_0. Lorsqu'il en est ainsi, les deux équations (15) se réduisent à une seule, et les surfaces S_1, S_2 sont tangentes au point M_0. Dans ce cas, l'intersection de ces deux surfaces se compose en général, comme nous le verrons plus loin, de plusieurs branches distinctes passant par le point M_0.

II. — DÉTERMINANTS FONCTIONNELS.

28. Propriété fondamentale. — Nous venons de voir le rôle important que joue le déterminant fonctionnel dans la théorie des fonctions implicites. Toutes les démonstrations supposent expressément qu'un certain jacobien n'est pas nul identiquement. Si ce jacobien est nul identiquement, il se présente des circonstances toutes différentes, comme il suit du théorème fondamental suivant :

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n fonctions des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour qu'il existe entre ces n fonctions une relation $\Pi(u_1, u_2 \ldots, u_n) = 0$, ne renfermant pas les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il faut et il suffit que le déterminant fonctionnel $\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ soit nul identiquement.

D'abord, cette condition est *nécessaire*. En effet, s'il existe entre les n fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$, une relation $\Pi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$, on en déduit, en différentiant par rapport à chacune des variables x_i successivement, les n équations

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0;$$

comme on ne peut avoir à la fois

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial u_n} = 0,$$



puisque la relation considérée se réduirait à une identité, il faut bien que le déterminant formé par les coefficients de $\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial u_n}$ soit nul.

La condition est aussi *suffisante*. Pour établir ce point, nous nous appuierons sur quelques remarques qui résultent immédiatement des théorèmes généraux :

1° Soient u, v, w trois fonctions des trois variables indépendantes x, y, z, telles que le déterminant $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ ne soit pas nul. On ne peut avoir entre les différentielles totales du, dv, dw aucune relation de la forme

$$\lambda\, du + \mu\, dv + \nu\, dw = 0,$$

à moins que l'on n'ait à la fois $\lambda = \mu = \nu = 0$. En effet, en égalant à zéro les coefficients de dx, dy, dz dans la relation précédente, on a trois équations qui n'admettent pas d'autre solution en λ, μ, ν que $\lambda = \mu = \nu = 0$.

2° Soient ω, u, v, w quatre fonctions des trois variables indépendantes x, y, z, telles que $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ ne soit pas nul. On peut inversement exprimer x, y, z en fonction de u, v, w, et en portant ces valeurs de x, y, z dans ω, on obtient une fonction

$$\omega = \Phi(u, v, w)$$

des trois variables u, v, w. *Si, par un moyen quelconque, on a obtenu entre les différentielles totales* $d\omega$, du, dv, dw, *prises par rapport aux variables indépendantes* x, y, z, *une relation de la forme*

$$d\omega = P\, du + Q\, dv + R\, dw, \tag{16}$$

les coefficients P, Q, R *sont égaux respectivement aux dérivées partielles de* $\Phi(u, v, w)$,

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \qquad R = \frac{\partial \Phi}{\partial w}.$$

On sait, en effet, d'après la règle qui donne la différentielle totale d'une fonction composée (n° 16), que l'on a bien

$$d\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\, dv + \frac{\partial \Phi}{\partial w}\, dw,$$

et il ne peut pas exister entre $d\omega$, du, dv, dw d'autre relation que la précédente de la forme (16), car on en déduirait une égalité de la forme

$$\lambda\, du + \mu\, dv + \nu\, dw = 0,$$

où les coefficients λ, μ, ν ne seraient pas tous nuls; ce qui est impossible, d'après la première remarque.

Il est clair que ces remarques s'étendent à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Cela posé, considérons, pour fixer les idées, un système de quatre fonctions de quatre variables indépendantes

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= F_1(x, y, z, t),\\ Y &= F_2(x, y, z, t),\\ Z &= F_3(x, y, z, t),\\ T &= F_4(x, y, z, t); \end{aligned}\right.$$

le jacobien $\dfrac{D(F_1, F_2, F_3, F_4)}{D(x, y, z, t)}$ est, par hypothèse, identiquement nul, et nous supposerons d'abord que l'un des mineurs du premier ordre, $\dfrac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ par exemple, est différent de zéro. Des trois premières équations (17) on peut imaginer que l'on tire les valeurs de x, y, z en fonction de X, Y, Z, t et, en portant ces expressions dans la dernière formule, on obtient pour T une fonction de X, Y, Z, t,

$$(18)\qquad T = \Phi(X, Y, Z, t);$$

on va démontrer que cette fonction Φ ne contient pas la variable t, ou que l'on a identiquement $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$. Considérons pour cela le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} & dX \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} & dY \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z} & dZ \\ \dfrac{\partial F_4}{\partial x} & \dfrac{\partial F_4}{\partial y} & \dfrac{\partial F_4}{\partial z} & dT \end{vmatrix};$$

si l'on remplace dans ce déterminant dX, dY, dZ, dT par leurs

expressions

$$dX = \frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}dz + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

puis qu'on développe par rapport à dx, dy, dz, dt, on vérifie que les coefficients de ces quatre différentielles sont nuls; les trois premiers sont des déterminants ayant deux colonnes identiques, le coefficient de dt est le déterminant fonctionnel lui-même. On a donc $\Delta = 0$. D'autre part, si l'on développe ce déterminant par rapport aux éléments de la dernière colonne, le coefficient de dT n'est pas nul et on a une relation de la forme

$$dT = P\,dX + Q\,dY + R\,dZ.$$

D'après la remarque de tout à l'heure, le coefficient de dt, dans le second membre, est égal à $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Or, ce second membre ne renferme pas dt; on a donc $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, et la relation (18) est de la forme

$$T = \Phi(X, Y, Z),$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

On peut remarquer qu'il n'existe pas, entre les quatre fonctions X, Y, Z, T, de relation indépendante de x, y, z, t, qui soit distincte de la précédente. En effet, s'il en existait une, en y remplaçant T par $\Phi(X, Y, Z)$, on en déduirait une nouvelle relation de la forme $\Pi(X, Y, Z) = 0$, et l'on devrait avoir

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)} = 0,$$

contrairement à l'hypothèse.

Passons au cas où tous les mineurs du premier ordre du jacobien sont nuls identiquement, l'un au moins des mineurs du deuxième ordre, $\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}$ par exemple, n'étant pas nul. Des deux premières relations (17) on peut tirer x et y en fonction de X, Y, z, t, et les deux dernières deviennent

$$Z = \Phi_1(X, Y, z, t), \qquad T = \Phi_2(X, Y, z, t).$$

Considérons, d'autre part, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & dX \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & dY \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & dZ \end{vmatrix};$$

on démontre, comme tout à l'heure, que ce déterminant est nul et, en le développant par rapport aux éléments de la dernière colonne, on a une relation de la forme

$$dZ = P\,dX + Q\,dY,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = 0.$$

On verra de même que l'on a

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = 0,$$

et il existe, dans ce cas, deux relations distinctes entre les quatre fonctions X, Y, Z, T

$$Z = \Phi_1(X, Y), \qquad T = \Phi_2(X, Y);$$

il n'en existe pas d'autre, distincte de ces deux-là, car on en déduirait une relation entre X et Y et l'on devrait avoir $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = 0$, contrairement à l'hypothèse.

Enfin, si tous les mineurs du deuxième ordre du jacobien étaient nuls, sans que les quatre fonctions X, Y, Z, T se réduisent à des constantes, on verrait de même que trois d'entre elles sont fonctions de la quatrième. Le raisonnement qui vient d'être fait est évidemment général; si le jacobien des n fonctions F_1, $F_2, \ldots, F_n$ de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est nul, ainsi que tous les mineurs à $n - r + 1$ lignes, l'un au moins des mineurs à $n - r$ lignes étant différent de zéro, il y a exactement r relations distinctes entre les n fonctions, et r d'entre elles peuvent s'exprimer au moyen des $n - r$ restantes, entre lesquelles n'existe aucune relation.

Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer la proposition

suivante, qui s'établit de la même façon. Pour que n fonctions de $n+p$ variables indépendantes soient liées par une relation ne contenant pas ces variables, il faut et il suffit que les jacobiens de ces n fonctions, par rapport à n quelconques des variables indépendantes, soient tous nuls. En particulier, pour que deux fonctions $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soient fonctions l'une de l'autre, il faut et il suffit que les dérivées partielles correspondantes $\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial F_2}{\partial x_i}$ soient proportionnelles.

Remarque. — Les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$, qui figurent dans les énoncés précédents, peuvent dépendre en outre de certaines variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$, différentes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si le jacobien $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ est nul identiquement, les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont liées par une ou plusieurs relations ne renfermant pas les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; mais les autres variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$ figureront en général dans ces relations.

Applications. — Le théorème précédent est d'une grande importance en Analyse. Par exemple, il permettrait de démontrer la propriété fondamentale du logarithme, sans se servir de la définition arithmétique. On démontrera, en effet, au début du Calcul intégral, qu'il existe une fonction bien définie pour toutes les valeurs positives de la variable, qui se réduit à zéro pour $x=1$, et dont la dérivée est égale à $\frac{1}{x}$. Soit $f(x)$ cette fonction; posons

$$u=f(x)+f(y), \qquad v=xy,$$

on a

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ y & x \end{vmatrix} = 0.$$

Il existe donc une relation de la forme

$$f(x)+f(y)=\varphi(xy),$$

pour déterminer la fonction φ, il suffit de faire $y=1$, ce qui nous donne $f(x)=\varphi(x)$, et, par suite, puisque x est quelconque,

$$f(x)+f(y)=f(xy).$$

On voit comment la définition précédente aurait conduit aux propriétés

fondamentales des logarithmes, si leur invention n'avait précédé celle du Calcul intégral.

Pour donner une autre application, prenons un système de n équations à n inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_n$,

$$(19) \quad \begin{cases} F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = H_1, \\ F_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) = H_2, \\ \ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = H_n, \end{cases}$$

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ étant des constantes ou des fonctions d'autres variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, qui peuvent aussi figurer dans les fonctions F_i. Lorsque le jacobien $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$ est identiquement nul, il y a entre les n fonctions F_i un certain nombre de relations distinctes, soit $n-k$, de la forme

$$F_{k+1} = \Pi_1(F_1, \ldots, F_k), \ldots, F_n = \Pi_{n-k}(F_1, \ldots, F_k);$$

pour que les équations (19) soient compatibles, il faut évidemment que l'on ait

$$H_{k+1} = \Pi_1(H_1, \ldots, H_k), \ldots, H_n = \Pi_{n-k}(H_1, \ldots, H_k),$$

et, s'il en est ainsi, les n équations (19) se réduisent à k équations distinctes. On a donc les mêmes cas particuliers que dans la discussion d'un système d'équations linéaires.

29. Autre propriété du jacobien. — Le jacobien d'un système de n fonctions de n variables présente des propriétés analogues à celles de la dérivée d'une fonction d'une seule variable. Ainsi le théorème précédent peut être considéré comme une extension du théorème du n° 8.

La formule qui donne la dérivée d'une fonction de fonction peut de même être étendue au jacobien. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ un système de n fonctions des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et supposons que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soient elles-mêmes des fonctions des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On a la formule suivante

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

dont la démonstration résulte immédiatement de la règle de multiplication des déterminants, et de la formule qui donne la dérivée

d'une fonction composée. Écrivons en effet les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

en permutant les lignes et les colonnes du second; le premier élément du produit est égal à

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},$$

c'est-à-dire à $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$, et de même pour les autres.

30. **Hessien.** — Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables x, y, z; on appelle *hessien* le déterminant fonctionnel des trois dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$,

$$h = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix};$$

le hessien se définit de la même façon pour une fonction de n variables, il joue un rôle analogue à celui de la dérivée seconde d'une fonction d'une seule variable. Nous allons établir pour ce déterminant une propriété d'invariance remarquable. Supposons qu'on effectue sur les variables x, y, z une substitution linéaire

$$(19)' \qquad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ z = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, \end{cases}$$

X, Y, Z étant les nouvelles variables, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \gamma''$ des constantes telles que le déterminant de la substitution

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Après cette substitution, la fonction $f(x, y, z)$ se

change en une nouvelle fonction $F(X, Y, Z)$ des trois variables X, Y, Z. Soit $H(X, Y, Z)$ le hessien de cette nouvelle fonction; nous allons démontrer que l'on a identiquement

$$H(X, Y, Z) = \Delta^2 h(x, y, z),$$

x, y, z étant supposés remplacés par leurs expressions (19)' dans $h(x, y, z)$.

On a, en effet,

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(X, Y, Z)} = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)};$$

si nous considérons, pour un moment, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ comme des variables intermédiaires, on peut encore écrire

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}.$$

Or, de la relation $F(X, Y, Z) = f(x, y, z)$, on déduit

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha'' \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' \frac{\partial f}{\partial y} + \beta'' \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = \gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma'' \frac{\partial f}{\partial z},$$

et, par suite,

$$\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = \Delta;$$

on a donc

$$H = \Delta h \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)} = \Delta^2 h,$$

et il est clair que le théorème est général.

Voici une application de cette propriété du hessien. Considérons une forme binaire cubique

$$f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

les coefficients a, b, c, d étant des constantes quelconques; on a, en négligeant un facteur numérique,

$$h = \begin{vmatrix} ax + by & bx + cy \\ bx + cy & cx + dy \end{vmatrix} = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2,$$

de sorte que le hessien est une forme binaire quadratique. Écartons d'abord le cas particulier où le hessien serait un carré parfait; on peut le décomposer en un produit de deux facteurs linéaires distincts

$$h = (mx + ny)(px + qy).$$

Si l'on effectue la substitution linéaire

$$mx + ny = X, \qquad px + qy = Y,$$

la forme $f(x, y)$ se change en une nouvelle forme

$$F(X, Y) = AX^3 + 3BX^2Y + 3CXY^2 + DY^3,$$

dont le hessien

$$H(X, Y) = (AC - B^2)X^2 + (AD - BC)XY + (BD - C^2)Y^2$$

doit se réduire, d'après la propriété d'invariance qui vient d'être démontrée, à un produit de la forme KXY. Les coefficients A, B, C, D doivent donc satisfaire aux deux relations

$$B^2 - AC = 0, \qquad BD - C^2 = 0.$$

Si l'un des deux coefficients B, C était différent de zéro, il en serait de même de l'autre, et l'on aurait

$$A = \frac{B^2}{C}, \qquad D = \frac{C^2}{B},$$

$$F(X, Y) = \frac{1}{BC}(B^3X^3 + 3B^2CX^2Y + 3BC^2XY^2 + C^3Y^3) = \frac{(BX + CY)^3}{BC},$$

de sorte que F(X, Y), et par suite $f(x, y)$, serait un cube parfait. En écartant ce cas exceptionnel, on voit que l'on aura $B = C = 0$, et le polynome F(X, Y) sera réduit à la forme canonique

$$AX^3 + DY^3;$$

la réduction de la forme $f(x, y)$ à la forme canonique n'exige donc que la résolution d'une équation du second degré, celle que l'on obtient en égalant le hessien à zéro. Les variables canoniques X et Y sont précisément les deux facteurs du hessien.

On verrait de la même façon que, lorsque le hessien est un carré parfait, la forme $f(x, y)$ est réductible à la forme $AX^3 + BX^2Y$; lorsque le hessien est identiquement nul, $f(x, y)$ est un cube parfait

$$f(x, y) = (\alpha x + \beta y)^3.$$

III. — CHANGEMENTS DE VARIABLES.

Dans un grand nombre de questions d'Analyse, il arrive fréquemment que l'on est conduit à changer de variables indépendantes. Il faut alors pouvoir exprimer les dérivées prises par rapport aux anciennes variables au moyen des dérivées prises par rapport aux nouvelles variables. Nous avons déjà traité un problème de ce genre à propos de l'inversion. Envisageant maintenant la question à un point de vue plus général, nous allons passer en revue les problèmes qui se présentent le plus fréquemment.

31. Problème I. — *Soit y une fonction de la variable indépendante x. On prend une nouvelle variable indépendante t, liée à x par la relation $x = \varphi(t)$; on propose d'exprimer les dérivées successives de y par rapport à x au moyen de t et des dérivées successives de y par rapport à t.*

Soient $y = f(x)$ la fonction considérée et $F(t) = f[\varphi(t)]$ ce que devient cette fonction quand on a remplacé x par $\varphi(t)$. D'après la règle qui donne la dérivée d'une fonction de fonction, on a

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \varphi'(t),$$

d'où l'on tire

$$y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{\varphi'(t)};$$

ce qui peut s'énoncer ainsi : *pour avoir la dérivée de y par rapport à x, on prend la dérivée de cette fonction par rapport à t, et on la divise par la dérivée de x par rapport à t.*

On obtiendra la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$ en appliquant la règle précédente à l'expression qui vient d'être obtenue pour la dérivée première

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(y'_x)}{\varphi'(t)} = \frac{y''_{t^2}\varphi'(t) - y'_t\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3};$$

une nouvelle application de la même règle donnera la dérivée du

troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}(y''_{x^2})}{\varphi'(t)},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{y'''_{t^3}[\varphi'(t)]^2 - 3y''_{t^2}\varphi'(t)\varphi''(t) + 3y'_t[\varphi''(t)]^2 - y'_t\varphi'(t)\varphi'''(t)}{[\varphi'(t)]^5}.$$

Ces dérivées successives se calculeront, de proche en proche, par l'application de la même règle; d'une manière générale, la dérivée d'ordre n de y par rapport à x s'exprime au moyen de $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, ..., $\varphi^{(n)}(t)$ et des dérivées successives de y par rapport à t, jusqu'à celle d'ordre n. On peut mettre les formules précédentes sous une forme plus symétrique; désignons par dx, dy, d^2x, d^2y, ..., d^nx, d^ny, les différentielles successives de x et de y prises par rapport à la variable t, et par y', y'', ..., $y^{(n)}$ les dérivées successives de y par rapport à x; les formules précédentes peuvent s'écrire

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx}, \\ y'' &= \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}, \\ y''' &= \frac{d^3y\,dx^2 - 3\,d^2y\,dx\,d^2x + 3\,dy(d^2x)^2 - dy\,d^3x\,dx}{dx^5}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

La variable indépendante t, par rapport à laquelle sont prises les différentielles qui figurent dans les seconds membres de ces formules, est absolument quelconque, et l'on passe d'une dérivée à la suivante par la loi de récurrence

$$y^{(n)} = \frac{d[y^{(n-1)}]}{dx},$$

où le second membre est le quotient de deux différentielles.

32. **Applications.** — On se sert de ces formules pour étudier une courbe plane, lorsque les coordonnées d'un point de cette courbe sont exprimées au moyen d'une variable auxiliaire t,

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t);$$

pour étudier cette courbe dans le voisinage d'un de ses points, il faut pouvoir calculer les valeurs des dérivées successives y', y'', ..., de y par rapport à x pour le point considéré. Or les formules précédentes nous donnent précisément ces dérivées exprimées au moyen des dérivées successives des fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$, sans qu'il soit nécessaire d'avoir l'expression explicite de y en fonction de x, ce qui pourrait être pratiquement impossible. Ainsi la première formule

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$$

donne le coefficient angulaire de la tangente; la valeur de y'' intervient dans un élément géométrique important, le *rayon de courbure,* qui a pour expression, comme nous le démontrerons plus loin,

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Pour avoir la valeur de R lorsque les coordonnées x et y sont données en fonction d'un paramètre t, il n'y a qu'à remplacer y' et y'' par les expressions précédentes, et il vient ainsi

$$R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{|dx\,d^2y - dy\,d^2x|};$$

le second membre ne renferme que les dérivées premières et secondes de x et de y par rapport à t.

Voici, au sujet de cette question, une remarque intéressante que j'emprunte au *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. Bertrand (t. I, p. 170). Imaginons qu'en calculant un élément géométrique d'une courbe plane, dont les coordonnées x et y sont supposées exprimées au moyen d'un paramètre t, on ait obtenu l'expression

$$F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots, d^nx, d^ny),$$

toutes les différentielles étant prises par rapport à t. Puisque, par hypothèse, cet élément a une signification géométrique, sa valeur ne doit pas dépendre du choix de la variable indépendante t. Or, si l'on prend $x = t$, on doit faire $dx = dt$, $d^2x = d^3x = \ldots = d^nx = 0$, et l'expression précédente devient

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)});$$

c'est le résultat que l'on aurait obtenu en supposant tout d'abord que l'équation de la courbe considérée est résolue par rapport à y, soit $y = \Phi(x)$. Pour remonter de ce cas particulier au cas où la variable indépendante est quelconque, il suffit de remplacer y', y'', y''', ... par leurs valeurs tirées des formules (20). En effectuant cette substitution dans

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}),$$

on devra donc retrouver l'expression $F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots)$ d'où l'on est parti. S'il n'en est pas ainsi, on pourra affirmer que le résultat obtenu est erroné. Par exemple, l'expression

$$\frac{dx\, d^2y + dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ne peut avoir, pour une courbe plane, de signification géométrique indépendante du choix de la variable; car, si l'on suppose $x = t$, cette expression se réduit à $\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, et, en remplaçant y' et y'' par leurs valeurs tirées des formules (20), on ne retrouve pas l'expression précédente.

33. On se sert aussi fréquemment des formules (20) dans l'étude des équations différentielles. Supposons par exemple que l'on veuille déterminer toutes les fonctions y d'une variable indépendante x qui satisfont à la relation

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0, \tag{21}$$

où n est constant. Prenons une nouvelle variable indépendante t, en posant $x = \cos t$; on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{-\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin t\dfrac{d^2y}{dt^2} - \cos t\dfrac{dy}{dt}}{\sin^3 t},$$

et l'équation (21) devient, après la substitution,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0. \tag{22}$$

Il est facile de trouver toutes les fonctions de t qui satisfont à

cette relation, car on peut l'écrire, en multipliant par $2\frac{dy}{dt}$,

$$2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+2n^2y\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+n^2y^2\right]=0;$$

on doit donc avoir

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+n^2y^2=n^2a^2,$$

a désignant une constante quelconque, et par suite,

$$\frac{dy}{dt}=n\sqrt{a^2-y^2},$$

ou

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{a^2-y^2}}-n=0.$$

Le premier membre est la dérivée de $\arcsin\frac{y}{a}-nt$; il faut donc que cette différence soit égale à une nouvelle constante b, et l'on a

$$y=a\sin(nt+b),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$y=\mathrm{A}\sin nt+\mathrm{B}\cos nt.$$

En revenant à la variable primitive x, on en conclut que toutes les fonctions de x qui vérifient la relation proposée (21) sont comprises dans la formule

$$y=\mathrm{A}\sin(n\arccos x)+\mathrm{B}\cos(n\arccos x),$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

34. Problème II. — *A toute relation entre x et y, les formules de transformation $x=f(t,u)$, $y=\varphi(t,u)$ font correspondre une relation entre t et u. On propose d'exprimer les dérivées de y par rapport à x au moyen de t, u, et des dérivées de u par rapport à t.*

Ce problème se ramène immédiatement au précédent, en remarquant que les formules de transformation

$$x=f(t,u),\qquad y=\varphi(t,u)$$

nous donnent les variables primitives x et y exprimées au moyen

de la variable t, si l'on imagine qu'on ait remplacé u dans ces formules par sa valeur en fonction de t. Il suffira donc d'appliquer la méthode générale, en regardant toutefois x et y comme des fonctions composées de t, la lettre u jouant le rôle d'une fonction intermédiaire. On a d'abord

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}},$$

puis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) : \frac{dx}{dt},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial t}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2}\right] - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \ldots\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)^3}.$$

D'une façon générale, la dérivée $n^{\text{ième}}$ $y^{(n)}$ s'exprime au moyen de t, u, et des dérivées $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nu}{dt^n}$.

Supposons, par exemple, qu'on ait l'équation d'une courbe en coordonnées polaires $\rho = f(\omega)$. Les formules qui donnent les coordonnées rectangulaires d'un point sont les suivantes :

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega;$$

soient ρ', ρ'', ... les dérivées successives de ρ prises par rapport à ω, considérée comme variable indépendante. On tire des formules précédentes

$$\begin{aligned}
dx &= \cos\omega\,d\rho \;\;- \rho\sin\omega\,d\omega,\\
dy &= \sin\omega\,d\rho \;\;+ \rho\cos\omega\,d\omega,\\
d^2x &= \cos\omega\,d^2\rho - 2\sin\omega\,d\omega\,d\rho - \rho\cos\omega\,d\omega^2,\\
d^2y &= \sin\omega\,d^2\rho + 2\cos\omega\,d\omega\,d\rho - \rho\sin\omega\,d\omega^2,
\end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{gathered}
dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2,\\
dx\,d^2y - dy\,d^2x = 2\,d\omega\,d\rho^2 - \rho\,d\omega\,d^2\rho + \rho^2\,d\omega^3.
\end{gathered}$$

L'expression obtenue plus haut du rayon de courbure devient

$$R = \pm\frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

35. Transformations des courbes planes. — Imaginons qu'à tout point m d'un plan on fasse correspondre, d'après une construction déterminée, un autre point M du même plan; si l'on désigne par (x, y) les coordonnées du point m, par (X, Y) les coordonnées du point M, on a entre ces coordonnées deux relations telles que

$$X = f(x, y), \qquad Y = \varphi(x, y). \tag{23}$$

Ces formules définissent une transformation *ponctuelle;* la Géométrie en offre de nombreux exemples, tels que la transformation homographique, la transformation par rayons vecteurs réciproques, etc. Lorsque le point m décrit une courbe c, le point correspondant M décrit une autre courbe C, dont les propriétés peuvent se déduire de celles de la courbe c, et de la nature de la transformation employée. Soient y', y'', ... les dérivées successives de y par rapport à x, et Y', Y'', ... les dérivées successives de Y par rapport à X; pour étudier la courbe C, il est nécessaire de pouvoir exprimer Y', Y'', ... au moyen de x, y, y', y'', ... C'est précisément le problème que nous venons de traiter; on a d'abord

$$Y' = \frac{\dfrac{dY}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'},$$

$$Y'' = \frac{\dfrac{dY'}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}} = \frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'\right)\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \ldots\right) - \ldots}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'\right)^3},$$

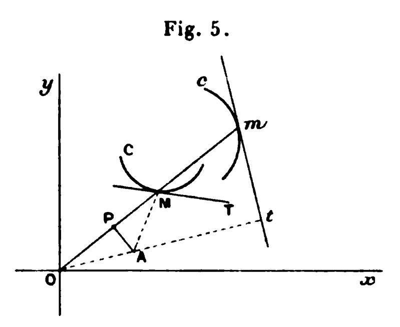
et ainsi de suite. On voit que Y' ne dépend que de x, y, y'; si donc on applique la transformation (23) à deux courbes c, c_1, tangentes au point (x, y), les courbes transformées C, C_1 seront tangentes au point considéré (X, Y). Cette remarque permet de remplacer la courbe c par toute autre courbe tangente à celle-là, quand il s'agit seulement de trouver la tangente à la courbe transformée C.

Considérons, par exemple, la transformation définie par les formules

$$X = \frac{h^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad Y = \frac{h^2 y}{x^2 + y^2},$$

qui n'est autre qu'une transformation par rayons vecteurs réciproques ou *inversion*, avec l'origine pour pôle. Soit m un point d'une courbe c, et M le point correspondant de la courbe C. Pour trouver la tangente à cette courbe C, nous n'avons qu'à appliquer

Fig. 5.



ce résultat de Géométrie élémentaire, que la figure inverse d'une ligne droite est un cercle passant par le pôle d'inversion.

Si nous remplaçons la courbe c par la tangente mt, la figure inverse de mt est un cercle passant par les deux points M et O et dont le centre A est situé sur la perpendiculaire Ot abaissée de l'origine sur mt. La tangente MT à ce cercle est perpendiculaire à AM et les angles Mmt, mMT sont égaux comme complémentaires de l'angle mOt. Les tangentes mt et MT sont donc antiparallèles par rapport au rayon vecteur.

36. **Transformations de contact.** — Les transformations précédentes ne sont pas les plus générales qui changent deux courbes tangentes en deux autres courbes tangentes. Imaginons que de tout point m d'une courbe c on déduise un autre point M par une construction déterminée qui dépend, non seulement du point m, mais de la tangente en ce point. Les formules qui définissent cette transformation sont de la forme

$$X = f(x, y, y'), \qquad Y = \varphi(x, y, y'); \tag{24}$$

et le coefficient angulaire Y' de la tangente à la courbe transformée a pour expression

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y' + \dfrac{\partial f}{\partial y'}y''}.$$

En général, Y' dépend des quatre variables x, y, y', y''; si l'on applique la transformation (24) à deux courbes c, c_1 tangentes en un point (x, y), les courbes correspondantes C, C_1 auront un point commun (X, Y), mais elles ne seront pas tangentes, à moins que y'' n'ait la même valeur pour les deux courbes c et c_1. Pour que les deux courbes C, C_1 soient toujours tangentes, en même temps que les courbes c, c_1, il faut et il suffit que Y' ne dépende pas de y'', c'est-à-dire que les fonctions $f(x, y, y')$ et $\varphi(x, y, y')$ satisfassent à la condition

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right);$$

on dit alors que la transformation considérée est une *transformation de contact*. Il est clair qu'une transformation ponctuelle est un cas particulier des transformations de contact (¹).

Considérons, par exemple, la transformation de Legendre qui consiste à faire correspondre à un point (x, y) d'une courbe c le point M de coordonnées

$$X = y', \qquad Y = xy' - y;$$

on déduit de ces formules

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{xy''}{y''} = x,$$

ce qui montre bien que cette transformation est une transformation de contact. On aura de même

$$Y'' = \frac{dY'}{dX} = \frac{dx}{y''\,dx} = \frac{1}{y''},$$
$$Y''' = \frac{dY''}{dX} = -\frac{y'''}{y''^3},$$

et ainsi de suite. On déduit des formules précédentes

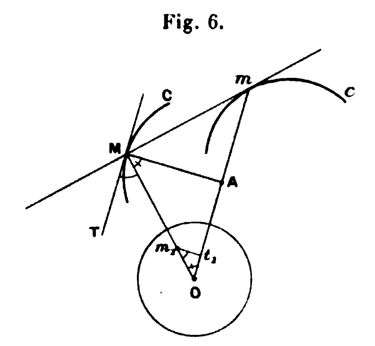
$$x = Y', \qquad y = XY' - Y, \qquad y' = X,$$

(¹) Legendre et Ampère avaient donné de nombreux exemples de ces transformations. M. Sophus Lie a développé la théorie générale dans différents travaux. *Voir*, en particulier, *Geometrie der Berührungstransformationen; voir* aussi Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*.

ce qui prouve que la transformation est réciproque. Toutes ces propriétés s'expliquent aisément si l'on remarque que le point de coordonnées $X = y'$, $Y = xy' - y$ est précisément le pôle de la tangente à la courbe c au point (x, y) par rapport à la parabole $x^2 - 2y = 0$. Or, d'une manière générale, si l'on prend le pôle M de la tangente en m à une courbe c par rapport à une conique directrice Σ, le lieu du point M est une courbe C dont la tangente au point M est précisément la polaire du point m par rapport à Σ. Il y a donc réciprocité entre les deux courbes c et C; d'ailleurs, si l'on remplace la courbe c par une autre courbe c_1 tangente à c au point m, la courbe réciproque C_1 est tangente à la courbe C au point M.

Podaire. — Si d'un point fixe O, pris dans le plan d'une courbe c, on abaisse une perpendiculaire OM sur la tangente au point m à cette courbe, le lieu du pied M de cette perpendiculaire est une courbe C qui est dite *la podaire de la première*. Il serait facile d'obtenir par le calcul les coordonnées du point M, et de vérifier que la transformation ainsi obtenue est une transformation de contact, mais on y arrive plus simplement comme il suit : Considérons, en effet, un cercle γ de rayon R décrit du

Fig. 6.



point O comme centre, et soit m_1 un point pris sur OM et tel que $Om_1 \times OM = R^2$. Le point m_1 est le pôle de la tangente mt par rapport au cercle γ; de sorte que la transformation qui conduit de c à C résulte d'une transformation par polaires réciproques, suivie d'une inversion. Lorsque le point m décrit la courbe c, le point m_1, pôle de mt, décrit une courbe c_1 tangente à la polaire du point m par rapport au cercle γ, c'est-à-dire à la droite $m_1 t_1$ perpendiculaire sur Om. La tangente MT à la courbe C et la tangente $m_1 t_1$ à la courbe c_1 font des angles égaux avec le

rayon vecteur $O m_1 M$; si donc nous menons la normale MA, les angles AMO, AOM sont égaux comme compléments d'angles égaux, et le point A est le milieu du rayon Om. D'où l'on conclut qu'on obtient la normale à la podaire en joignant le point M au milieu de Om.

37. **Transformations homographiques.** — Toute fonction y qui vérifie l'équation $y'' = 0$ est une fonction linéaire de x et inversement. Or, quand on effectue sur x et y une transformation homographique

$$x = \frac{aX + bY + c}{a''X + b''Y + c''}, \qquad y = \frac{a'X + b'Y + c'}{a''X + b''Y + c''},$$

une ligne droite se change en une ligne droite; l'équation $y'' = 0$ doit donc se changer en $\frac{d^2Y}{dX^2} = 0$. Pour le vérifier, nous remarquerons d'abord que la transformation homographique générale peut se ramener à une suite de transformations particulières d'une forme simple. Si les deux coefficients a'' et b'' ne sont pas nuls, nous poserons $X_1 = a''X + b''Y + c''$; comme d'ailleurs on ne peut avoir à la fois $ab'' - a''b = 0$, $a'b'' - b'a'' = 0$, nous poserons en même temps $Y_1 = a'X + b'Y + c'$, en supposant $a'b'' - b'a''$ différent de zéro. Les formules précédentes peuvent alors s'écrire, en remplaçant X et Y par leurs valeurs en fonction de X_1 et Y_1,

$$y = \frac{Y_1}{X_1}, \qquad x = \frac{\alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma}{X_1} = \alpha + \beta\frac{Y_1}{X_1} + \frac{\gamma}{X_1}.$$

On voit donc que la transformation homographique générale peut se ramener à une combinaison de transformations entières telles que

$$x = aX + bY + c, \qquad y = a'X + b'Y + c',$$

et de la transformation particulière

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y}{X}.$$

Quand on effectue cette substitution, on trouve d'abord

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{XY' - Y}{X^2} : \frac{-1}{X^2} = Y - XY',$$

puis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -XY''(-X^2) = X^3 Y''.$$

De même, quand on effectue une transformation homographique entière,

on a

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a' + b'Y'}{a + bY'},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{(ab' - ba')Y''}{(a + bY')^3}.$$

Dans les deux cas, l'équation $y'' = 0$ se change en $Y'' = 0$.

Nous allons considérer maintenant des fonctions de plusieurs variables indépendantes et, afin de fixer les idées, nous exposerons les raisonnements pour une fonction de deux variables.

38. **Problème III**. — *Soit $\omega = f(x, y)$ une fonction des deux variables indépendantes x et y; on prend deux nouvelles variables indépendantes u et v liées aux anciennes par les formules*

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

et l'on se propose d'exprimer les dérivées partielles de ω par rapport aux variables x et y au moyen de u, v, et des dérivées partielles de ω, prises par rapport aux variables u et v.

Soit $\omega = F(u, v)$ ce que devient la fonction $f(x, y)$ après la substitution; la règle de dérivation des fonctions composées nous donne

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v};$$

on peut tirer de ces deux équations $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ et $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ car, si le déterminant $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ était nul, le changement de variables effectué n'aurait aucun sens. On déduira donc des équations précédentes

$$(25) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial x} = A\dfrac{\partial\omega}{\partial u} + B\dfrac{\partial\omega}{\partial v}, \\[2mm] \dfrac{\partial\omega}{\partial y} = C\dfrac{\partial\omega}{\partial u} + D\dfrac{\partial\omega}{\partial v}, \end{cases}$$

A, B, C, D étant des fonctions déterminées de u et v, et ces formules résolvent le problème pour les dérivées du premier ordre. Elles montrent que, *pour obtenir la dérivée d'une fonction par rapport à x, il faut multiplier par A la dérivée prise par rap-*

port à u, par B *la dérivée prise par rapport à v, et ajouter les deux produits;* on opère de même pour avoir la dérivée partielle par rapport à y, en remplaçant A et B par C et D respectivement. Pour calculer les dérivées du second ordre, il suffira d'appliquer aux dérivées du premier ordre la règle exprimée par les formules précédentes; ainsi, on aura

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial \omega}{\partial u} + B\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)$$
$$= A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial \omega}{\partial u} + B\frac{\partial \omega}{\partial v}\right) + B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial \omega}{\partial u} + B\frac{\partial \omega}{\partial v}\right),$$

ou, en développant les calculs,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = A\left(A\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)$$
$$+ B\left(A\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v} + B\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial v}\right),$$

et l'on trouvera de même $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$, et les dérivées suivantes. Dans toutes les dérivations à effectuer, il suffit de remplacer les opérations $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ par les opérations

$$A\frac{\partial}{\partial u} + B\frac{\partial}{\partial v}, \quad C\frac{\partial}{\partial u} + D\frac{\partial}{\partial v}$$

respectivement; tout revient donc au calcul des coefficients A, B, C, D.

Exemple I. — Considérons l'équation

$$(26) \qquad a\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0,$$

où les coefficients a, b, c sont constants; nous allons chercher à ramener cette équation à une forme aussi simple que possible. Observons d'abord que si l'on avait à la fois $a = c = 0$, il serait superflu de chercher à simplifier l'équation; nous pouvons donc supposer que c, par exemple, n'est pas nul. Cela étant, prenons deux nouvelles variables indépendantes u et v,

$$u = x + \alpha y, \qquad v = x + \beta y,$$

α et β étant deux coefficients constants indéterminés. On a aussitôt

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial v},$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \alpha\frac{\partial\omega}{\partial u} + \beta\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

de sorte que l'on a, dans ce cas, $A = B = 1$, $C = \alpha$, $D = \beta$. La méthode générale donne ensuite

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} = \alpha\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \beta\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \alpha^2\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \beta^2\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$

et l'équation proposée devient

$$(a + 2b\alpha + c\alpha^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + 2[a + b(\alpha+\beta) + c\alpha\beta]\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + (a + 2b\beta + c\beta^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = 0.$$

Cela posé, plusieurs cas sont à distinguer :

Premier Cas. — Soit $b^2 - ac > 0$; en prenant pour α et β les deux racines de l'équation

$$a + 2br + cr^2 = 0,$$

l'équation prend la forme simple

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Comme on peut l'écrire $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right) = 0$, on voit que $\frac{\partial\omega}{\partial u}$ doit être une fonction de la seule variable u, soit $f(u)$. Désignons par $F(u)$ une fonction de u dont la dérivée $F'(u) = f(u)$; la dérivée de $\omega - F(u)$ par rapport à u étant nulle, cette différence est indépendante de u, et l'on a par conséquent $\omega = F(u) + \Phi(v)$. La réciproque est immédiate. En revenant aux variables x et y, on en conclut que toutes les fonctions ω qui satisfont à l'équation (26) sont de la forme

$$\omega = F(x + \alpha y) + \Phi(x + \beta y),$$

les fonctions F et Φ étant arbitraires. Par exemple, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2},$$

qui se présente dans la théorie des cordes vibrantes, est

$$\omega = f(x + ay) + \varphi(x - ay).$$

Deuxième Cas. — Soit $b^2 - ac = 0$. En prenant α égal à la racine double de l'équation $a + 2br + cr^2 = 0$, et prenant β différent de α, le coefficient de $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v}$ sera nul, car il est égal à $a + b\alpha + \beta(b + c\alpha)$; l'équation se réduira donc à $\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0$. On voit que ω doit être une fonction linéaire de v, $\omega = vf(u) + \varphi(u)$, les fonctions $f(u)$ et $\varphi(u)$ étant quelconques; en revenant aux variables x et y, l'expression de ω est

$$\omega = (x + \beta y) f(x + \alpha y) + \varphi(x + \alpha y),$$

ce qui peut s'écrire

$$\omega = [x + \alpha y + (\beta - \alpha) y] f(x + \alpha y) + \varphi(x + \alpha y),$$

ou encore

$$\omega = y \mathrm{F}(x + \alpha y) + \Phi(x + \alpha y).$$

Troisième Cas. — Si $b^2 - ac < 0$, la transformation précédente ne s'applique plus, à moins d'introduire des variables imaginaires. On peut alors déterminer α et β de telle façon que l'on ait

$$a + 2b\alpha + c\alpha^2 = a + 2b\beta + c\beta^2,$$
$$a + b(\alpha + \beta) + c\alpha\beta = 0,$$

ce qui donne

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{c}, \qquad \alpha\beta = \frac{2b^2 - ac}{c^2};$$

l'équation du second degré, qui a pour racines α et β,

$$r^2 + \frac{2b}{c} r + \frac{2b^2 - ac}{c^2} = 0$$

a, en effet, ses racines réelles. L'équation proposée devient alors

$$\Delta_2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0;$$

cette équation $\Delta_2 \omega = 0$, connue sous le nom d'*équation de Laplace,* joue un rôle fondamental dans un grand nombre de questions d'Analyse et de Physique mathématique.

Exemple II. — Cherchons ce que devient l'équation précédente en posant $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$. On a

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sin\varphi,$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \rho \sin\varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \rho \cos\varphi,$$

et, en résolvant par rapport à $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \cos\varphi\,\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \sin\varphi\,\frac{\partial\omega}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}.$$

Il vient ensuite

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} &= \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos\varphi\,\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right) - \frac{\sin\varphi}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\,\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right),\\ &= \cos^2\varphi\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho\,\partial\varphi}\\ &\quad + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\rho};\end{aligned}$$

on a une expression analogue pour $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$, et, en les ajoutant, on trouve

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\rho}.$$

39. **Autre méthode.** — La méthode précédente est la plus pratique, lorsque la fonction, dont on cherche les dérivées partielles, n'est pas connue; mais, dans certaines questions, il est plus avantageux d'employer le procédé suivant :

Soit $z = f(x, y)$ une fonction des deux variables indépendantes x et y; si l'on suppose x, y et z exprimées au moyen de deux variables auxiliaires u et v, on a entre les différentielles totales dx, dy, dz la relation

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

qui est équivalente aux deux relations distinctes

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v},$$

d'où l'on tirera $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, comme dans la première méthode. Mais, pour calculer les dérivées suivantes, nous continuerons à appliquer la même règle; ainsi, pour cal-

culer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, nous partirons de l'identité

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, dy,$$

qui est équivalente aux deux relations

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

où l'on suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}$ ait été remplacée par son expression déjà calculée. On trouvera de même $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en partant de l'identité

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy,$$

et les deux valeurs obtenues pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ doivent être identiques, ce qui fournit une vérification des calculs. Les dérivées d'ordre supérieur se calculent de la même façon.

Application aux surfaces. — On se sert du calcul précédent dans l'étude des surfaces. Supposons que les coordonnées d'un point d'une surface S soient exprimées en fonction de deux paramètres variables u, v, par les formules

$$(27) \qquad x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v);$$

on obtiendrait l'équation de cette surface en éliminant les variables u et v entre les trois équations (27), mais on peut se proposer d'étudier directement les propriétés de la surface S sur ces équations elles-mêmes, sans effectuer l'élimination qui peut être pratiquement impossible. Remarquons d'abord que les trois jacobiens $\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$, $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$, $\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)}$ ne peuvent être nuls à la fois, car l'élimination de u et v conduirait à deux relations distinctes entre x, y, z et le point de coordonnées (x, y, z) décrirait une

courbe et non une surface. Soit, pour fixer les idées,

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \neq 0;$$

des deux premières équations (27) on peut alors imaginer qu'on ait tiré u et v et, en les portant dans la troisième, on aurait l'équation de la surface $z = F(x, y)$. Pour étudier cette surface dans le voisinage d'un point, il faut pouvoir calculer les dérivées partielles $p, q, r, s, t, \ldots$ de cette fonction $F(x, y)$ au moyen des paramètres u, v. Les dérivées premières p et q s'obtiendront au moyen de la relation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

qui se dédouble en deux équations

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = p\dfrac{\partial f}{\partial u} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = p\dfrac{\partial f}{\partial v} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, \end{cases}$$

permettant de calculer p et q. L'équation du plan tangent s'obtiendra en portant ces valeurs de p et de q dans l'équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

ce qui conduit à l'équation

$$(29) \quad (X - x)\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + (Y - y)\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + (Z - z)\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0.$$

Les relations (28) ont une signification géométrique facile à retenir; elles expriment que le plan tangent contient les tangentes aux deux courbes situées sur la surface, que l'on obtient en laissant v constant et faisant varier u, puis en laissant u constant et faisant varier v [1].

Ayant obtenu p et q, $p = f_1(u, v)$, $q = f_2(u, v)$, on obtiendra

---

[1] On peut aussi arriver à l'équation du plan tangent par un raisonnement direct. Toute courbe située sur la surface est définie par une relation entre u et v, soit $v = \Pi(u)$, et la tangente à cette courbe a pour équations

$$\frac{X - x}{\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\Pi'(u)} = \frac{Y - y}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Pi'(u)} = \frac{Z - z}{\dfrac{\partial\psi}{\partial u} + \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\Pi'(u)}.$$

L'élimination de $\Pi'(u)$ conduit à l'équation du plan tangent (29).

r, s, t au moyen des égalités

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

dont chacune fournit deux relations distinctes, et ainsi de suite.

40. Problème IV. — *Si l'on pose*

$$(30)\qquad x = f(u, v, w), \qquad y = \varphi(u, v, w), \qquad z = \psi(u, v, w),$$

ces formules font correspondre à toute relation entre les variables x, y, z, une nouvelle relation entre u, v, w. On se propose d'exprimer les dérivées partielles de z par rapport aux variables x, y, au moyen de u, v, w, et des dérivées partielles de w par rapport aux variables u et v.

Ce problème se ramène à celui qui vient d'être traité. Si l'on suppose en effet que w ait été remplacé dans les formules (30) par une fonction de u et de v, on a les expressions de x, y, z au moyen des deux paramètres u et v, et il suffit de reprendre la méthode précédente en considérant f, φ, ψ comme des fonctions composées de u, v, la variable w étant traitée comme une fonction intermédiaire de u et v. On a, par exemple, pour calculer les dérivées du premier ordre p, q, les deux relations

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u} = p\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) + q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} = p\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) + q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

et de même pour les dérivées suivantes.

En langage géométrique, le problème précédent peut s'énoncer comme il suit : A tout point m de l'espace, de coordonnées (x, y, z), on fait correspondre, par une construction déterminée, un autre point M, de coordonnées X, Y, Z. Lorsque le point m décrit une surface S, le point M décrit une surface Σ, dont on se propose de déduire les propriétés de celles de la première.

Les formules qui définissent la transformation sont de la forme

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = \varphi(x, y, z), \qquad Z = \psi(x, y, z);$$

soient

$$z = F(x, y), \qquad Z = \Phi(X, Y)$$

les équations des deux surfaces S, Σ. Il s'agit d'exprimer les dérivées partielles P, Q, R, S, T, ... de la fonction $\Phi(X, Y)$ au moyen de x, y, z et des dérivées partielles p, q, r, s, t, ... de la fonction $F(x, y)$. C'est précisément, à la différence de notations près, le problème que nous venons de traiter.

Les dérivées premières P et Q ne dépendent que de x, y, z, p, q, de sorte que la transformation change deux surfaces tangentes en deux surfaces tangentes. Mais ce ne sont pas les transformations les plus générales qui jouissent de cette propriété, comme on le verra par les exemples ci-dessous.

41. Transformation de Legendre. — Soit $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface S; au point $m(x, y, z)$ de cette surface, faisons correspondre le point M, de coordonnées X, Y, Z, en posant

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = px + qy - z,$$

et soit $Z = \Phi(X, Y)$ l'équation de la surface Σ décrite par le point M. Si l'on imagine qu'on ait remplacé z, p, q par f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, on a les expressions des trois coordonnées du point M en fonction des deux variables indépendantes x et y.

Désignons encore par P, Q, R, S, T les dérivées partielles de la fonction $\Phi(X, Y)$; la relation

$$dZ = P\,dX + Q\,dY$$

nous donne

$$p\,dx + q\,dy + x\,dp + y\,dq - dz = P\,dp + Q\,dq$$

ou

$$x\,dp + y\,dq = P\,dp + Q\,dq.$$

Supposons que, pour la surface considérée, p et q ne soient pas fonctions l'une de l'autre, de telle sorte qu'on ne puisse avoir une identité de la forme $\lambda\,dp + \mu\,dq = 0$ sans que l'on ait, à la fois, $\lambda = \mu = 0$. On déduit alors de la relation qui précède

$$P = x, \qquad Q = y.$$

Pour avoir R, S, T, nous partirons de même des relations

$$dP = R\,dX + S\,dY,$$
$$dQ = S\,dX + T\,dY,$$

qui deviennent ici, en remplaçant X, Y, P, Q par leurs valeurs,

$$dx = R(r\,dx + s\,dy) + S(s\,dx + t\,dy),$$
$$dy = S(r\,dx + s\,dy) + T(s\,dx + t\,dy);$$

on en tire

$$Rr + Ss = 1, \qquad Rs + St = 0,$$
$$Sr + Ts = 0, \qquad Ss + Tt = 1,$$

et, par suite,

$$R = \frac{t}{rt - s^2}, \qquad S = \frac{-s}{rt - s^2}, \qquad T = \frac{r}{rt - s^2}.$$

Des formules précédentes on déduit inversement

$$x = P, \qquad y = Q, \qquad z = PX + QY - Z, \qquad p = X, \qquad q = Y,$$

$$r = \frac{T}{RT - S^2}, \qquad s = \frac{-S}{RT - S^2}, \qquad t = \frac{R}{RT - S^2},$$

ce qui prouve que la transformation est réciproque. D'ailleurs, c'est bien une transformation de contact, puisque X, Y, Z, P, Q ne dépendent que de x, y, z, p, q. Ces propriétés deviennent intuitives, si l'on observe que les formules définissent une transformation par polaires réciproques, relativement au paraboloïde

$$x^2 + y^2 - 2z = 0.$$

Remarque. — Les expressions de R, S, T deviennent infinies lorsque, en tous les points de la surface décrite par le point m, on a la relation $rt - s^2 = 0$. Dans ce cas, le point M décrit une courbe, et non une surface, car on a

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \frac{D(p, q)}{D(x, y)} = rt - s^2 = 0$$

et de même

$$\frac{D(X, Z)}{D(x, y)} = \frac{D(p, px + qy - z)}{D(x, y)} = y(rt - s^2) = 0.$$

C'est précisément le cas qu'on a laissé de côté.

42. **Transformation d'Ampère.** — Les notations restant les mêmes que dans l'exemple précédent, posons

$$X = x, \qquad Y = q, \qquad Z = qy - z;$$

la relation

$$dZ = P\,dX + Q\,dY$$

devient

$$q\,dy + y\,dq - dz = P\,dx + Q\,dq;$$

ou

$$y\,dq - p\,dx = P\,dx + Q\,dq;$$

on a donc

$$P = -p, \qquad Q = y,$$

et inversement

$$x = X, \qquad y = Q, \qquad z = QY - Z, \qquad p = -P, \qquad q = Y,$$

de sorte que la transformation est bien une transformation de contact et réciproque. La relation

$$dP = R\,dX + S\,dY$$

donne ensuite

$$-r\,dx - s\,dy = R\,dx + S(s\,dx + t\,dy),$$

c'est-à-dire

$$R + Ss = -r, \qquad St = -s,$$

et l'on en tire

$$R = \frac{s^2 - rt}{t}, \qquad S = -\frac{s}{t};$$

en partant de la relation $dQ = S\,dX + T\,dY$, on trouvera de même

$$T = \frac{1}{t}.$$

Proposons-nous, comme application de ces formules, de trouver toutes les fonctions $f(x, y)$ qui satisfont à la relation $rt - s^2 = 0$. Soient S la surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$, Σ la surface transformée, et $Z = \Phi(X, Y)$ l'équation de Σ. D'après la formule qui donne R, on doit avoir

$$R = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = 0,$$

et Φ doit être une fonction linéaire de X,

$$Z = X\varphi(Y) + \psi(Y),$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires de Y. On en déduit

$$P = \varphi(Y), \qquad Q = X\varphi'(Y) + \psi'(Y),$$

et les coordonnées (x, y, z) d'un point de la surface S s'expriment inversement en fonction des deux variables X, Y, par les formules

$$x = X, \qquad y = X\varphi'(Y) + \psi'(Y), \qquad z = Y[X\varphi'(Y) + \psi'(Y)] - X\varphi(Y) - \psi(Y);$$

l'équation de cette surface s'obtiendra en éliminant X et Y ou, ce qui revient au même, en éliminant le paramètre variable α entre les deux

équations

$$z = \alpha y - x\varphi(\alpha) - \psi(\alpha),$$
$$0 = y \quad - x\varphi'(\alpha) - \psi'(\alpha),$$

dont la première représente un plan mobile dépendant du paramètre α, tandis que la seconde s'obtient en différentiant la première par rapport à ce paramètre. On obtient ainsi des *surfaces développables*, qui seront étudiées plus tard.

43. Équation du potentiel en coordonnées curvilignes. — Les calculs qu'exige un changement de variables peuvent, dans bien des cas, être simplifiés par différents artifices. Je prendrai pour exemple l'équation du potentiel en coordonnées curvilignes orthogonales [1]. Soient

$$F(x, y, z) = \rho,$$
$$F_1(x, y, z) = \rho_1,$$
$$F_2(x, y, z) = \rho_2,$$

les équations de trois familles de surfaces formant un système triple orthogonal, deux surfaces quelconques appartenant à deux familles différentes se coupant toujours à angle droit; si l'on résout ces trois équations, on en tire x, y, z en fonction des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2,

$$(31) \qquad \begin{cases} x = \varphi(\rho, \rho_1, \rho_2), \\ y = \varphi_1(\rho, \rho_1, \rho_2), \\ z = \varphi_2(\rho, \rho_1, \rho_2); \end{cases}$$

ρ, ρ_1, ρ_2 forment un système de coordonnées curvilignes orthogonales.

Puisque les trois surfaces précédentes sont orthogonales, les tangentes aux courbes d'intersection de ces surfaces prises deux à deux doivent former un trièdre trirectangle; il faut donc que l'on ait

$$(32) \qquad \mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1} = 0, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2} = 0, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2} = 0,$$

le signe S indiquant que l'on doit remplacer φ par φ_1, puis par φ_2. Ces conditions d'orthogonalité peuvent encore s'écrire sous la forme équivalente

$$(33) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\rho}{\partial y}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial y} + \dfrac{\partial\rho}{\partial z}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial x} + \ldots = 0, \qquad \dfrac{\partial\rho_1}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial x} + \ldots = 0. \end{cases}$$

[1] LAMÉ, *Traité des coordonnées curvilignes*. Voir aussi BERTRAND, *Traité de Calcul différentiel*, tome I, p. 181.

Cela posé, cherchons ce que devient l'équation du potentiel

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

avec les variables ρ, ρ_1, ρ_2; on a d'abord

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x},$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = {} & \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2}\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right)^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \rho_1}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \rho_2}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} \\ & + \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

En ajoutant les trois équations analogues, les dérivées du second ordre telles que $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \rho_1}$ disparaissent dans la somme, en vertu des relations (33), et il reste

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = {} & \Delta_1(\rho)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \Delta_1(\rho_1)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2} + \Delta_1(\rho_2)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2} \\ & + \Delta_2(\rho)\frac{\partial V}{\partial \rho} + \Delta_2(\rho_1)\frac{\partial V}{\partial \rho_1} + \Delta_2(\rho_2)\frac{\partial V}{\partial \rho_2},\end{aligned}\right.$$

Δ_1 et Δ_2 désignant les *paramètres différentiels* de Lamé

$$\Delta_1(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2, \qquad \Delta_2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Les paramètres différentiels du premier ordre $\Delta_1(\rho)$, $\Delta_1(\rho_1)$, $\Delta_1(\rho_2)$ se calculent facilement. Des relations (31) on tire

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} &= 1, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} &= 0,\end{aligned}$$

et, en multipliant ces trois équations par $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}$, et ajoutant,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \rho}}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}\right)^2};$$

on calcule de même $\frac{\partial\rho}{\partial y}$ et $\frac{\partial\rho}{\partial z}$, et il vient

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}\right)^2}.$$

Si donc l'on pose

$$H=\mathrm{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2,\qquad H_1=\mathrm{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\right)^2,\qquad H_2=\mathrm{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\right)^2,$$

le signe S indiquant toujours qu'on doit remplacer φ par φ_1, puis par φ_2, et ajouter, on a

$$\Delta_1(\rho)=\frac{1}{H},\qquad \Delta_1(\rho_1)=\frac{1}{H_1},\qquad \Delta_1(\rho_2)=\frac{1}{H_2}.$$

Lamé obtient les expressions de $\Delta_2(\rho)$, $\Delta_2(\rho_1)$, $\Delta_2(\rho_2)$ en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, par un calcul assez pénible, que l'on peut abréger comme il suit : Dans l'identité (34),

$$\Delta_2V=\frac{1}{H}\frac{\partial^2V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2V}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2V}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial V}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial V}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial V}{\partial\rho_2},$$

faisons successivement $V=x$, $V=y$, $V=z$; nous avons les trois relations

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}=0,$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_2}=0,$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_2}=0,$$

qu'il n'y a plus qu'à résoudre par rapport à $\Delta_2(\rho)$, $\Delta_2(\rho_1)$, $\Delta_2(\rho_2)$. On en tire, par exemple, en les multipliant par $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}$, et ajoutant,

$$\Delta_2(\rho)H+\frac{1}{H}\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2}=0.$$

D'ailleurs on a

$$\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial\rho},$$

et, en différentiant la première des relations (32) par rapport à ρ_1, il vient

$$\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}=-\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\,\partial\rho_1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}.$$

On a de même

$$S\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\Delta_2(\rho) &= -\frac{1}{2H^2}\frac{\partial H}{\partial\rho} + \frac{1}{2HH_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho} + \frac{1}{2HH_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho}\\ &= -\frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\log\left(\frac{H}{H_1H_2}\right)\right].\end{aligned}$$

En posant $H = \frac{1}{h^2}$, $H_1 = \frac{1}{h_1^2}$, $H_2 = \frac{1}{h_2^2}$, cette formule devient

$$\Delta_2(\rho) = h^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\log\frac{h}{h_1h_2}\right),$$

et l'on a de même

$$\Delta_2(\rho_1) = h_1^2\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\log\frac{h_1}{hh_2}\right), \qquad \Delta_2(\rho_2) = h_2^2\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\log\frac{h_2}{hh_1}\right).$$

La formule (34) devient donc en définitive

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = h^2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} &+ h_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_1^2} + h_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_2^2}\\ &+ h^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\log\frac{h}{h_1h_2}\right)\frac{\partial V}{\partial\rho} + h_1^2\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\log\frac{h_1}{hh_2}\right)\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\\ &+ h_2^2\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\log\frac{h_2}{hh_1}\right)\frac{\partial V}{\partial\rho_2},\end{aligned}\right.$$

ou, sous une forme plus condensée,

$$\Delta_2 V = hh_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{h}{h_1h_2}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{h_1}{hh_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{h_2}{hh_1}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right)\right].$$

Appliquons cette formule aux coordonnées polaires. Les formules de transformation sont, en remplaçant ρ_1 et ρ_2 par θ et φ,

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\theta,$$

et les coefficients h, h_1, h_2 ont les valeurs suivantes :

$$h = 1 \qquad h_1 = \frac{1}{\rho}, \qquad h_2 = \frac{1}{\rho\sin\theta};$$

la formule générale devient donc

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\right]$$

ou, en développant,

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cot \theta}{\rho^2} \frac{\partial V}{\partial \theta},$$

comme il est facile de le vérifier directement.

EXERCICES.

1. En posant $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x + y + z$, $w = xy + yz + zx$, on a identiquement $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = 0$. Trouver la relation qui lie u, v, w.

Généralisation.

2. Soient

$$u_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}};$$

on a

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)^{1+\frac{n}{2}}}.$$

3. Si l'on pose

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\varphi_1, \\ x_2 &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\ x_3 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_n, \end{aligned}$$

on a

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} = (-1)^n \sin^n\varphi_1 \sin^{n-1}\varphi_2 \sin^{n-2}\varphi_3 \ldots \sin^2\varphi_{n-1} \sin\varphi_n.$$

4. Vérifier directement que la fonction $z = F(x, y)$ définie par les deux équations

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + y f(\alpha) + \varphi(\alpha), \\ 0 &= x + y f'(\alpha) + \varphi'(\alpha), \end{aligned}$$

où α est une variable auxiliaire, satisfait à la relation $rt - s^2 = 0$, quelles que soient les fonctions $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$.

5. Vérifier de même que toute fonction implicite $z = F(x, y)$, définie par une équation de la forme

$$y = x\varphi(z) + \psi(z),$$

satisfait, quelles que soient les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, à la relation

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0.$$

6. La fonction $z = F(x, y)$, définie par les deux équations

$$z\varphi'(\alpha) = [y - \varphi(\alpha)]^2, \qquad (x + \alpha)\varphi'(\alpha) = y - \varphi(\alpha),$$

où α est une variable auxiliaire, satisfait à la relation $pq = z$, quelle que soit $\varphi(\alpha)$.

7. La fonction $z = F(x, y)$, définie par les deux équations

$$[z - \varphi(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2), \qquad [z - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = \alpha x^2,$$

satisfait de même à la relation $pq = xy$.

8. *Formule de Lagrange.* — Soit y une fonction implicite des deux variables x et α définie par la relation

$$y = \alpha + x\varphi(y),$$

et $u = f(y)$ une fonction quelconque de y. On a, d'une façon générale,

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}\left[\varphi(y)^n \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right].$$

(LAPLACE.)

R. On s'appuie sur les propriétés exprimées par les deux relations

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right], \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha},$$

où u est une fonction quelconque de y, et $F(u)$ une fonction quelconque de u, et l'on démontre que, si la formule est vraie pour une valeur de n, elle est encore vraie pour la valeur $n + 1$.

En supposant $x = 0$, y se réduit à α, u à $f(\alpha)$ et la dérivée d'ordre n de u par rapport à x devient

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}[\varphi(\alpha)^n f'(\alpha)].$$

9. Si l'on pose $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, les fonctions $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ satisfaisant aux conditions

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

on a identiquement

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

10. Si la fonction $V(x, y, z)$ satisfait à l'équation

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

il en est de même de la fonction

$$\frac{1}{r} V\left(k^2 \frac{x}{r^2}, k^2 \frac{y}{r^2}, k^2 \frac{z}{r^2}\right),$$

où k est une constante, et où l'on a posé $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

[Lord Kelvin.]

11. Soient $V(x, y, z)$ et $V_1(x, y, z)$ deux intégrales de l'équation $\Delta_2 V = 0$; la fonction

$$U = V(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2) V_1(x, y, z)$$

satisfait à l'équation

$$\Delta_2 \Delta_2 U = 0.$$

12. Que devient l'équation

$$(x - x^2) y'' + (1 - 3x^2) y' - xy = 0,$$

quand on fait le changement de variable $x = \sqrt{1 - t^2}$?

13. Même question pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z = 0,$$

quand on fait le changement de variables $x = uv$, $y = \frac{1}{v}$?

14. *Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une fonction des $2n$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_n$, homogène et du second degré par rapport aux variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si l'on pose

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = p_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} = p_n,$$

et qu'on prenne $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pour variables indépendantes à la place de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, la fonction φ se change en une fonction

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Démontrer les formules

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_k} = u_k, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

15. En chaque point M d'une surface S, on mène la normale MN dont

on prend le point de rencontre N avec un plan fixe P, puis on porte sur la perpendiculaire au plan P menée par ce point N une longueur $Nm = NM$. Trouver le plan tangent à la surface décrite par le point m.

La transformation précédente est une transformation de contact. Étudier la transformation inverse.

16. A partir des différents points d'une surface donnée S, on porte, sur les normales à cette surface, une longueur constante l; chercher le plan tangent à la surface Σ, lieu des points ainsi obtenus (*surfaces parallèles*).

Même problème pour une courbe plane.

17. *Étant donnés une surface S et un point fixe O, on joint le point O à un point quelconque M de la surface S; par le rayon OM et la normale MN à la surface S au point M on fait passer un plan OMN. Dans ce plan OMN on élève, par le point O, une perpendiculaire au rayon OM sur laquelle on porte une longueur $OP = OM$. Le point P décrit une surface Σ, qui est dite l'*apsidale* de la première. Trouver le plan tangent à cette surface.

La transformation précédente est une transformation de contact, et il y a réciprocité entre les surfaces S et Σ. Lorsqu'on prend pour la surface S un ellipsoïde, le point O étant au centre, la surface Σ est la surface des ondes.

18. **Invariants différentiels d'Halphen.* — L'équation différentielle

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{d^5y}{dx^5} - 45\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0$$

ne change pas de forme quand on effectue sur les variables x, y, une transformation homographique quelconque (n° 37).

19. Dans l'expression

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

où P, Q, R sont des fonctions quelconques de x, y, z, on pose

$$x = f(u, v, w), \qquad y = \varphi(u, v, w), \qquad z = \psi(u, v, w),$$

u, v, w étant de nouvelles variables; elle se change en une expression de même forme

$$P_1\,du + Q_1\,dv + R_1\,dw,$$

P_1, Q_1, R_1 étant des fonctions de u, v, w. Vérifier que l'on a identiquement

$$H_1 = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\,H,$$

en posant

$$H = P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

$$H_1 = P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial w} - \frac{\partial R_1}{\partial v}\right) + Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial u} - \frac{\partial P_1}{\partial w}\right) + R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial v} - \frac{\partial Q_1}{\partial u}\right).$$

20. **Covariant bilinéaire.* — Soit θ_d une forme linéaire de différentielles

$$\theta_d = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On considère l'expression

$$H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k$$

où l'on a posé

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i},$$

et où figurent deux systèmes de différentielles d, δ. Si l'on fait un changement de variables quelconque

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

l'expression θ_d se change en une expression de même forme

$$\theta'_d = Y_1\,dy_1 + \ldots + Y_n\,dy_n,$$

où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$; soient de même

$$a'_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i}$$

et

$$H' = \sum_i\sum_k a'_{ik}\,dy_i\,\delta y_k.$$

On a identiquement $H = H'$, pourvu qu'on remplace dx_i et δx_k par

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_2}dy_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n}dy_n,$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_2}\delta y_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_n}\delta y_n$$

respectivement. On appelle H un *covariant bilinéaire* de θ_d.

21. **Paramètres différentiels de Beltrami.* — Étant donnée une expression

$$E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2,$$

où E, F, G sont des fonctions des variables x, y, on fait un changement de variables $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, et l'on obtient une expression de même forme

$$E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2,$$

où E_1, F_1, G_1 sont des fonctions de u et de v. Soient $\theta(x, y)$ une fonction quelconque des variables x, y, et $\theta_1(u, v)$ ce qu'elle devient par ce changement de variables. On a identiquement

$$\frac{G\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} + E\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2}{EG - F^2} = \frac{G_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)^2 - 2F_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\frac{\partial\theta_1}{\partial v} + E_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)^2}{E_1G_1 - F_1^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G\frac{\partial\theta}{\partial x} - F\frac{\partial\theta}{\partial y}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E\frac{\partial\theta}{\partial y} - F\frac{\partial\theta}{\partial x}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u} - F_1\frac{\partial\theta_1}{\partial v}}{\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_1\frac{\partial\theta_1}{\partial v} - F_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u}}{\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}}\right).$$

22. *Schwarzien.* — Si l'on pose $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, x étant une fonction de t et a, b, c, d étant des constantes quelconques, on a

$$\frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2,$$

$x', x'', x''', y', y'', y'''$ désignant les dérivées par rapport à la variable t.

23. *Soient u et v deux fonctions quelconques des deux variables indépendantes x et y. On pose

$$U = \frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''}, \qquad V = \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''},$$

$a, b, c, \ldots, c''$ étant des constantes. Démontrer les formules

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}}{(u, v)} = \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial x}}{(U, V)},$$

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)}{(u, v)}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)}{(U, V)},$$

et les formules analogues obtenues en permutant x et y; on pose

$$(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (U, V) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}.$$

[Goursat et Painlevé, *Comptes rendus*, 1887.]

CHAPITRE III.

FORMULE DE TAYLOR. — APPLICATIONS ÉLÉMENTAIRES. MAXIMA ET MINIMA.

I. — FORMULE ET SÉRIE DE TAYLOR. — GÉNÉRALITES.

44. Formule générale. — Lorsque $f(x)$ est un polynome entier de degré n, on démontre, dans tous les Cours d'Algèbre, que l'on a, quels que soient les nombres a et h,

$$(1)\quad f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a);$$

le développement s'arrête de lui-même, puisque toutes les dérivées sont nulles, à partir de la $(n+1)^{\text{ième}}$. Si l'on voulait appliquer cette formule à une fonction $f(x)$, différente d'un polynome, le second membre se composerait d'un nombre illimité de termes; pour savoir la valeur qu'il convient d'attribuer au développement que l'on obtiendrait ainsi, nous allons d'abord chercher une expression de la différence

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1.2}f''(a)-\ldots-\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a),$$

en supposant seulement que la fonction $f(x)$ est continue, ainsi que les n premières dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)$, lorsque x varie de a à $a+h$, et que $f^{(n)}(x)$ admet elle-même une dérivée $f^{(n+1)}(x)$ dans cet intervalle. Les nombres a et h étant donnés, posons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots\\ +\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a)+\frac{h^p}{1.2\ldots n.p}\,\mathrm{P},\end{aligned}\right.$$

p étant un nombre entier positif quelconque. Le nombre P étant

défini par cette égalité, considérons la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(a+h) - f(x) - \frac{a+h-x}{1} f'(x) - \frac{(a+h-x)^2}{1.2} f''(x) - \ldots$$
$$- \frac{(a+h-x)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) - \frac{(a+h-x)^p}{1.2\ldots n.p} \mathrm{P};$$

on a évidemment

$$\varphi(a) = 0, \qquad \varphi(a+h) = 0,$$

la première relation résultant de la formule (2) qui définit le nombre P. Or il résulte des hypothèses faites sur $f(x)$ que la fonction $\varphi(x)$ admet une dérivée dans l'intervalle $(a, a+h)$; l'équation $\varphi'(x) = 0$ doit donc avoir, d'après le théorème de Rolle, une racine $a + \theta h$ comprise dans cet intervalle, θ désignant un nombre positif compris entre zéro et un. Si l'on calcule $\varphi'(x)$, il se produit des réductions évidentes, et il reste

$$\varphi'(x) = \frac{(a+h-x)^{p-1}}{1.2\ldots n} [\mathrm{P} - (a+h-x)^{n-p+1} f^{(n+1)}(x)].$$

Le premier facteur $(a+h-x)^{p-1}$ ne peut s'annuler pour une valeur de x différente de $a+h$; il faut donc que l'on ait

$$\mathrm{P} = h^{n-p+1}(1-\theta)^{n-p+1} f^{(n+1)}(a+\theta h), \qquad \text{où} \qquad 0 < \theta < 1,$$

et en remplaçant P par cette valeur dans formule (2), il vient

$$(3) \quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) + \mathrm{R}_n,$$

en posant

$$\mathrm{R}_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1.2\ldots n.p} f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Nous appellerons cette formule (3) la formule *générale* de Taylor; le dernier terme R_n s'appelle le *reste*. Ce reste dépend d'un nombre entier positif p, que nous avons laissé indéterminé. Dans la pratique, on ne prend guère pour ce nombre p que l'une des deux valeurs $p = n+1$, ou $p = 1$; si l'on fait $p = n+1$, on trouve l'expression du reste due à Lagrange

$$\mathrm{R}_n = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)} f^{(n+1)}(a+\theta h);$$

si l'on fait $p = 1$, il vient

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

forme du reste qui est due à Cauchy. Il est d'ailleurs évident que le nombre θ n'a pas généralement la même valeur dans les deux formules. On peut aussi l'écrire, en supposant $f^{(n+1)}(x)$ continue pour $x = a$,

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} [f^{(n+1)}(a) + \varepsilon],$$

ε étant infiniment petit en même temps que h.

Prenons, pour fixer les idées, la forme de Lagrange; si, dans la formule générale (3), on fait successivement $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, ... on a autant de formules distinctes, qui donnent des valeurs de plus en plus approchées de $f(a+h)$ pour les valeurs de h infiniment petites. Ainsi, pour $n = 2$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a+\theta h),$$

ce qui montre que la différence

$$f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1} f'(a)$$

est un infiniment petit du second ordre. De même la différence

$$f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1} f'(a) - \frac{h^2}{1.2} f''(a)$$

est un infiniment petit du troisième ordre et, en général,

$$f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1} f'(a) - \ldots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

est un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à h. Mais, pour avoir une idée exacte de l'approximation obtenue en négligeant R_n, il faut encore avoir une limite supérieure de ce reste. Si l'on désigne par M une limite supérieure de la valeur absolue de $f^{(n+1)}(x)$ dans le voisinage de $x = a$, soit de $a - \eta$ à $a + \eta$, on a évidemment

$$|R_n| < \frac{|h|^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} M,$$

pourvu que l'on ait aussi $|h| < \eta$.

45. Application aux courbes. — Ce résultat peut s'interpréter géométriquement. Supposons qu'on veuille étudier la courbe C ayant pour équation $y=f(x)$, dans le voisinage du point A, d'abscisse a. Considérons en même temps la courbe auxiliaire C', représentée par l'équation

$$Y=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a);$$

une parallèle à l'axe des y, $x=a+h$, rencontre les deux courbes C et C' en deux points M, M', voisins du point A; la différence de leurs ordonnées est égale, d'après la formule générale, à

$$y-Y=\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Cette différence est un infiniment petit d'ordre $n+1$, de sorte qu'en se bornant à un intervalle assez petit $(a-\eta, a+\eta)$, la courbe C se confondra sensiblement avec la courbe C'. En prenant pour l'entier n des valeurs de plus en plus grandes, on aura des courbes C' différant de moins en moins de la courbe C, et des renseignements d'autant plus précis sur l'*allure* de la courbe C au voisinage du point A.

Prenons d'abord $n=1$; la courbe C' se confond alors avec la tangente à la courbe C au point A,

$$Y=f(a)+(x-a)f'(a),$$

et l'on a, pour la différence des ordonnées des points M et M' de la courbe et de la tangente correspondant à une même abscisse $a+h$,

$$y-Y=\frac{h^2}{1.2}f''(a+\theta h);$$

supposons, ce qui est le cas général, $f''(a)\neq 0$. On peut encore écrire

$$y-Y=\frac{h^2}{1.2}[f''(a)+\varepsilon],$$

ε étant infiniment petit avec h. Puisque ε tend vers zéro en même temps que h, choisissons, ce qui est possible, un nombre positif η tel que, h variant de $-\eta$ à $+\eta$, on ait $|\varepsilon|<|f''(a)|$. Pour ces valeurs de h, la quantité $f''(a)+\varepsilon$ aura le même signe que $f''(a)$,

et $y - Y$ aura aussi le signe de $f''(a)$. Si $f''(a) > 0$, l'ordonnée y de la courbe est supérieure à l'ordonnée Y de la tangente, quel que soit le signe de h; la courbe C est située tout entière au-dessus de la tangente dans le voisinage du point A. Au contraire, si $f''(a) < 0$, on a $y < Y$, et la courbe est tout entière au-dessous de la tangente dans le voisinage du point de contact.

Si $f''(a) = 0$, soit $f^{(p)}(a)$ la dérivée de l'ordre le moins élevé qui n'est pas nulle pour $x = a$, à partir de la seconde; on a encore

$$y - Y = \frac{h^p}{1.2\ldots p}[f^{(p)}(a) + \varepsilon],$$

et l'on démontre, comme tout à l'heure, que dans un intervalle assez petit $(a - \eta, a + \eta)$, la différence $y - Y$ a le même signe que le produit $h^p f^{(p)}(a)$. Lorsque p est pair, cette différence ne change pas de signe, lorsque h varie de $-\eta$ à $+\eta$, et la courbe est tout entière d'un même côté de la tangente dans le voisinage du point de contact. Mais, si p est impair, la différence $y - Y$ change de signe en même temps que h; la courbe C traverse sa tangente au point de contact. Le point A est un point d'inflexion; c'est ce qui a lieu, par exemple, si l'on a $f'''(a) \neq 0$.

Prenons ensuite $n = 2$. La courbe C' est une parabole

$$Y = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{1.2}f''(a),$$

dont l'axe est parallèle à Oy, et il vient

$$y - Y = \frac{h^3}{1.2.3}[f'''(a) + \varepsilon];$$

si $f'''(a)$ n'est pas nul, $y - Y$ a le signe de $h^3 f'''(a)$ pour les valeurs de h infiniment petites, et la courbe C traverse la parabole C' au point A. Cette parabole C' est dite *osculatrice* à la courbe C; c'est, parmi les paraboles représentées par une équation de la forme

$$Y = mx^2 + nx + p,$$

celle qui se rapproche le plus de la courbe C dans le voisinage du point A.

46. Méthode générale de développement. — La formule (3)

fournit pour l'infiniment petit $f(a+h)-f(a)$ un développement suivant les puissances croissantes de h. D'une façon plus générale, soit x un infiniment petit principal que, pour éviter toute difficulté, nous supposerons positif, et y un autre infiniment petit qui a une expression de la forme

$$(4) \qquad y = A_1 x^{n_1} + A_2 x^{n_2} + \ldots + x^{n_p}(A_p + \varepsilon),$$

$n_1, n_2, \ldots, n_p$ étant des nombres positifs croissants, mais non pas forcément entiers, $A_1, A_2, \ldots, A_p$ des constantes différentes de zéro, et ε un autre infiniment petit. Les nombres n_1, A_1, n_2, A_2, ... peuvent se déterminer de proche en proche par un calcul régulier. D'abord il est clair que n_1 est égal à l'ordre infinitésimal de y par rapport à x, et A_1 est égal à la limite du rapport $\frac{y}{x^{n_1}}$ pour $x=0$. On a ensuite

$$y - A_1 x^{n_1} = u_1 = A_2 x^{n_2} + \ldots + (A_p + \varepsilon) x^{n_p},$$

ce qui montre que n_2 est égal à l'ordre infinitésimal de u_1 et A_2 à la limite du rapport $\frac{u_1}{x^{n_2}}$, et l'on continuera de même pour avoir les termes suivants. Il est visible, d'après cela, qu'un infiniment petit y ne peut admettre deux développements essentiellement différents de la forme (4); si les deux développements ont le même nombre de termes, ils sont identiques; si l'un d'eux a p termes, et l'autre $p+q$ termes, les termes du premier se retrouvent dans le second. Cette méthode s'applique en particulier au développement de $f(a+h)-f(a)$ suivant les puissances de h, sans qu'il soit nécessaire d'avoir obtenu d'abord l'expression générale des dérivées successives de la fonction $f(x)$; elle donne au contraire un moyen pratique de calculer les valeurs des dérivées $f'(a), f''(a), \ldots$.

Exemples. — Considérons l'équation

$$(5) \quad F(x,y) = Ax^n + By + xy\Phi(x,y) + Cx^{n+1} + \ldots + Dy^2 + \ldots = 0,$$

où $\Phi(x, y)$ est un polynome entier en x et y, et où les termes non écrits forment deux polynomes $P(x)$ et $Q(y)$, divisibles respectivement par x^{n+1} et par y^2; les coefficients A et B sont l'un et l'autre différents de zéro. Lorsque x tend vers zéro, il y a une

racine y de l'équation (5) et une seule qui tend vers zéro (n° **20**); pour appliquer la formule de Taylor à cette racine, il faudrait avoir les dérivées successives, que l'on pourrait calculer par l'application des règles générales. Mais on peut opérer plus directement au moyen de la méthode précédente. Observons pour cela que la partie principale de la racine infiniment petite est égale à $-\frac{A}{B}x^n$; en effet, si nous posons, dans l'équation (5),

$$y = x^n\left(-\frac{A}{B} + y_1\right),$$

en faisant la substitution et divisant par x^n, il reste une équation de même forme n'ayant qu'un terme du premier degré en y_1, qui est By_1,

$$(6)\qquad \begin{cases} F_1(x, y_1) = A_1 x^{n_1} + By_1 + xy_1\Phi_1(x, y_1) \\ \qquad + C_1 x^{n_1+1} + \ldots + D_1 y_1^2 + \ldots = 0. \end{cases}$$

Lorsque x tend vers zéro, l'équation (6) admet une racine infiniment petite en y_1, et par suite la racine infiniment petite de l'équation (5) a bien pour partie principale $-\frac{A}{B}x^n$. Pour la même raison, la partie principale de y_1 est $-\frac{A_1}{B}x^{n_1}$, et l'on peut poser aussi

$$y = -\frac{A}{B}x^n + \left(-\frac{A_1}{B} + y_2\right)x^{n+n_1},$$

y_2 étant un nouvel infiniment petit, dont on aurait la partie principale en posant dans l'équation (6)

$$y_1 = x^{n_1}\left(-\frac{A_1}{B} + y_2\right).$$

En continuant de la sorte, on obtient pour cette racine y une expression de la forme

$$y = \alpha x^n + \alpha_1 x^{n+n_1} + \alpha_2 x^{n+n_1+n_2} + \ldots + (\alpha_p + \varepsilon)x^{n+n_1+\ldots+n_p},$$

que l'on peut pousser aussi loin que l'on voudra sans être arrêté. Tous les nombres $n, n_1, n_2, \ldots, n_p$ sont bien des nombres entiers, comme cela doit être, puisque nous sommes dans les conditions où la formule générale (3) est applicable. Le développement que l'on obtient par le calcul précédent n'est pas autre chose, en effet,

que celui que donnerait la formule de Taylor en y faisant $a = 0$, $h = x$.

Voici un autre exemple où les exposants ne sont pas nécessairement des nombres entiers. Soit

$$y = \frac{A x^\alpha + B x^\beta + C x^\gamma + \ldots}{1 + B_1 x^{\beta_1} + C_1 x^{\gamma_1} + \ldots},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et $\beta_1, \gamma_1, \ldots$ formant deux suites de nombres positifs croissants, et le coefficient A n'étant pas nul; il est clair que la partie principale de y est $A x^\alpha$, et l'on a

$$y - A x^\alpha = \frac{B x^\beta + C x^\gamma + \ldots - A x^\alpha (B_1 x^{\beta_1} + C_1 x^{\gamma_1} + \ldots)}{1 + B_1 x^{\beta_1} + C_1 x^{\gamma_1} + \ldots},$$

expression de même forme que la première, dont on obtiendra la partie principale en prenant le terme du degré le moins élevé au numérateur. Il est clair que le même procédé fournira autant de termes que l'on voudra du développement.

Soit $f(x)$ une fonction admettant des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$; on a, en changeant a en x dans la formule (3),

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} [f^{(n)}(x) + \varepsilon],$$

ε tendant vers zéro avec h. Supposons, d'autre part, que par un moyen quelconque on ait obtenu pour $f(x+h)$ une expression de même forme

$$f(x+h) = f(x) + h\varphi_1(x) + h^2\varphi_2(x) + \ldots + h^n[\varphi_n(x) + \varepsilon'];$$

les deux développements de $f(x+h)$ doivent être identiques terme à terme, de sorte que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont égales, à des facteurs numériques près, aux dérivées successives de $f(x)$,

$$\varphi_1(x) = f'(x), \qquad \varphi_2(x) = \frac{f''(x)}{1.2}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n}.$$

Cette remarque est quelquefois utile pour calculer les dérivées de certaines fonctions. Soit, par exemple, à calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction

$$y = f(u), \qquad \text{où} \qquad u = \varphi(x);$$

on a, en négligeant les termes d'ordre supérieur à n, par rapport à h,

$$k = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(x),$$

et de même, en négligeant les termes d'ordre supérieur à n, par rap-

port à k,

$$f(u+k)-f(u)=\frac{k}{1}f'(u)+\frac{k^2}{1.2}f''(u)+\ldots+\frac{k^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(u).$$

Si dans le second membre on remplace k par

$$\frac{h}{1}\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(x),$$

et qu'on ordonne le résultat par rapport aux puissances croissantes de h, il est évident que les termes négligés n'auraient aucune influence sur les coefficients des termes en $h, h^2, \ldots, h^n$. Le coefficient de h^n, par exemple, sera donc égal à la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f[\varphi(x)]$, divisée par le facteur $1.2\ldots n$, ce qu'on peut écrire

$$D^n\{f[\varphi(x)]\}=\left[A_1 f'(u)+A_2\frac{f''(u)}{1.2}+\ldots+\frac{A_n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(u)\right]1.2\ldots n,$$

A_i désignant le coefficient de h^n dans le développement de

$$\left[\frac{h}{1}\varphi'(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(x)\right]^i.$$

Pour plus de détails sur cette méthode, je renverrai le lecteur au *Cours d'Analyse* de M. Hermite (p. 59).

47. Formes indéterminées. — Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions s'annulant pour une même valeur de la variable $x=a$; la recherche de la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$$

lorsque h tend vers zéro n'est qu'un cas particulier du problème qui consiste à trouver la limite du rapport de deux infiniment petits. Cette limite s'obtient immédiatement si l'on connaît la partie principale de chacun de ces infiniment petits, ce qui est précisément le cas lorsque la formule (3) est applicable à chacune des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ dans le voisinage du point a. Supposons que la première dérivée de $f(x)$ qui n'est pas nulle pour $x=a$ est la dérivée d'ordre p, $f^{(p)}(a)$, et de même que la première dérivée de $\varphi(x)$, qui n'est pas nulle pour $x=a$, est la dérivée d'ordre q, $\varphi^{(q)}(a)$. On peut écrire, en appliquant la formule (3) à chacune des fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, et divisant les résultats,

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=h^{p-q}\frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots p}\frac{f^{(p)}(a)+\varepsilon}{\varphi^{(q)}(a)+\varepsilon'},$$

ε et ε' étant deux infiniment petits. Il est évident, sur cette formule, que le rapport considéré augmente indéfiniment lorsque h tend vers zéro, si q est supérieur à p, et tend vers zéro si q est inférieur à p; lorsque $q=p$, il tend vers une limite finie $\frac{f^{(p)}(a)}{\varphi^{(p)}(a)}$.

Une indétermination du même genre se présente quelquefois dans les équations de la tangente à une courbe. Soient

$$x=f(t), \qquad y=\varphi(t), \qquad z=\psi(t),$$

les formules qui donnent les coordonnées d'un point d'une courbe quelconque C exprimées en fonction d'un paramètre t; les équations de la tangente à cette courbe en un point M correspondant à la valeur t_0 du paramètre, sont, comme on l'a vu (n° 5),

$$\frac{X-f(t_0)}{f'(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

Ces équations se réduisent à des identités, si les trois dérivées $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ sont nulles à la fois pour $t=t_0$. Pour lever la difficulté, reprenons le raisonnement qui a servi à trouver les équations de la tangente. Soit M′ un point de la courbe C voisin du point M, et t_0+h la valeur correspondante du paramètre; les équations de la corde MM′ sont

$$\frac{X-f(t_0)}{f(t_0+h)-f(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}.$$

Pour plus de généralité, nous supposerons que toutes les dérivées d'ordre inférieur à $p\,(p>1)$ des fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont nulles pour $t=t_0$, mais que l'une au moins des dérivées d'ordre p, par exemple $f^{(p)}(t_0)$, n'est pas nulle. En divisant tous les dénominateurs des équations précédentes par h^p et appliquant la formule générale (3), on peut encore écrire ces équations

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)+\varepsilon}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi^{(p)}(t_0)+\varepsilon'}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)+\varepsilon''},$$

ε, ε', ε'' étant trois infiniment petits. Si maintenant on fait tendre h vers zéro, ces équations deviennent à la limite

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi^{(p)}(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)},$$

et ne présentent plus aucune indétermination.

Les points d'une courbe C où cette circonstance se présente sont en général des points singuliers, où la courbe offre quelque particularité de forme. Ainsi la courbe plane représentée par les équations

$$x=t^2, \qquad y=t^3,$$

passe par l'origine, et l'on a, en ce point, $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$. La tangente est l'axe des x, et l'origine est un point de rebroussement de première espèce.

48. Série de Taylor. — Lorsque la suite des dérivées de la fonction $f(x)$ est illimitée dans l'intervalle $(a, a+h)$, on peut supposer le nombre n qui figure dans la formule (3) aussi grand qu'on le veut; *si le reste* R_n *tend vers zéro lorsque* n *augmente indéfiniment,* on est conduit à écrire

$$(7)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) + \ldots,$$

formule qui exprime que la série

$$f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) + \ldots$$

est convergente et a pour somme $f(a+h)$. C'est cette formule (7) qui constitue la formule de Taylor proprement dite, mais elle n'est légitime que si l'on a établi que le reste R_n tend vers zéro pour n infini, tandis que la formule générale (3) ne suppose que l'existence des dérivées jusqu'à la $(n+1)^{\text{ième}}$. Cette formule (7) peut encore s'écrire, en remplaçant a par x,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) + \ldots;$$

au contraire, si l'on fait $a = 0$, et qu'on remplace h par x, il vient

$$(8)\qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0) + \ldots.$$

Cette dernière formule (8) est appelée aussiquel quefois *formule de Maclaurin;* mais on doit remarquer que ces différentes formules sont au fond équivalentes. Tandis que la formule (8) donne le développement d'une fonction de x suivant les puissances de x, la formule (7) donne le développement d'une fonction de h suivant les puissances de h : il suffit d'un simple changement de notation pour passer de l'une à l'autre.

Il est un cas assez étendu où l'on peut affirmer que le terme complémentaire R_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment : c'est celui où la valeur absolue d'une dérivée d'ordre

quelconque reste inférieure à un nombre fixe M, lorsque x varie dans l'intervalle $(a, a+h)$. On a en effet, en adoptant la forme du reste de Lagrange,

$$|R_n| < M \frac{|h|^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)},$$

et le second membre est le terme général d'une série convergente. C'est ce qui arrive pour les fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$; toutes les dérivées de e^x sont égales à e^x et admettent, par conséquent, le même maximum dans l'intervalle considéré. Quant aux dérivées de $\sin x$ et de $\cos x$, leur valeur absolue ne dépasse jamais l'unité. La formule (7) est donc applicable à ces trois fonctions, quelles que soient les valeurs de a et de h. Bornons-nous à la formule (8); si $f(x) = e^x$, on a

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(0) = 1, \quad \ldots$$

et par suite

$$(9) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

formule qui s'applique à toutes les valeurs, positives ou négatives, de x. Si a est un nombre positif quelconque, on a $a^x = e^{x\log a}$ et, par conséquent,

$$(10) \qquad a^x = 1 + \frac{x\log a}{1} + \frac{(x\log a)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(x\log a)^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Prenons encore $f(x) = \sin x$; les dérivées successives forment une suite périodique à quatre termes $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, et les valeurs de ces dérivées pour $x = 0$ forment également une suite périodique 1, 0, -1, 0. On a donc, pour toute valeur positive ou négative de x,

$$(11) \quad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} + \ldots$$

et l'on trouve de même

$$(12) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} + \ldots.$$

Revenons au cas général. La discussion du reste R_n est rarement aussi simple que dans les exemples précédents; mais on peut

la faciliter en remarquant que, si ce reste tend vers zéro, la série

$$f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) + \ldots$$

est nécessairement convergente. En général, il vaut mieux s'assurer, avant d'examiner R_n, que la série est convergente; si, pour des valeurs données de a et de h, cette série est divergente, il est inutile de pousser la discussion plus loin : on peut affirmer que R_n ne tend pas vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

49. Développement de $\log(1+x)$. — La fonction $\log(1+x)$ est continue, et la suite de ses dérivées est illimitée, pourvu que x soit supérieur à -1. Ces dérivées successives ont pour expressions

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{1.2}{(1+x)^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+x)^n},$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{(1+x)^{n+1}}.$$

Nous nous proposons d'examiner pour quelles valeurs de x on a le droit d'appliquer à cette fonction la formule de Maclaurin (8). En écrivant d'abord la formule sous sa forme générale, avec un terme complémentaire, on a

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n.$$

Le reste R_n ne peut tendre vers zéro que si la série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

est convergente, ce qui n'a lieu que pour des valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, la limite supérieure $+1$ n'étant pas exclue; la variable x étant supposée comprise entre ces limites,

écrivons la valeur du reste sous la forme de Cauchy

$$R_n = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}\,\frac{(-1)^n 1.2\ldots n}{(1+\theta x)^{n+1}} = (-1)^n \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

ou encore

$$R_n = (-1)^n x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{1}{1+\theta x}.$$

Supposons d'abord $|x| < 1$; le premier facteur x^{n+1} tend vers zéro; le second facteur $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ est inférieur à l'unité, que x soit positif ou négatif, car le numérateur est plus petit que le dénominateur. Le dernier facteur reste fini, car il est plus petit que $\frac{1}{1-|x|}$. Donc le reste R_n tend bien vers zéro, lorsque n augmente indéfiniment. La forme précédente du reste ne nous apprend rien pour $x = 1$, mais si l'on prend le reste sous la première forme, il devient ici

$$R_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{(1+\theta)^{n+1}},$$

et il est évident que R_n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. L'examen du reste est inutile pour $x = -1$, puisque la série est alors divergente. On a donc, pour x compris entre -1 et $+1$,

$$(13) \qquad \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots.$$

La formule s'applique encore pour $x = 1$, ce qui nous donne la relation curieuse

$$(14) \qquad \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots.$$

La formule (13), n'étant valable que pour des valeurs de $x \leqq 1$, ne permet pas de calculer les logarithmes des nombres entiers.

Changeons dans cette formule x en $-x$; la nouvelle formule

$$(13)' \qquad \log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

est encore valable pour les valeurs de x comprises entre -1 et

$+1$, et, en les retranchant membre à membre, il vient

$$(15)\qquad \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right);$$

lorsque x varie de 0 à 1, la fraction rationnelle $\frac{1+x}{1-x}$ croît constamment de 1 à $+\infty$, et l'on peut ainsi calculer les logarithmes de tous les nombres entiers. On obtient des séries encore plus convergentes en calculant la différence des logarithmes de deux nombres entiers consécutifs; posons pour cela

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N}, \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{1}{2N+1},$$

la formule précédente devient

$$\log(N+1) - \log N = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right],$$

et l'on a dans le second membre une série très rapidement convergente, pourvu que le nombre N soit un peu grand.

Remarque. — Appliquons à la fonction $\log(1+x)$ la formule générale (3) en faisant $a=0$, $h=x$, $n=1$, et prenant pour le reste la forme de Lagrange, il vient

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2};$$

si dans cette formule on remplace x par l'inverse d'un nombre entier n, elle peut s'écrire

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{\theta_n}{2n^2},$$

θ_n étant un facteur positif inférieur à l'unité. On déduit de là quelques conséquences intéressantes :

1° La série harmonique étant divergente, la somme

$$\Sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

croît indéfiniment avec n, mais la différence

$$\Sigma_n - \log n$$

tend vers une limite finie. Écrivons, en effet, cette différence

$$\left(1 - \log\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{p} - \log\frac{p+1}{p}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) + \log\frac{n+1}{n};$$

$\frac{1}{p} - \log\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ est le terme général d'une série convergente, car l'on a, d'après la formule précédente,

$$\frac{1}{p} - \log\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{\theta_p}{2p^2},$$

ce qui montre que ce terme est plus petit que le terme général de la série convergente $\sum \frac{1}{p^2}$. Quand n augmente indéfiniment,

$$\log \frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

tend vers zéro; la différence considérée tend, par conséquent, vers une limite finie, que l'on appelle *constante d'Euler*. Sa valeur est, avec vingt décimales exactes, $C = 0,57721566490153286060$.

2° Soit

$$\Sigma = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p},$$

n et p étant deux nombres entiers qui augmentent indéfiniment. On peut écrire

$$\Sigma = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \log(n+p) + \rho_{n+p},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad = \log n + \rho_n,$$

ρ_{n+p} et ρ_n tendant vers la même valeur C, lorsque n et p augmentent indéfiniment; par conséquent, on a aussi

$$\Sigma = \log\left(1 + \frac{p}{n}\right) + \rho_{n+p} - \rho_n.$$

La différence $\rho_{n+p} - \rho_n$ tend vers zéro, ce qui montre que la somme Σ n'a une limite qu'autant que le rapport $\frac{p}{n}$ a lui-même une limite. Si ce rapport a une limite α, la somme Σ a pour limite $\log(1+\alpha)$.

Par exemple, en faisant $p = n$, on voit que la somme

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

a pour limite $\log 2$.

50. Développement de $(1+x)^m$. — La fonction $(1+x)^m$ a un sens bien déterminé, quel que soit m, pourvu que $1+x$ soit po-

sitif; elle admet une suite illimitée de dérivées qui sont toutes des fonctions continues de x, lorsque $1 + x$ est positif, car elles ont une expression de même forme,

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(1+x)^{m-1}, \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \\ f^{(n+1)}(x) &= m(m-1)\dots(m-n)(1+x)^{m-n-1}. \end{aligned}$$

Appliquons à cette fonction la formule générale (3), nous trouvons

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n + R_n;$$

pour que le reste R_n tende vers zéro lorsque le nombre n augmente indéfiniment, il faut d'abord que la série dont le terme général est

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n$$

soit convergente. Or le rapport d'un terme au précédent a pour valeur $\frac{m-n+1}{n}x$, et tend vers $-x$ lorsque n augmente indéfiniment. La série ne peut donc être convergente que si l'on a $|x| \leqq 1$. On exclut, bien entendu, le cas où m est un nombre entier positif, qui donne la formule élémentaire du binome. Bornons-nous au cas où $|x| < 1$; pour prouver que le reste tend vers zéro, écrivons-le, en adoptant la forme de Cauchy,

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{m-1};$$

le premier facteur $\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n}x^{n+1}$ tend vers zéro, comme étant le terme général d'une série convergente; le facteur $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ est plus petit que l'unité, enfin le dernier facteur $(1+\theta x)^{m-1}$ est plus petit qu'une limite fixe. Si $m-1>0$, on a en effet

$$(1+\theta x)^{m-1} < 2^{m-1};$$

si $m-1<0$, on a $(1+\theta x)^{m-1} < (1-|x|)^{m-1}$. On a donc, pour

toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$, le développement

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots; \end{aligned} \right.$$

on examinera plus tard le cas où $x = \pm 1$.

On peut encore démontrer de la même façon les formules suivantes

$$\begin{aligned} \text{arc}\sin x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots \\ + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \end{aligned}$$

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

qui seront établies plus tard par une voie plus simple, et qui s'appliquent aux valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

En dehors des exemples que nous venons de traiter, et de quelques autres, la discussion du reste offre de grandes difficultés, à cause de la complication croissante des dérivées successives. Il semblerait donc, d'après ce premier aperçu, que les applications de la formule de Taylor pour le développement d'une fonction en série doivent être très limitées. Une telle vue serait absolument inexacte, et ces développements jouent au contraire un rôle fondamental dans l'Analyse moderne. Mais, pour apprécier leur importance, il faut se placer à un autre point de vue, et étudier en elles-mêmes les propriétés des séries entières, sans se préoccuper de leur origine. C'est ce qui sera fait dans plusieurs des chapitres suivants.

Nous remarquerons seulement qu'une série

$$f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0) + \ldots$$

peut fort bien être convergente, sans représenter la fonction $f(x)$ qui lui a donné naissance; l'exemple suivant est dû à Cauchy. Soit $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$; on a $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ et, d'une manière générale, la dérivée $n^{\text{ième}}$ est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{P}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

P désignant un polynome. Toutes ces dérivées sont nulles pour $x=0$, car le quotient de $e^{-\frac{1}{x^2}}$ par une puissance positive quelconque de x tend vers zéro avec x; on peut écrire en effet

$$\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{z^m}{e^{z^2}}$$

en posant $x=\frac{1}{z}$, et l'on sait que $\frac{e^{z^2}}{z^m}$ augmente indéfiniment avec z, aussi grand que soit m. Soit, d'autre part, $\varphi(x)$ une fonction à laquelle s'applique la formule (8)

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\varphi'(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(0)+\ldots.$$

Posons $F(x)=\varphi(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$; on a

$$F(0)=\varphi(0),\qquad F'(0)=\varphi'(0),\qquad \ldots,\qquad F^{(n)}(0)=\varphi^{(n)}(0),\qquad \ldots,$$

de sorte que le développement de $F(x)$ par la formule de Maclaurin serait identique au précédent. La somme de la série que l'on obtient ainsi représente donc une fonction tout à fait différente de celle qui a donné naissance à cette série.

D'une façon générale, si deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont égales, ainsi que toutes leurs dérivées, pour $x=0$, sans être identiques, il est clair qu'elles ne peuvent être toutes les deux développables en série par la formule de Maclaurin, puisque les coefficients du développement seraient les mêmes pour les deux fonctions.

51. **Extension aux fonctions de plusieurs variables.** — Soit, pour fixer les idées, $\omega=f(x,y,z)$ une fonction de trois variables indépendantes; on se propose de développer $f(x+h,y+k,z+l)$ suivant les puissances de h, k, l, en groupant ensemble les termes de même degré. Cauchy ramène ce problème à celui qui vient d'être traité, par l'artifice suivant. Considérons x, y, z, h, k, l comme ayant des valeurs déterminées et posons

$$\varphi(t)=f(x+ht,y+kt,z+lt),$$

t désignant une variable auxiliaire. La fonction $\varphi(t)$ ne dépend que d'une variable indépendante t; si nous lui appliquons la formule

générale de Taylor, avec un reste, il vient

$$(17)\quad \begin{cases} \varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1}\varphi'(0) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots \\ \qquad + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(\theta t), \end{cases}$$

$\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, ... $\varphi^{(n)}(0)$ étant les valeurs de la fonction $\varphi(t)$ et de ses dérivées pour $t = 0$, et $\varphi^{(n+1)}(\theta t)$ étant la valeur de la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ pour la valeur θt, θ étant compris entre zéro et un. Or on peut considérer $\varphi(t)$ comme une fonction composée de t, $\varphi(t) = f(u, v, w)$, les fonctions intermédiaires

$$u = x + ht, \qquad v = y + kt, \qquad w = z + lt$$

étant des fonctions *linéaires* de t. D'après ce qu'on a remarqué antérieurement, l'expression de la différentielle d'ordre m, $d^m\varphi$ est la même que si u, v, w étaient des variables indépendantes; on a donc l'égalité symbolique

$$d^m\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw\right)^{(m)} = dt^m\left(\frac{\partial f}{\partial u}h + \frac{\partial f}{\partial v}k + \frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)},$$

qui peut encore s'écrire, en divisant par dt^m,

$$\varphi^{(m)}(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}h + \frac{\partial f}{\partial v}k + \frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)}.$$

Pour $t = 0$, u, v, w se réduisent respectivement à x, y, z, et l'égalité précédente devient, en employant toujours la même notation symbolique,

$$\varphi^{(m)}(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(m)}.$$

On a de même

$$\varphi^{(n+1)}(\theta t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n+1)},$$

x, y, z, devant être remplacés, après le développement, par

$$x + \theta ht, \quad y + \theta kt, \quad z + \theta lt$$

respectivement. En faisant maintenant $t = 1$ dans la formule (17), il vient

$$(18)\quad \begin{cases} f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right) + \ldots \\ \qquad + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n)} + R_n, \end{cases}$$

le terme complémentaire ayant pour expression

$$R_n = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n+1)},$$

x, y, z devant être remplacés par $x+\theta h$, $y+\theta k$, $z+\theta l$ après le développement.

Cette formule (18) est entièrement analogue à la formule générale (3). Si pour des valeurs données de x, y, z, h, k, l, le reste R_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, on aura un développement en série de $f(x+h, y+k, z+l)$, tous les termes de cette série étant des polynomes homogènes en h, k, l. Mais il est en général très difficile de reconnaître sur l'expression de R_n que ce reste tend vers zéro.

52. On peut tirer de la formule (18) des conséquences analogues à celles que l'on déduit de la formule (3) dans le cas d'une seule variable indépendante. Par exemple, soit $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface S ; si la fonction $f(x, y)$ est continue ainsi que toutes ses dérivées partielles jusqu'à un certain ordre dans le voisinage d'un point (x_0, y_0), on a, d'après la formule (18),

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x_0} + k\frac{\partial f}{\partial y_0}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}h + \frac{\partial f}{\partial y_0}k\right)^{(2)} + \ldots + R_n.$$

Si nous limitons le second membre à ses deux premiers termes, puis à ses trois premiers termes, etc., nous avons les équations d'un plan, puis d'un paraboloïde, etc., qui diffèrent très peu de la surface considérée dans le voisinage du point (x_0, y_0). Le plan n'est autre que le plan tangent, le paraboloïde est celui qui se rapproche le plus de la surface S parmi tous ceux qui sont représentés par une équation de la forme

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

On se sert aussi de la formule (18) dans la recherche des valeurs limites des fonctions qui se présentent sous forme indéterminée. Soient $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ deux fonctions qui s'annulent à la fois pour $x = a$, $y = b$, mais qui restent continues, ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à un certain ordre, dans le voisinage du point $x = a$, $y = b$; proposons-nous de trouver la limite vers

laquelle tend le quotient

$$\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

lorsque x et y tendent respectivement vers a et b. Nous supposerons d'abord que les quatre dérivées du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ ne sont pas nulles à la fois ; nous pouvons écrire

$$\frac{f(a+h, b+k)}{\varphi(a+h, b+k)} = \frac{h\left(\frac{\partial f}{\partial a} + \varepsilon\right) + k\left(\frac{\partial f}{\partial b} + \varepsilon'\right)}{h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \varepsilon_1\right) + k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial b} + \varepsilon'_1\right)},$$

ε, ε', ε_1, ε'_1 tendant vers zéro lorsque h et k tendent vers zéro. Lorsque le point (x, y) tend vers (a, b), h et k tendent vers zéro ; nous supposerons que le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une limite α, c'est-à-dire que le point (x, y) décrit une courbe ayant une tangente au point (a, b). Divisons les deux termes du rapport précédent par h, nous voyons que la fraction $\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$ a pour limite

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial a} + \alpha \frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial b}};$$

cette limite dépend en général de α, c'est-à-dire de la façon dont les variables x et y tendent respectivement vers leurs limites a et b. Pour que cette limite fût indépendante de α, il faudrait que l'on eût

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0,$$

ce qui n'a pas lieu en général.

Si les quatre dérivées $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ sont nulles, on prendra les termes du second ordre dans la formule (18), et l'on écrira

$$\frac{f(a+h, b+k)}{\varphi(a+h, b+k)} = \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \varepsilon\right)h^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} + \varepsilon'\right)hk + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} + \varepsilon''\right)k^2}{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} + \varepsilon_1\right)h^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a\,\partial b} + \varepsilon'_1\right)hk + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2} + \varepsilon''_1\right)k^2},$$

ε, ε', ε'', ε_1, ε'_1, ε''_1 étant des quantités infiniment petites ; α ayant

la même signification que tout à l'heure, la limite du premier membre est

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}\alpha^2}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a\,\partial b}\alpha + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}\alpha^2},$$

et dépend en général de α.

II. — POINTS SINGULIERS. — MAXIMA ET MINIMA.

53. **Points singuliers.** — Lorsque les coordonnées (x_0, y_0) d'un point M_0 d'une courbe plane C, représentée par l'équation $F(x, y) = 0$, n'annulent pas à la fois les deux dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, on a vu plus haut (n° 22) que par ce point passe une seule branche de courbe dont la tangente a pour équation

$$(X - x_0)\frac{\partial F}{\partial x_0} + (Y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y_0} = 0,$$

en représentant d'une manière générale par $\frac{\partial^{p+q} F}{\partial x_0^p\,\partial y_0^q}$ la valeur que prend la dérivée $\frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p\,\partial y^q}$ quand on y fait $x = x_0$, $y = y_0$. Lorsqu'on a à la fois $\frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial F}{\partial y_0} = 0$, le point (x_0, y_0) est un *point singulier*. Nous supposerons que les trois dérivées partielles du second ordre ne sont pas nulles pour $x = x_0$, $y = y_0$, que ces dérivées sont continues dans le voisinage de ce point, ainsi que les dérivées du troisième ordre. L'équation de la courbe C peut alors s'écrire

$$(19)\left\{\begin{aligned} 0 = F(x, y) = \frac{1}{2}\Big[&\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(y - y_0)^2\Big] \\ &+ \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0)\right]^{(3)}_{\substack{x_0 + \theta(x - x_0), \\ y_0 + \theta(y - y_0)}}, \end{aligned}\right.$$

x et y devant être remplacés dans les dérivées du troisième ordre par $x_0 + \theta(x - x_0)$ et $y_0 + \theta(y - y_0)$ respectivement. On peut toujours admettre que la dérivée $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}$ n'est pas nulle, car il suffit de changer les axes de coordonnées pour être ramené à ce cas. En posant $y - y_0 = t(x - x_0)$, dans l'équation (19), et divisant par

$(x - x_0)^2$, il vient

$$(20) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2t \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} + t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} + (x - x_0) P(x - x_0, t) = 0,$$

$P(x - x_0, t)$ désignant une fonction qui reste finie lorsque x tend vers x_0. Cela posé, soient t_1 et t_2 les deux racines de l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2t \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} t^2 = 0;$$

si ces racines sont réelles, c'est-à-dire si l'on a

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2 > \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2},$$

on peut encore écrire l'équation (20)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} (t - t_1)(t - t_2) + (x - x_0) P = 0.$$

Pour $x = x_0$, l'équation admet les deux racines distinctes $t = t_1$, $t = t_2$. Lorsque x tend vers x_0, l'équation admet deux racines tendant respectivement vers t_1 et t_2; on le montre en reprenant le raisonnement dont on s'est servi pour établir l'existence des fonctions implicites. Posons, par exemple, $t = t_1 + u$, et écrivons l'équation entre x et u

$$u(t_1 - t_2 + u) + (x - x_0) Q(x, u) = 0,$$

$Q(x, u)$ étant fini lorsque x tend vers x_0 et u vers zéro. Supposons, pour fixer les idées, $t_1 - t_2 > 0$, et désignons par M une limite supérieure du module de $Q(x, u)$ et par m une limite inférieure de $t_1 - t_2 + u$, lorsque x varie de $x_0 - h$ à $x_0 + h$ et u de $-h$ à $+h$, h étant un nombre positif inférieur à $t_1 - t_2$. Soient maintenant ε un nombre positif plus petit que h, et η un autre nombre positif satisfaisant aux deux inégalités

$$\eta < h, \qquad \eta < \frac{m}{M} \varepsilon.$$

Si nous remplaçons x dans l'équation précédente par une valeur telle que $|x - x_0|$ soit inférieur à η, les résultats de la substitution de $-\varepsilon$ et de $+\varepsilon$ à la place de u sont de signes différents; cette équation admet donc une racine tendant vers zéro lorsque x tend vers x_0, et par suite l'équation (19) admet pour racine une expres-

sion de la forme

$$y = y_0 + (x - x_0)(t_1 + \alpha),$$

α étant infiniment petit avec $x - x_0$. Par le point (x_0, y_0) il passe donc une branche de la courbe C tangente à la droite

$$y - y_0 = t_1(x - x_0).$$

On verrait de la même façon qu'il passe aussi par ce point une branche de courbe tangente à la droite $y - y_0 = t_2(x - x_0)$. Le point M_0 est un *point double*, et l'on obtient l'équation du système des tangentes à ce point double en égalant à zéro l'ensemble des termes du second degré en $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, dans l'équation (19).

Lorsque $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} < 0$, le point (x_0, y_0) est un *point double isolé*. A l'intérieur d'un cercle de rayon assez petit décrit du point M_0 comme centre, le premier membre $F(x, y)$ de l'équation (19) ne s'annule que pour le point M_0 lui-même. Posons, en effet, pour les coordonnées d'un point voisin de M_0,

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi, \qquad y = y_0 + \rho\sin\varphi;$$

il vient

$$F(x, y) = \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\sin^2\varphi + \rho L\right),$$

L ayant une valeur finie lorsque ρ tend vers zéro. Soit H une limite supérieure de la valeur absolue de L, lorsque ρ est inférieur à un nombre positif r. Lorsque φ varie de 0 à 2π, le trinome

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\sin^2\varphi$$

conserve un signe constant, puisque ses racines sont imaginaires; soit m une limite inférieure de sa valeur absolue. Pour tout point pris à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho < \frac{m}{H}$, il est clair que le coefficient de ρ^2 ne peut s'annuler; l'équation $F(x, y) = 0$ n'admet donc pas d'autre solution que $\rho = 0$, c'est-à-dire $x = x_0$, $y = y_0$, à l'intérieur de ce cercle.

Lorsque l'on a

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2},$$

les deux tangentes au point double sont venues se confondre, et

il y a en général deux branches de courbe tangentes à une même droite, et formant un rebroussement. L'étude complète de ce cas exige une discussion très délicate qui sera faite plus tard. Observons seulement que la variété des cas possibles pour la forme de la courbe est beaucoup plus grande que dans les deux cas déjà examinés, comme le montrent les exemples suivants.

La courbe $y^2 = x^3$ présente à l'origine un point de rebroussement de *première espèce*, avec deux branches de courbe tangentes à l'axe des x, situées de part et d'autre de cette tangente, et à droite de Oy. La courbe $y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5 = 0$ présente un rebroussement de *seconde espèce;* les deux branches de courbe tangentes à l'axe des x sont situées du même côté de la tangente. L'équation nous donne, en effet,

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}},$$

et les deux valeurs de y sont de même signe lorsque x est très petit, mais ne sont réelles que si x est positif. La courbe

$$x^4 + x^2y^2 - 6x^2y + y^2 = 0$$

présente deux branches de courbe n'offrant rien de particulier, tangentes l'une et l'autre à l'origine à l'axe des x. On tire, en effet, de cette équation

$$y = \frac{3x^2 \pm x^2\sqrt{8 - x^2}}{1 + x^2},$$

et les branches obtenues en prenant successivement les deux signes devant le radical n'ont aucune singularité à l'origine.

Il peut aussi se faire que la courbe se compose de deux branches confondues, comme c'est le cas pour la courbe représentée par l'équation

$$F(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^4 = 0;$$

lorsque le point (x, y) se meut dans le plan, le premier membre $F(x, y)$ s'annule sans changer de signe.

Enfin, il peut aussi arriver que le point (x_0, y_0) soit un point double isolé; c'est ce qui arrive pour la courbe $y^2 + x^4 + y^4 = 0$, dont l'origine est un point double isolé.

54. Un point M_0 d'une surface S représentée par l'équation $F(x, y, z) = 0$ est de même un point singulier de cette surface si

les coordonnées x_0, y_0, z_0 de ce point annulent les trois dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_0} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0;$$

l'équation trouvée plus haut pour le plan tangent (nº 22) se réduit à une identité. Le lieu des tangentes à toutes les courbes situées sur la surface S, et passant au point M_0, est un cône du second degré, pourvu que les six dérivées partielles du second ordre ne soient pas toutes nulles au même point. Soient, en effet,

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

les équations d'une courbe C située sur la surface S; les trois fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ vérifiant la relation $F(x, y, z) = 0$, on a entre les différentielles du premier et du second ordre les deux relations

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial x} d^2x + \frac{\partial F}{\partial y} d^2y + \frac{\partial F}{\partial z} d^2z = 0.$$

Pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, la première se réduit à une identité, et la seconde devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z_0^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0} dx\,dy + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0\,\partial z_0} dy\,dz + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial z_0} dx\,dz = 0.$$

On aura le lieu des tangentes en éliminant dx, dy, dz entre cette relation et les équations de la tangente

$$\frac{X - x_0}{dx} = \frac{Y - y_0}{dy} = \frac{Z - z_0}{dz},$$

ce qui conduit à l'équation d'un cône (T) du second degré

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(X - x_0)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(Y - y_0)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z_0^2}(Z - z_0)^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}(X - x_0)(Y - y_0) \\ &+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0\,\partial z_0}(Y - y_0)(Z - z_0) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial z_0}(X - x_0)(Z - z_0) = 0. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, l'équation de la surface S peut s'écrire, en appli-

quant la formule générale de Taylor et poussant le développement jusqu'aux termes du troisième ordre,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = F(x, y, z) = &\frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z_0}(z-z_0)\right]^{(2)} \\ &+\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z_0}(z-z_0)\right]^{(3)}_{\substack{x_0+\theta(x-x_0),\\ y_0+\theta(y-y_0),\\ z_0+\theta(z-z_0)}} \end{aligned}\right.$$

x_0, y_0, z_0 devant être remplacés dans les dérivées du troisième ordre par $x_0+\theta(x-x_0)$, $y_0+\theta(y-y_0)$, $z_0+\theta(z-z_0)$. On obtient l'équation du cône précédent (T) en prenant seulement les termes du second degré en $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ dans l'équation (22).

Cela posé, supposons d'abord que l'équation (21) représente un cône réel. Coupons la surface S et le cône (T) par un plan P passant par deux génératrices distinctes G, G′ de ce cône. Pour avoir l'équation de la courbe d'intersection de la surface S par ce plan, on peut imaginer que l'on ait fait d'abord une transformation de coordonnées de façon que le plan P soit parallèle au plan des xy, et il suffit alors de faire $z=z_0$ dans l'équation (22). On voit que le point M_0 est pour cette courbe un point double à tangentes réelles; d'après ce que nous venons de voir, cette section se composera de deux branches de courbe tangentes respectivement aux deux génératrices G, G′. L'aspect de la surface dans le voisinage du point M_0 est donc analogue à l'aspect qu'offrent les deux nappes d'un cône du second degré dans le voisinage du sommet; d'où le nom de *point conique* que l'on donne aussi au point M_0.

Lorsque l'équation (21) représente un cône imaginaire, le point M_0 est un point singulier *isolé* de la surface S. On peut décrire de ce point comme centre une sphère de rayon assez petit pour que l'équation $F(x, y, z)=0$ n'admette pas d'autre solution à l'intérieur que $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Soient M un point de l'espace voisin du point M_0, ρ la distance MM_0, α, β, γ les cosinus directeurs de la droite M_0M. Si l'on pose

$$x = x_0+\rho\alpha, \qquad y=y_0+\rho\beta, \qquad z=z_0+\rho\gamma,$$

$F(x, y, z)$ devient

$$F(x, y, z)=\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\alpha^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\beta^2+\ldots+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial z_0}\alpha\gamma+\rho L\right),$$

le facteur L conservant une valeur finie lorsque ρ tend vers zéro. Puisque l'équation (21) représente un cône imaginaire, le polynome

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\alpha^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial z_0}\alpha\gamma$$

ne peut s'annuler lorsque le point α, β, γ décrit la sphère

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

désignons par m une limite inférieure de la valeur absolue de ce polynome. Soit, d'autre part, H une limite supérieure de la valeur absolue de L dans le voisinage du point M_0. Si du point M_0 comme centre avec un rayon moindre que $\frac{m}{H}$ nous décrivons une sphère, il est clair que le coefficient de ρ^2 dans l'expression de $F(x, y, z)$ ne peut s'annuler à l'intérieur de cette sphère. L'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

n'admet donc pas d'autre solution que $\rho = 0$.

Lorsque l'équation (21) représente un système de deux plans réels et distincts, il passe par le point M_0 deux nappes de surface dont chacune est tangente à l'un de ces plans. Certaines surfaces présentent une ligne de points doubles où le cône des tangentes se décompose en deux plans. Cette ligne est une courbe double de la surface, suivant laquelle deux nappes distinctes se traversent mutuellement. Par exemple, le cercle représenté par les deux équations $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ est une ligne double de la surface qui a pour équation

$$z^4 - 2z^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0.$$

Lorsque l'équation (21) représente un système de deux plans imaginaires conjugués ou un plan double réel, il faut dans chaque cas particulier une discussion spéciale pour étudier la forme de la surface au voisinage du point M_0. La discussion que nous venons de faire se retrouve dans l'étude des maxima et des minima.

55. **Maxima et minima des fonctions d'une variable.** — Soient $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b), et c un point de cet intervalle. La fonction $f(x)$ est maximum ou minimum

pour $x = c$ si l'on peut trouver un nombre positif η assez petit pour que la différence $f(c+h) - f(c)$ conserve un signe constant lorsque h varie de $-\eta$ à $+\eta$. Si cette différence est positive, la fonction $f(x)$ est plus petite pour $x = c$ que pour les valeurs de x voisines de c; elle passe donc par un minimum. Au contraire, lorsque la différence $f(c+h) - f(c)$ est négative, la fonction est maximum pour $x = c$.

Lorsque la fonction $f(x)$ admet une dérivée pour la valeur c de la variable, cette dérivée doit être nulle. En effet, les deux quotients

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \quad \frac{f(c-h) - f(c)}{-h},$$

qui ont la même limite $f'(c)$ lorsque h tend vers zéro, sont de signes différents; il faut donc que leur limite commune $f'(c)$ soit nulle. Inversement, soit c une racine de l'équation $f'(x) = 0$, comprise entre a et b; supposons, pour prendre le cas général, que la première dérivée qui n'est pas nulle pour $x = c$ est la dérivée d'ordre n, et que cette dérivée est continue dans le voisinage de la valeur c. La formule générale de Taylor donne ici, en se limitant au terme de degré n,

$$f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(c+\theta h),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} [f^{(n)}(c) + \varepsilon],$$

ε étant infiniment petit avec h. Soit η un nombre positif tel que x variant de $c - \eta$ à $c + \eta$, la valeur absolue de ε soit moindre que $|f^{(n)}(c)|$; pour ces valeurs de x, $f^{(n)}(c) + \varepsilon$ a le même signe que $f^{(n)}(c)$ et, par suite, $f(c+h) - f(c)$ a le signe de $h^n f^{(n)}(c)$. Si n est impair, on voit que cette différence change de signe avec h; il n'y a ni maximum ni minimum pour $x = c$. Si n est pair, $f(c+h) - f(c)$ a le même signe que $f^{(n)}(c)$, que h soit positif ou négatif; la fonction est minimum si $f^{(n)}(c)$ est positif, et maximum si $f^{(n)}(c)$ est négatif. En résumé, pour que la fonction soit maximum ou minimum pour $x = c$, il faut et il suffit que la première dérivée qui ne s'annule pas pour $x = c$ soit *d'ordre pair*.

En langage géométrique, les conditions précédentes signifient que la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point A d'abscisse c est parallèle à Ox, et, en outre, que le point A n'est pas un point d'inflexion.

Remarques. — Lorsque les conditions dans lesquelles nous nous sommes placés ne sont pas réalisées, une fonction $f(x)$ peut être maximum ou minimum sans que la dérivée $f'(x)$ s'annule. Par exemple, si la dérivée est infinie pour $x = c$, il suffit que cette dérivée change de signe pour que la fonction présente un maximum ou un minimum; ainsi la fonction $y = x^{\frac{2}{3}}$ est minimum pour $x = 0$, et la courbe correspondante présente un rebroussement à l'origine, avec l'axe des y pour tangente.

Lorsque, d'après la nature de la question, la variable x ne peut prendre que les valeurs comprises entre deux limites a et b, il peut se faire que ces valeurs limites donnent les maxima ou les minima absolus de la fonction $f(x)$, sans que la dérivée $f'(x)$ soit nulle. Supposons, pour prendre un exemple, que l'on cherche la plus courte distance d'un point fixe P de coordonnées $(a, 0)$ au cercle C qui a pour équation $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. En prenant pour variable indépendante l'abscisse x d'un point M du cercle C, on a

$$d^2 = \overline{PM}^2 = (x - a)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2,$$

ou, en tenant compte de l'équation du cercle,

$$d^2 = R^2 + a^2 - 2ax.$$

L'application de la règle générale conduirait à chercher les racines de l'équation dérivée $2a = 0$, ce qui est absurde. Mais on s'explique cette contradiction apparente en observant que, d'après la nature de la question, la variable x ne peut varier qu'entre $-R$ et $+R$. Si a est positif, d^2 est minimum pour $x = R$, et maximum pour $x = -R$.

56. Fonctions de deux variables. — Soit $z = f(x, y)$ une fonction continue des deux variables x, y, lorsque le point M de coordonnées (x, y) reste à l'intérieur d'une aire Ω, limitée par un contour C. On dit que cette fonction $f(x, y)$ est maximum ou

minimum pour un point (x_0, y_0) de l'aire Ω lorsque l'on peut trouver un nombre positif η tel que la différence

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

conserve un signe constant, pour tous les systèmes de valeurs des accroissements h et k, moindres que η en valeur absolue. Si l'on considère pour un moment y comme constant et égal à y_0, z devient une fonction de la seule variable x et, d'après le cas que nous venons d'étudier, la différence

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

ne peut conserver un signe constant pour les petites valeurs de h que si la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ est nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$; on démontre de la même façon que ces valeurs doivent aussi annuler $\frac{\partial f}{\partial y}$, de sorte que les systèmes qui rendent la fonction $f(x, y)$ maximum ou minimum doivent être cherchés parmi les solutions des deux équations simultanées

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Soit $x = x_0$, $y = y_0$ une solution de ces deux équations. Nous supposerons que les dérivées partielles du second ordre de $f(x, y)$ sont continues dans le voisinage des valeurs x_0, y_0 et ne sont pas toutes nulles pour $x = x_0$, $y = y_0$, et que les dérivées du troisième ordre existent. La formule de Taylor nous donne

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{1.2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(3)}_{\substack{x_0+\theta h \\ y_0+\theta k}}; \end{aligned} \right.$$

pour les valeurs de h et de k, voisines de zéro, c'est évidemment le trinome

$$h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$$

qui donne son signe au second membre, et l'on prévoit d'avance que la discussion du signe de ce trinome va jouer un rôle prépondérant.

Pour qu'il y ait maximum ou minimum pour $x = x_0$, $y = y_0$, il faut et il suffit que la différence Δ conserve un signe constant lorsque le point $(x_0 + h, y_0 + k)$ reste compris à l'intérieur d'un carré assez petit ayant pour centre le point (x_0, y_0). Cette différence Δ conservera donc aussi un signe constant lorsque le point $(x_0 + h, y_0 + k)$ restera à l'intérieur d'un cercle de rayon assez petit de centre (x_0, y_0), et inversement; car on peut remplacer un carré par le cercle inscrit et réciproquement. Soit donc C un cercle de rayon r décrit du point (x_0, y_0) comme centre; on obtient tous les points intérieurs à ce cercle en posant

$$h = \rho \cos\varphi, \qquad k = \rho \sin\varphi,$$

et faisant varier φ de o à 2π, et ρ de $-r$ à $+r$. On pourrait même se contenter de donner à ρ des valeurs positives, mais il vaut mieux, pour la suite, ne pas introduire cette restriction. En faisant cette substitution dans Δ, il vient

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}(A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi) + \frac{\rho^3}{6}L,$$

en posant

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}, \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}, \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2},$$

L étant une fonction dont il est inutile d'écrire l'expression développée, mais qui conserve une valeur finie dans le voisinage du point (x_0, y_0). Cela posé, nous avons plusieurs cas à distinguer, suivant le signe de $B^2 - AC$.

Premier cas. — Soit $B^2 - AC > o$. L'équation

$$A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi = o$$

admet deux racines réelles en $\operatorname{tang}\varphi$, et le premier membre est la différence de deux carrés, de sorte que l'on peut écrire

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}[\alpha(a\cos\varphi + b\sin\varphi)^2 - \beta(a'\cos\varphi + b'\sin\varphi)^2] + \frac{\rho^3}{6}L,$$

où

$$\alpha > o, \qquad \beta > o, \qquad ab' - ba' \neq o.$$

Si l'on attribue à l'angle φ une valeur telle que l'on ait

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi = o,$$

Δ sera négatif pour les valeurs infiniment petites de ρ ; au contraire, si l'on prend pour φ un angle tel que $a' \cos\varphi + b' \sin\varphi = 0$, Δ sera positif pour les valeurs infiniment petites de ρ. Il est donc impossible de trouver un nombre r tel que la différence Δ conserve un signe constant lorsque la valeur absolue de ρ est inférieure à r, quel que soit l'angle φ. La fonction $f(x, y)$ n'est ni maximum, ni minimum, pour $x = x_0$, $y = y_0$.

Deuxième cas. — Soit $B^2 - AC < 0$. Le trinome

$$A \cos^2\varphi + 2B \cos\varphi \sin\varphi + C \sin^2\varphi$$

ne s'annule pas lorsque φ varie de 0 à 2π. Soit m une limite inférieure de sa valeur absolue ; soit, d'autre part, H une limite supérieure de la valeur absolue de la fonction L dans un certain cercle de rayon R et de centre (x_0, y_0). Désignons par r un nombre positif inférieur à R et à $\frac{3m}{H}$; à l'intérieur du cercle de rayon r, la différence Δ aura le même signe que le coefficient de ρ^2, c'est-à-dire que A ou C. La fonction $f(x, y)$ est donc maximum ou minimum pour $x = x_0$, $y = y_0$.

En résumé, si au point x_0, y_0, on a

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} > 0,$$

il n'y a ni maximum ni minimum. Si l'on a

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} < 0,$$

il y a maximum ou minimum, suivant le signe des deux dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$. Il y a maximum, si ces dérivées sont négatives, minimum si elles sont positives.

57. Étude du cas ambigu. — Le cas où $B^2 - AC = 0$ échappe à la discussion précédente. La Géométrie montre bien à quoi tient la difficulté du problème dans ce cas spécial. Soit S la surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$; si la fonction $f(x, y)$ est maximum ou minimum en un point (x_0, y_0), dans le voisinage

duquel la fonction et ses dérivées sont continues, on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0,$$

ce qui montre que le plan tangent à la surface S au point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) doit être parallèle au plan des xy. Pour que ce point corresponde à un maximum ou à un minimum, il faut en outre que, dans le voisinage du point M_0, la surface S soit tout entière d'un même côté du plan tangent, et l'on est ainsi ramené à l'étude d'une surface par rapport à un plan tangent dans les environs du point de contact.

Imaginons que l'on ait transporté l'origine au point de contact; le plan tangent étant le plan des xy, l'équation de la surface est de la forme

$$(24) \qquad z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2 y + 3\gamma xy^2 - \delta y^3,$$

a, b, c étant des constantes et α, β, γ, δ des fonctions de x, y qui restent finies lorsque x et y tendent vers zéro. Cette équation est identique, au fond, à l'équation (19) où l'on aurait remplacé x_0 et y_0 par zéro, h et k par x et y respectivement.

Pour savoir si la surface S est située tout entière d'un même côté du plan des xy dans le voisinage de l'origine, il suffit d'étudier l'intersection de cette surface par le plan des xy. Or cette intersection est représentée par l'équation

$$(25) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x^3 + \ldots = 0,$$

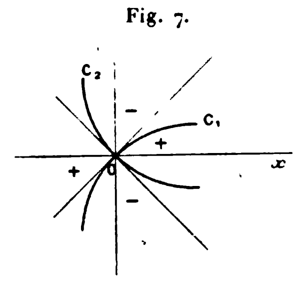
et présente un point double à l'origine des coordonnées. Si $b^2 - ac$ est négatif, l'origine est un point double isolé (n° 53) et l'équation (25) n'admet pas d'autre solution que $x = y = 0$, lorsque le point (x, y) reste à l'intérieur d'un cercle C de rayon assez petit r, décrit de l'origine comme centre. Le premier membre de l'équation (25) conserve un signe constant lorsque le point (x, y) se meut à l'intérieur de ce cercle. Tous les points de la surface S qui se projettent à l'intérieur du cercle C sont donc situés d'un même côté du plan des xy, sauf l'origine. C'est le cas où la fonction $f(x, y)$ présente un maximum ou un minimum. La portion de la surface S voisine de l'origine est analogue à une portion de sphère ou d'ellipsoïde.

Si $b^2 - ac > 0$, l'intersection de la surface S par le plan tangent présente deux branches de courbe distinctes C_1, C_2, passant par l'origine; les tangentes à ces deux branches de courbe à l'origine sont représentées par l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

Imaginons un point (x, y) mobile dans le voisinage de l'origine; lorsque ce point traverse une des branches de courbe C_1, C_2, le premier membre de l'équation (25) change de signe en s'annulant. On a donc, en attribuant à chaque région du plan voisine de l'origine le signe du premier membre de l'équation (25), une disposi-

Fig. 7.



tion analogue à celle de la *fig.* 7. Parmi les points de la surface qui se projettent sur le plan des xy à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre l'origine, il y en a toujours au-dessus du plan des xy et d'autres au-dessous, quelque petit que soit le rayon de ce cercle. La surface est disposée par rapport à son plan tangent comme un hyperboloïde à une nappe ou un paraboloïde hyperbolique. La fonction $f(x, y)$ n'est ni maximum ni minimum pour l'origine.

Le cas où $b^2 - ac = 0$ est précisément le cas où la courbe d'intersection de la surface par son plan tangent présente un point de rebroussement à l'origine, cas dont nous avons réservé l'étude. Si l'intersection se compose de deux branches distinctes passant par l'origine, il n'y aura ni maximum ni minimum, car la surface traverse encore son plan tangent. Mais si l'origine est un point double isolé, ou si l'intersection se compose de deux branches confondues, la fonction $f(x, y)$ sera maximum ou minimum.

58. Pour reconnaître dans lequel des deux cas on se trouve, il faut tenir compte des valeurs des dérivées du troisième ordre et du quatrième ordre,

et quelquefois des dérivées d'ordre plus élevé. La discussion suivante, qui est d'ailleurs suffisante le plus souvent dans la pratique, ne s'applique qu'aux circonstances les plus générales. Lorsque $b^2 - ac = 0$, on peut écrire l'équation de la surface, en poussant le développement de Taylor jusqu'aux termes du quatrième ordre,

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} z = f(x,y) = {} & A(x \sin\omega - y\cos\omega)^2 \\ & + \varphi_3(x,y) + \frac{1}{24}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(4)}_{\theta x, \theta y}, \end{aligned} \right.$$

et nous supposerons, pour fixer les idées, $A > 0$. Pour que la surface S soit tout entière d'un même côté du plan des xy dans le voisinage de l'origine, il est nécessaire que toutes les courbes d'intersection de cette surface par des plans passant par Oz soient d'un même côté du plan xOy dans les environs de l'origine. Or, si nous coupons la surface par le plan

$$y = x \operatorname{tang}\varphi,$$

l'équation de la courbe d'intersection s'obtient en posant dans l'équation (26)

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi$$

(les axes étant Oz et la trace du plan sécant sur xOy), ce qui donne

$$z = A\rho^2(\cos\varphi\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi)^2 + K\rho^3 + L\rho^4,$$

K désignant un coefficient indépendant de ρ; si l'on a $\operatorname{tang}\omega \gtrless \operatorname{tang}\varphi$, z sera positif pour les valeurs infiniment petites de ρ. Toutes ces sections sont donc au-dessus du plan des xy dans le voisinage de l'origine. Coupons maintenant par le plan

$$y = x \operatorname{tang}\omega:$$

si la valeur correspondante de K n'est pas nulle, le développement de z est de la forme

$$z = \rho^3(K + \xi)$$

et change de signe avec ρ. Il s'ensuit que la section de la surface par le plan précédent présente un point d'inflexion à l'origine et traverse le plan des xy; la fonction $f(x,y)$ n'est donc ni maximum ni minimum à l'origine. C'est ce qui a lieu lorsque la section de la surface par son plan tangent présente un point de rebroussement de première espèce, comme par exemple la surface

$$z = y^2 - x^3.$$

Si, pour la section considérée, on a $K = 0$, on poussera le développement jusqu'aux termes du quatrième ordre, et l'on aura pour z une expression de la forme

$$z = \rho^4(K_1 + \varepsilon'),$$

K_1 étant une constante dont il serait facile d'avoir l'expression au moyen des dérivées du quatrième ordre; nous supposerons que ce coefficient n'est pas nul. Pour des valeurs infiniment petites de ρ, z a le signe de K_1:

si K_1 est négatif, la section est au-dessous du plan des xy dans le voisinage de l'origine. Il n'y a encore ni maximum ni minimum pour z; c'est ce qui a lieu, par exemple, pour la surface $z = y^2 - x^4$, dont l'intersection par le plan des xy se compose des deux paraboles $y = \pm x^2$. On voit donc que, si l'on n'a pas à la fois $K = 0$, $K_1 > 0$, il est inutile de pousser le calcul plus loin; on peut affirmer que la surface traverse son plan tangent dans le voisinage de l'origine.

Lorsqu'on a en même temps $K = 0$, $K_1 > 0$, toutes les sections de la surface par des plans passant par Oz sont au-dessus du plan des xy dans le voisinage de l'origine. Mais cela ne suffit pas pour pouvoir affirmer que la surface ne traverse pas son plan tangent, comme le prouve l'exemple de la surface

$$z = (y - x^2)(y - 2x^2),$$

qui coupe son plan tangent suivant deux paraboles dont l'une est intérieure à l'autre. Pour que la surface ne traverse pas son plan tangent, il faut en outre que, si l'on coupe cette surface par un cylindre quelconque ayant ses génératrices parallèles à Oz et passant par Oz, la courbe d'intersection soit au-dessus du plan des xy. Soit $y = \varphi(x)$ l'équation de la trace de ce cylindre sur le plan des xy, la fonction $\varphi(x)$ étant nulle pour $x = 0$; la fonction $F(x) = f[x, \varphi(x)]$ doit être minimum pour $x = 0$, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$. Afin de simplifier les calculs, je supposerai que l'on a choisi les axes de coordonnées de façon que l'équation de la surface soit de la forme

$$z = Ay^2 + \varphi_3(x, y) + \ldots,$$

où A est positif; avec ce système d'axes, on a pour l'origine

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \, \partial y_0} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} > 0.$$

Les dérivées de la fonction $F(x)$ ont pour expressions

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x),\\
F''(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'^2(x) + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi''(x),\\
F'''(x) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\varphi'(x) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\varphi'^2(x) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\varphi'^3(x)\\
&\quad + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\varphi''(x) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'\varphi'' + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi'''(x),\\
F^{\text{IV}}(x) &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y}\varphi'(x) + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2}\varphi'^2 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3}\varphi'^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\varphi'^4\\
&\quad + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\varphi'' + 12\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\varphi'\varphi'' + 6\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\varphi'^2\varphi''\\
&\quad + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\varphi''' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4\varphi'\varphi''' + 3\varphi''^2) + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi^{\text{IV}}(x);
\end{aligned}$$

pour $x = y = 0$, ces formules donnent

$$F'(0) = 0, \qquad F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi'(0)]^2.$$

Si $\varphi'(0)$ n'est pas nul, la fonction $F(x)$ présente bien un minimum pour $x = 0$, ce qui était facile à prévoir d'après la discussion précédente. Si l'on suppose $\varphi'(0) = 0$, il vient

$$F'(0) = 0, \qquad F''(0) = 0, \qquad F'''(0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3},$$

$$F^{\text{IV}}(0) = \frac{\partial^4 f}{\partial x_0^4} + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2 \partial y_0}\varphi''(0) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi''(0)]^2$$

pour que $F(x)$ soit minimum, il faut que $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_0^3}$ soit nul, et en outre que le trinome du second degré en $\varphi''(0)$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_0^4} + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2 \partial y_0}\varphi''(0) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi''(0)]^2;$$

soit positif, quelle que soit la valeur de $\varphi''(0)$.

Il est facile de vérifier que ces conditions ne sont pas satisfaites pour la fonction considérée tout à l'heure $z = y^2 - 3x^2y + 2x^4$, tandis qu'elles le sont pour la fonction $z = y^2 + x^4$. Il est évident, en effet, que cette dernière surface est tout entière au-dessus du plan des xy.

Je ne pousserai pas plus loin la discussion, qui exigerait, pour être rendue absolument rigoureuse, des considérations fort délicates, et je renverrai le lecteur désireux d'approfondir ce sujet à un important Mémoire de M. Ludwig Scheffer, dans le t. XXXV des *Mathematische Annalen*.

59. Fonctions de trois variables. — Soit $u = f(x, y, z)$ une fonction continue des trois variables x, y, z. On dit encore qu'elle est maximum ou minimum pour un système de valeurs x_0, y_0, z_0 lorsque la différence

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0)$$

conserve un signe constant pour tous les systèmes de valeurs de h, k, l, moindres en valeur absolue qu'un nombre positif η suffisamment petit. Si l'on considère une seule des trois variables x, y, z comme ayant reçu un accroissement, les deux autres variables étant traitées comme des constantes, on voit comme plus haut que u ne peut être maximum ou minimum que si l'on a à la fois

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z_0} = 0,$$

en admettant, bien entendu, que ces dérivées sont continues dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, z_0. Supposons qu'on ait trouvé un système de solutions de ces trois équations simultanées, et soit M_0 le point de l'espace de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Il y aura maximum ou minimum si l'on peut trouver une sphère de centre M_0, telle que $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ conserve un signe constant lorsque le point x, y, z reste à l'intérieur de cette sphère. Représentons les coordonnées d'un point voisin par

$$x = x_0 + \rho\alpha, \qquad y = y_0 + \rho\beta, \qquad z = z_0 + \rho\gamma,$$

α, β, γ étant liés par la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, et remplaçons $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ par $\rho\alpha$, $\rho\beta$, $\rho\gamma$ dans le développement de $f(x, y, z)$ par la formule de Taylor; il vient

$$\Delta = \rho^2[\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho L],$$

$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ désignant une forme quadratique en α, β, γ dont les coefficients sont les dérivées du second ordre de $f(x, y, z)$ et L une fonction qui reste finie dans le voisinage du point M_0. Cette forme quadratique peut s'exprimer par une somme de trois carrés de fonctions linéaires distinctes de α, β, γ, multipliés par des facteurs constants, en négligeant le cas exceptionnel où le discriminant de cette forme serait nul. Soit

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = a P^2 + a' P'^2 + a'' P''^2;$$

si les trois coefficients a, a', a'' sont de même signe, la forme quadratique $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ reste supérieure en valeur absolue à un certain minimum lorsque le point α, β, γ décrit la sphère

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

et par conséquent Δ conserve le signe de a, a', a'' lorsque ρ est inférieur à une certaine limite. La fonction $f(x, y, z)$ est donc maximum ou minimum.

Si les trois coefficients a, a', a'' ne sont pas de même signe, il n'y a ni maximum ni minimum. Supposons, par exemple, $a > 0$, $a' < 0$; prenons pour α, β, γ des valeurs satisfaisant aux relations $P' = 0$, $P'' = 0$. Ces valeurs n'annulent pas P, et Δ sera positif pour les petites valeurs de ρ. Si l'on prend au contraire des valeurs de α, β, γ vérifiant les relations $P = 0$, $P'' = 0$, Δ sera négatif pour les petites valeurs de ρ.

La méthode est la même, quel que soit le nombre des variables indépendantes; c'est toujours la discussion d'une forme quadratique qui joue un rôle prépondérant. Dans le cas d'une fonction de trois variables seulement $u = f(x, y, z)$, on peut remarquer que la question revient à étudier la nature d'une surface dans le voisinage d'un point singulier. Considérons en effet la surface Σ qui a pour équation

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

cette surface passe évidemment par le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et, si la fonction $f(x, y, z)$ est maximum ou minimum, ce point M_0 est un point singulier de Σ. Cela posé, si le cône des tangentes en M_0 est imaginaire, on a vu que $F(x, y, z)$ conservait un signe constant à l'intérieur d'une sphère de centre M_0 et de rayon assez petit; il y a effectivement maximum ou minimum pour $f(x, y, z)$. Mais si le cône des tangentes est réel, ou se décompose en deux plans réels et distincts, il y a plusieurs nappes de surface passant au point M_0, et $F(x, y, z)$ change de signe lorsque le point (x, y, z) traverse une de ces nappes.

60. **Distance d'un point à une surface.** — Soit à trouver les valeurs maxima et minima de la distance d'un point fixe (a, b, c) à une surface S représentée par l'équation $F(x, y, z) = 0$. Le carré de la distance

$$u = d^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

est une fonction de deux variables indépendantes seulement, x et y par exemple, si l'on considère z comme une fonction de x et de y définie par l'équation $F = 0$. Si u est maximum ou minimum pour un point (x, y, z) de la surface, on doit avoir, pour les coordonnées de ce point

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = (x - a) + (z - c)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = (y - b) + (z - c)\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

d'autre part, de l'équation $F = 0$, on tire

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

et les relations précédentes deviennent

$$\frac{x-a}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y-b}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z-c}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

ce qui montre que la normale à la surface S au point (x, y, z) passe par le point (a, b, c). Les points cherchés sont donc, en laissant de côté les points singuliers de la surface S, les pieds des normales abaissées du point (a, b, c) sur la surface S. Pour examiner si un de ces points répond effectivement à un maximum ou à un minimum, nous prendrons ce point pour origine et le plan tangent pour plan des xy, de façon que le point donné soit sur l'axe Oz. La fonction à étudier est alors

$$u = x^2 + y^2 + (z-c)^2,$$

z étant une fonction $f(x, y)$, qui est nulle ainsi que ses dérivées du premier ordre pour $x = y = 0$. En désignant par r, s, t les dérivées partielles du second ordre de z, on a, pour l'origine,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2(1-cr), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -2cs, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(1-ct),$$

et tout revient à étudier le signe du polynome

$$\Delta(c) = c^2 s^2 - (1-cr)(1-ct) = c^2(s^2 - rt) + (r+t)c - 1;$$

les racines de l'équation $\Delta(c) = 0$ sont toujours réelles, en vertu de l'identité $(r+t)^2 + 4(s^2 - rt) = 4s^2 + (r-t)^2$. Cela posé, plusieurs cas sont à distinguer, suivant le signe de $s^2 - rt$.

Premier cas. — Soit $s^2 - rt < 0$. L'équation $\Delta(c) = 0$ a deux racines de même signe c_1 et c_2, et l'on peut écrire $\Delta(c) = (s^2 - rt)(c - c_1)(c - c_2)$. Marquons les points A_1 et A_2 de l'axe des z de coordonnées c_1 et c_2; ces deux points sont du même côté de l'origine et, en supposant r et t positifs, ce qu'on peut toujours faire, ils sont tous les deux sur la partie positive de Oz. Si le point donné $A(0, 0, c)$ est en dehors du segment A_1A_2, $\Delta(c)$ est négatif et la distance OA est maximum ou minimum. Pour savoir lequel des deux cas se présente, il faut consulter le signe de $1 - cr$; ce coefficient ne s'annule que pour la valeur $c = \frac{1}{r}$, qui est comprise entre c_1 et c_2, car on a $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{s^2}{r^2}$. Or, pour $c = 0$, $1 - cr$ est positif; il est donc positif si le point A est du même côté que l'origine par rapport au segment A_1A_2, et la distance OA est minimum. Elle est au contraire maximum si le point A est situé de l'autre côté que l'origine par rapport au segment A_1A_2. Si le point A est entre les points A_1 et A_2, la distance n'est ni maximum ni minimum. Il y a doute pour les points A_1 et A_2 eux-mêmes.

Deuxième cas. — Soit $s^2 - rt > 0$. Les racines c_1 et c_2 de $\Delta(c) = 0$ sont l'une positive, l'autre négative, et les points A_1 et A_2 sont de part et d'autre de l'origine. Si le point A n'est pas compris entre A_1 et A_2, $\Delta(c)$ est positif, et il n'y a ni maximum ni minimum. Si le point A est compris entre A_1 et A_2, $\Delta(c)$ est négatif, $1 - cr$ est positif et, par suite, la distance OA est minimum.

Troisième cas. — Soit $s^2 - rt = 0$. On a $\Delta(c) = (r+t)(c - c_1)$. On voit comme tout à l'heure que la distance AO est minimum si le point A est du même côté que l'origine par rapport au point A_1 de coordonnées $(0, 0, c_1)$, et qu'il n'y a ni maximum ni minimum si le point A_1 est entre le point A et l'origine.

Les points A_1 et A_2 jouent un rôle fondamental dans l'étude de la courbure; ce sont les centres de courbure *principaux* de la surface S au point O.

61. **Maxima et minima des fonctions implicites.** — Il arrive souvent que l'on a à chercher le maximum ou le minimum d'une fonction de plusieurs variables, ces variables étant liées par une ou plusieurs relations. Soit, par exemple, $\omega = f(x, y, z, u)$ une fonction des quatre variables x, y, z, u, assujetties à vérifier les deux relations

$$f_1(x, y, z, u) = 0, \qquad f_2(x, y, z, u) = 0.$$

Considérons, pour fixer les idées, x et y comme deux variables indépendantes, z et u comme des fonctions de x et de y définies par les relations précédentes. Les conditions pour que ω soit maximum ou minimum sont les suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

d'ailleurs les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$ sont données par les relations

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

et l'élimination de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$ conduit aux deux relations

$$(27) \qquad \frac{D(f, f_1, f_2)}{D(x, z, u)} = 0, \qquad \frac{D(f, f_1, f_2)}{D(y, z, u)} = 0,$$

qui, jointes aux relations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, déterminent les valeurs de x, y, z, u correspondant à un maximum ou à un minimum. Or les deux équations (27) expriment que l'on peut trouver pour λ et μ des valeurs telles que l'on ait

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial u} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut donc remplacer les deux conditions (27) par les quatre équations (28), en considérant λ et μ comme deux inconnues auxiliaires.

La démonstration est évidemment générale, et l'on peut énoncer la règle pratique suivante : *Étant donnée une fonction*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

de n variables liées par h relations distinctes

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_h = 0,$$

pour trouver les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *qui rendent cette fonction maximum ou minimum, il faut égaler à zéro les dérivées partielles de la fonction auxiliaire*

$$f + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_h \varphi_h,$$

en regardant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ *comme des constantes.*

62. **Autre exemple.** — Voici un autre exemple où le minimum ne s'obtient pas toujours en égalant à zéro les dérivées partielles. Étant donné un triangle ABC, soit à trouver le point P du plan de ce triangle pour lequel la somme des distances PA + PB + PC est la plus petite possible. Soient (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) les coordonnées des sommets A, B, C, dans un système d'axes rectangulaires; nous avons à chercher le minimum de la fonction

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} z = {} & \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2} + \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2} \\ & + \sqrt{(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2}, \end{aligned} \right.$$

les trois radicaux étant pris avec leur détermination positive. Cette équation (29) représente une surface S qui est évidemment tout entière au-dessus du plan des xy, et la question revient à trouver le point de cette

surface le plus rapproché du plan des xy. On tire de la relation (29)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}} + \frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}} + \frac{x-a_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-b_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}} + \frac{y-b_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}} + \frac{y-b_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}};$$

nous voyons que ces dérivées sont continues, sauf dans le voisinage des points A, B, C, où elles deviennent indéterminées. La surface S a donc trois points singuliers, qui se projettent aux trois sommets du triangle donné. Le minimum de z est donné par un point de la surface S où le plan tangent est parallèle au plan des xy, ou par un de ces points singuliers.

Pour résoudre les équations $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, écrivons-les

$$\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}} + \frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}} = -\frac{x-a_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}},$$

$$\frac{y-b_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}} + \frac{y-b_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}} = -\frac{y-b_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}};$$

si on les ajoute, après les avoir élevées au carré, il vient

$$1 + 2\frac{(x-a_1)(x-a_2)+(y-b_1)(y-b_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}} = 0.$$

L'interprétation géométrique de cette condition est bien facile : si nous appelons α, β les cosinus des angles que fait la direction PA avec Ox et Oy, et de même α' et β' les cosinus des angles que fait la direction PB avec les axes, on peut l'écrire

$$1 + 2(\alpha\alpha' + \beta\beta') = 0$$

ou, en appelant ω l'angle APB,

$$2\cos\omega + 1 = 0.$$

L'équation précédente exprime donc que du point P on voit le segment AB sous un angle de 120°. Pour la même raison, chacun des angles BPC et CPA doit être de 120°. Il est clair que le point P [1] doit être à l'intérieur du triangle ABC, et qu'il ne peut exister un point jouissant de cette propriété que si aucun des angles du triangle ABC n'est égal ou supérieur à 120°.

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

Lorsqu'il en est ainsi, le point P est unique et s'obtient par l'intersection de deux arcs de cercle faciles à tracer. Dans ce cas, le minimum est fourni par le point P ou par l'un des sommets du triangle; mais il est facile de vérifier que la somme $PA + PB + PC$ est plus petite que la somme de deux des côtés du triangle. Les angles APB et APC étant de 120°, les deux triangles PAC, PBA nous donnent en effet

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}, \qquad AC = \sqrt{a^2 + c^2 + ac},$$

en posant $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$; or on a

$$\sqrt{a^2 + b^2 + ab} > b + \frac{a}{2}, \qquad \sqrt{a^2 + c^2 + ac} > c + \frac{a}{2},$$

comme on le vérifie immédiatement en élevant au carré, et par suite

$$AB + AC > a + b + c.$$

C'est donc le point P qui donne le minimum.

Lorsque le triangle ABC a un angle supérieur ou égal à 120°, il n'existe pas de point P d'où l'on voie les trois côtés du triangle ABC sous un angle de 120°, et la surface S n'admet pas de plan tangent parallèle au plan des xy. Le minimum est alors fourni par l'un des sommets du triangle, et il est évident que c'est par le sommet de l'angle obtus. C'est ce qu'il est aisé de vérifier géométriquement.

63. **Théorème de d'Alembert.** — Soit $F(x, y)$ un polynome à deux variables x, y, ordonné par groupes homogènes de degré croissant,

$$F(x, y) = H + \varphi_p(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \ldots + \varphi_m(x, y),$$

H étant constant. Si l'équation $\varphi_p(x, y) = 0$, considérée comme une équation en $\frac{y}{x}$, admet une racine simple, il est impossible que la fonction $F(x, y)$ soit maximum ou minimum pour $x = y = 0$. Il résulte en effet de la discussion qui a été faite plus haut que l'on pourra trouver sur la surface $z + H = F(x, y)$ des sections planes situées dans des plans passant par l'axe Oz, dont les unes seront situées au-dessus du plan des xy, les autres au-dessous de ce plan, dans le voisinage de l'origine. On peut déduire de cette remarque une démonstration du théorème de d'Alembert. Soit $f(z)$ un polynome entier, de degré m à coefficients quelconques,

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m,$$

ou, en mettant en évidence les parties réelles et les parties imaginaires,
$f(x + iy) = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(x + iy) + \ldots + (a_m + ib_m)(x + iy)^m$
a_0, b_0, a_1, b_1, $\ldots$, a_m, b_m étant réels. On peut encore l'écrire

$$f(z) = P + iQ,$$

en posant

$$P = a_0 + a_1 x - b_1 y + \ldots,$$
$$Q = b_0 + b_1 x + a_1 y + \ldots,$$

et l'on a

$$|f(z)| = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Nous allons d'abord montrer que $|f(z)|$ ou, ce qui revient au même, $P^2 + Q^2$ ne peut être minimum pour $x = y = 0$, à moins que l'on n'ait $a_0 = b_0 = 0$. On peut écrire en effet, en employant les coordonnées polaires ρ et φ, et en supposant, pour plus de généralité, que le premier coefficient qui n'est pas nul à partir de A_0 est le coefficient A_p,

$$P = a_0 + (a_p \cos p\varphi - b_p \sin p\varphi)\rho^p + \ldots,$$
$$Q = b_0 + (b_p \cos p\varphi + a_p \sin p\varphi)\rho^p + \ldots,$$
$$P^2 + Q^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2\rho^p[(a_0 a_p + b_0 b_p)\cos p\varphi + (b_0 a_p - a_0 b_p)\sin p\varphi] + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur à p par rapport à ρ. Or l'équation

$$(a_0 a_p + b_0 b_p)\cos p\varphi + (b_0 a_p - a_0 b_p)\sin p\varphi = 0$$

donne $\operatorname{tang} p\varphi = K$, ce qui détermine p droites distinctes, faisant entre elles des angles égaux à $\frac{2\pi}{p}$. Il est donc impossible, d'après la remarque faite plus haut, que $P^2 + Q^2$ soit minimum pour $x = y = 0$, à moins que l'on n'ait à la fois

$$a_0 a_p + b_0 b_p = 0, \qquad b_0 a_p - a_0 b_p = 0,$$

et, comme $a_p^2 + b_p^2$ n'est pas nul, il faudra que l'on ait $a_0 = b_0 = 0$, c'est-à-dire que la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ soient nulles séparément.

Si $|f(z)|$ est minimum pour $x = \alpha$, $y = \beta$, on ramène ce cas au précédent en posant $z = \alpha + i\beta + z'$, et l'on en conclut que $|f(z)|$ ne peut être minimum sans que P et Q soient nuls séparément pour $x = \alpha$, $y = \beta$.

Le module de $f(z)$ doit passer par un minimum pour une valeur au moins de z, car ce module augmente indéfiniment lorsque le module de z augmente indéfiniment. On a, en effet, en posant $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,

$$P^2 + Q^2 = (a_m^2 + b_m^2)\rho^{2m} + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré inférieur à $2m$ en ρ, ce qu'on peut écrire

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = \rho^m\left(\sqrt{a_m^2 + b_m^2} + \varepsilon\right),$$

ε tendant vers zéro lorsque ρ croît indéfiniment. On peut donc décrire un cercle de rayon R assez grand pour que la valeur de $\sqrt{P^2 + Q^2}$ soit supérieure en tous les points de ce cercle à la valeur de cette même fonction

pour l'origine, par exemple; il s'ensuit qu'il y aura au moins un point

$$x = \alpha, \qquad y = \beta,$$

à l'intérieur de ce cercle, pour lequel $\sqrt{P^2+Q^2}$ sera minimum. D'après ce que nous venons de démontrer, le point $x=\alpha$, $y=\beta$ est un point d'intersection des deux courbes $P=0$, $Q=0$; ce qui revient à dire que $z=\alpha+\beta i$ est racine de l'équation $f(z)=0$.

Dans cet exemple, comme dans le précédent, nous admettons qu'une fonction de deux variables (x, y), continue à l'intérieur d'une aire fermée, atteint effectivement une valeur minimum à l'intérieur ou sur le contour de cette aire. C'est une propriété que l'on admet sans peine, mais que l'on démontre d'ailleurs en toute rigueur (*voir* plus loin, Chapitre VI).

EXERCICES.

1. Le nombre θ qui figure dans la forme du reste de Lagrange a pour limite $\frac{1}{n+2}$ lorsque h tend vers zéro, pourvu que $f^{(n+2)}(a)$ ne soit pas nul.

2. Soit $F(x)$ un déterminant d'ordre n dont tous les éléments sont des fonctions de x; la dérivée $F'(x)$ est la somme de n déterminants qui s'obtiennent en remplaçant successivement tous les éléments d'une ligne par leurs dérivées.

Que devient cet énoncé pour les dérivées d'ordre supérieur?

3. Trouver les valeurs maxima et minima de la distance d'un point à une courbe plane ou gauche, de deux points de deux courbes, de deux points de deux surfaces.

4. Les points d'une surface S, pour lesquels la somme des carrés des distances à n points fixes est maximum ou minimum, sont les pieds des normales abaissées sur cette surface du centre des moyennes distances des n points fixes donnés.

5. De tous les quadrilatères que l'on peut former avec quatre côtés donnés, celui qui a la plus grande surface est inscriptible dans une circonférence.

Extension aux polygones de n côtés.

6. Maximum du volume d'un parallélépipède rectangle inscrit dans un ellipsoïde.

7. Trouver les axes d'une quadrique à centre en considérant les sommets comme les points dont la distance au centre est maximum ou minimum.

8. Même problème pour les axes de la section centrale d'un ellipsoïde.

9. Trouver l'ellipse d'aire minimum passant par les trois sommets d'un triangle, et l'ellipsoïde de volume minimum passant par les quatre sommets d'un tétraèdre.

10. Trouver le point dont la somme des distances à deux droites données et à un point donné est minimum.

[JOSEPH BERTRAND.]

11. Démontrer les formules suivantes :

$$\log(x+2) = 2\log(x+1) - 2\log(x-1) + \log(x-2) + 2\left[\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5 + \dots\right]$$

[Série de BORDA];

$$\log(x+5) = \log(x+4) + \log(x+3) - 2\log x + \log(x-3) + \log(x-4) - \log(x-5) - 2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3 + \dots\right]$$

[Série de HARO].

CHAPITRE IV.

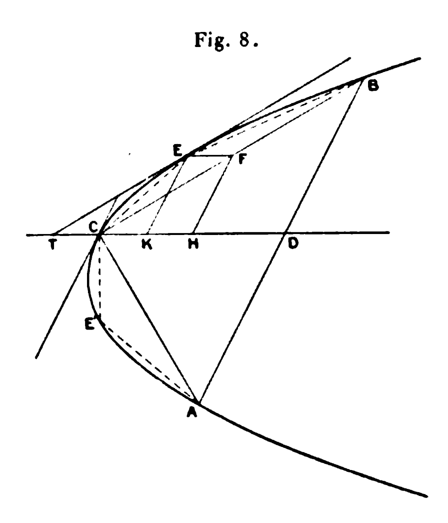
INTÉGRALES DÉFINIES

I. — MÉTHODES DIVERSES DE QUADRATURE.

64. **Quadrature de la parabole.** — La détermination de l'aire d'une courbe plane est un des problèmes qui ont le plus exercé la sagacité des géomètres. Parmi les exemples que nous ont laissés les anciens, un des plus célèbres est la quadrature de la parabole par Archimède; nous allons indiquer la méthode qu'il a suivie.

Soit à déterminer l'aire comprise entre l'arc de parabole ACB

Fig. 8.



et la corde AB. Menons le diamètre CD joignant le milieu D de AB au point C où la tangente est parallèle à AB, les cordes AC et BC, et prenons les points E et E' où la tangente est parallèle respectivement aux deux cordes BC et AC. Nous allons d'abord comparer l'aire du triangle BEC, par exemple, à celle

du triangle ABC. Menons la tangente ET qui coupe CD au point T, le diamètre EF qui coupe CB en F, et enfin les parallèles EK, FH à la corde AB. D'après une propriété élémentaire de la parabole, on a $TC = CK$; d'ailleurs $CT = EF = KH$ et, par suite, $EF = \frac{CH}{2} = \frac{CD}{4}$. Les aires des deux triangles BCE, BDC, ayant la base commune BC, sont entre elles comme les hauteurs, ou comme les droites EF, CD. L'aire du triangle BCE est donc égale au quart de l'aire du triangle BCD, ou au huitième de l'aire S du triangle ABC; l'aire du triangle ACE′ a évidemment la même valeur. En opérant de la même façon sur chacune des cordes BE, CE, CE′, E′A, on obtient quatre nouveaux triangles dont l'aire est égale à $\frac{S}{8^2}$, et ainsi de suite. La $n^{\text{ième}}$ opération conduira à 2^n triangles, l'aire de chacun d'eux étant égale à $\frac{S}{8^n}$. L'aire du segment de parabole est évidemment égale à la limite vers laquelle tend la somme des aires de tous ces triangles, lorsque n augmente indéfiniment, c'est-à-dire à la somme de la progression géométrique décroissante

$$S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \ldots + \frac{S}{4^n} + \ldots,$$

qui a pour valeur $\frac{4S}{3}$. On voit donc que l'aire cherchée est *égale aux* $\frac{2}{3}$ *de l'aire du parallélogramme construit sur* AB *et* CD.

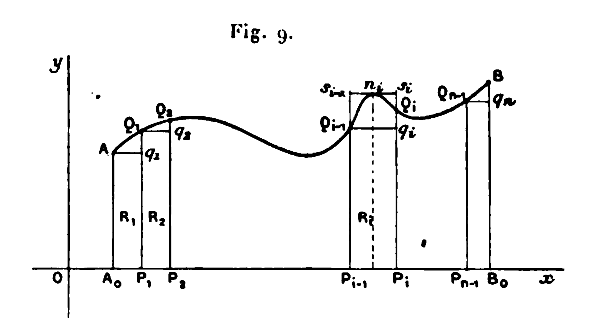
Tout en admirant l'ingéniosité de cette méthode, on ne peut s'empêcher de remarquer que le succès tient uniquement aux propriétés particulières de la parabole, et que le procédé n'a rien de général. Les autres exemples de quadrature dus aux anciens, que nous pourrions citer, ne feraient que confirmer cette remarque; chaque courbe nouvelle exigeait un nouvel artifice. Mais, quel que fût l'artifice employé, on décomposait toujours l'aire à évaluer en éléments dont le nombre augmentait indéfiniment, et il fallait chercher la limite de la somme de ces aires partielles. Laissant de côté les procédés particuliers (1),

(1) On trouvera, dans le *Traité* de Duhamel, un grand nombre d'exemples de déterminations d'aires, d'arcs et de volumes, par les procédés des anciens.

nous allons indiquer tout de suite la méthode générale de décomposition qui nous conduira tout naturellement au calcul intégral.

65. Méthode générale. — Soit, pour fixer les idées, à évaluer l'aire S comprise entre un arc de courbe AMB, un axe xx' qui ne rencontre pas cet arc, et les deux perpendiculaires AA_0 et BB_0 abaissées des points A et B sur xx'; nous supposerons de plus

Fig. 9.



qu'une parallèle à ces droites AA_0, BB_0, ne peut rencontrer l'arc AMB en plus d'un point, comme l'indique la *fig*. 9.

Décomposons le segment A_0B_0 en un certain nombre de parties, égales ou inégales, par des points de division P_1, P_2, ..., P_{n-1}, et par ces points de division menons des parallèles P_1Q_1, P_2Q_2, ..., $P_{n-1}Q_{n-1}$ à la droite AA_0, qui rencontrent l'arc AB aux points Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1} respectivement.

Puis par A menons une parallèle à xx' qui coupe P_1Q_1 au point q_1, par Q_1 une parallèle à xx' qui coupe P_2Q_2 au point q_2, et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi une suite de rectangles R_1, R_2, ..., R_i, ..., R_n; chacun d'eux peut être tout entier à l'intérieur du contour ABB_0A_0, mais il peut aussi, comme l'indique la figure, avoir une partie à l'extérieur de ce contour.

Nous désignerons par α_i l'aire du rectangle R_i, et par β_i l'aire limitée par le contour $P_{i-1}P_iQ_iQ_{i-1}$. Observons d'abord que chacun des rapports $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{\beta_i}{\alpha_i}, \dots$, tend vers l'unité lorsque le nombre des points de division augmente indéfiniment, de façon que toutes les distances A_0P_1, P_1P_2, ..., $P_{i-1}P_i$, ..., tendent vers zéro. En effet, le rapport $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$, par exemple, est évidemment

compris entre $\frac{l_i}{P_{i-1}Q_{i-1}}$ et $\frac{L_i}{P_{i-1}Q_{i-1}}$, l_i et L_i étant les distances maximum et minimum d'un point de l'arc $Q_{i-1}Q_i$ à l'axe xx'; il est clair que ces deux rapports tendent vers l'unité lorsque la distance $P_{i-1}P_i$ devient infiniment petite. Cela posé, le rapport

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n},$$

qui est compris entre le plus grand et le plus petit des rapports $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}$, aura aussi pour limite l'unité lorsque le nombre des rectangles augmente indéfiniment. Or le dénominateur de ce rapport est constant et égal à l'aire cherchée S; par suite, cette aire est aussi égale à la limite de la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, lorsque le nombre n des rectangles augmente indéfiniment, de façon à satisfaire à la condition indiquée plus haut.

Pour déduire de là une expression analytique de l'aire, supposons que l'on ait rapporté la courbe AB à un système d'axes rectangulaires, l'axe Ox coïncidant avec xx'. Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe AB; $f(x)$ est par hypothèse une fonction continue de x lorsque x varie entre les limites a et b, abscisses des points A et B. Si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ les abscisses des points de division $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, les bases des rectangles précédents sont $x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots, x_i - x_{i-1}, \ldots, b - x_{n-1}$, et les hauteurs sont de même $f(a), f(x_1), \ldots, f(x_{i-1}), \ldots, f(x_{n-1})$. L'aire S est donc égale à la limite de la somme

$$(1)\quad (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

lorsque le nombre n augmente indéfiniment, de façon que toutes les différences $x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots$, tendent vers zéro.

66. **Exemples.** — Si on divise la base A_0B_0 en n parties égales, de longueur h, $(b - a = nh)$, tous les rectangles ont la même base h, et les hauteurs sont respectivement

$$f(a),\quad f(a+h),\quad f(a+2h),\quad \ldots,\quad f[a+(n-1)h];$$

on a donc à chercher la limite de la somme

$$h\{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f[a+(n-1)h]\},$$

où

$$h = \frac{b-a}{n},$$

lorsque le nombre entier n augmente indéfiniment. Le calcul est facile lorsqu'on sait trouver la somme des valeurs de $f(x)$ pour des valeurs de x formant une progression arithmétique. C'est ce qui a lieu si $f(x)$ se réduit à une puissance entière de x, ou encore si l'on a $f(x) = \sin mx$ ou $f(x) = \cos mx$. .... Reprenons, par exemple, la parabole $x^2 = 2py$ et proposons-nous d'avoir l'aire comprise entre un arc OA de cette parabole, l'axe des x et la droite $x = a$, passant par l'extrémité A. La base étant divisée en n parties égales, de longueur h ($nh = a$), nous avons, d'après ce qui précède, à chercher la limite de la somme

$$\frac{h}{2p}[h^2 + 4h^2 + \ldots + (n-1)^2 h^2] = \frac{h^3}{2p}[1 + 4 + 9 + \ldots + (n-1)^2];$$

on a entre parenthèses la somme des carrés des $(n-1)$ premiers nombres, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, et la somme précédente est égale à

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{12pn^3} a^3.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, cette somme a évidemment pour limite $\frac{a^3}{6p} = \frac{1}{3} a \frac{a^2}{2p}$, ou le tiers du rectangle construit sur les deux coordonnées du point A, ce qui est bien d'accord avec le résultat obtenu plus haut.

Dans d'autres cas, comme dans l'exemple suivant dû à Fermat, il vaut mieux prendre pour abscisses des points de division des nombres en progression géométrique.

Soit à trouver l'aire comprise entre la courbe $y = Ax^\mu$, l'axe des x et les deux droites $x = a$, $x = b$, $(0 < a < b)$, l'exposant μ étant quelconque. Pour cela, nous insérerons, entre a et b, $n-1$ moyens géométriques, de façon à avoir la suite

$$a, \quad a(1+\alpha), \quad a(1+\alpha)^2, \quad \ldots, \quad a(1+\alpha)^{n-1}, \quad b,$$

le nombre α satisfaisant à la condition $a(1+\alpha)^n = b$; les nombres précédents étant pris pour abscisses des points de division, les

ordonnées correspondantes ont pour valeurs

$$A a^\mu, \quad A a^\mu (1+\alpha)^\mu, \quad A a^\mu (1+\alpha)^{2\mu}, \quad \ldots$$

et l'aire du $p^{\text{ième}}$ rectangle a pour expression

$$[a(1+\alpha)^p - a(1+\alpha)^{p-1}] A a^\mu (1+\alpha)^{(p-1)\mu} = A a^{\mu+1} \alpha (1+\alpha)^{(p-1)(\mu+1)}.$$

La somme des aires de tous ces rectangles est donc égale à

$$A a^{\mu+1} \alpha [1 + (1+\alpha)^{\mu+1} + (1+\alpha)^{2(\mu+1)} + \ldots + (1+\alpha)^{(n-1)(\mu+1)}];$$

si $\mu+1$ n'est pas nul, ce que nous supposerons d'abord, la somme entre parenthèses est égale à $\frac{(1+\alpha)^{n(\mu+1)}-1}{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}$ et, en remplaçant $a(1+\alpha)^n$ par b, on peut écrire la somme précédente

$$A(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \frac{\alpha}{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}.$$

Quand α tend vers zéro, le quotient $\frac{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}{\alpha}$ a pour limite la dérivée de $(1+\alpha)^{\mu+1}$ par rapport à α, pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire $\mu+1$; l'aire cherchée est donc égale à $\frac{A(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})}{\mu+1}$.

Lorsque $\mu = -1$, le calcul ne s'applique plus. La somme des aires des rectangles inscrits est égale à $nA\alpha$, et il faut chercher la limite du produit $n\alpha$, n et α étant liés par la relation

$$a(1+\alpha)^n = b.$$

On tire de là

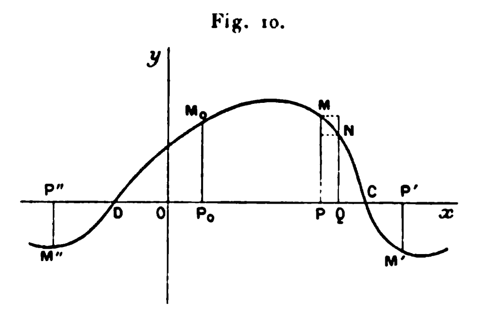
$$n\alpha = \log\frac{b}{a} \frac{\alpha}{\log(1+\alpha)} = \log\frac{b}{a} \frac{1}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

log désignant le logarithme népérien; lorsque α tend vers zéro, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite le nombre e, et le produit $n\alpha$ a pour limite $\log\frac{b}{a}$. L'aire cherchée est donc égale à $A \log\frac{b}{a}$.

67. **Fonctions primitives.** — L'invention du Calcul intégral a ramené le calcul d'une aire plane à la recherche d'une fonction

ayant pour dérivée une fonction connue. Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires, la fonction $f(x)$ étant continue. Considérons l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x, une ordonnée fixe M_0P_0 et une ordonnée variable MP comme fonction de l'abscisse x de l'ordonnée variable. Cette aire A est évidemment une fonction continue de x, tant que la fonction $f(x)$ reste elle-même continue. Afin d'embrasser tous les cas possibles, nous conviendrons de désigner par A la somme algébrique des aires limitées par la courbe donnée, l'axe des x et les droites M_0P_0, MP, chacune des portions dont peut se composer cette aire étant affectée d'un signe, le signe + pour les aires à droite de M_0P_0 et au-dessus de Ox, le signe — pour les aires à

Fig. 10.



droite de M_0P_0 et au-dessous de Ox, et la convention contraire étant faite pour les aires à gauche de M_0P_0. Ainsi, lorsque MP vient en $M'P'$, on prendra A égal à la différence des deux aires

$$M_0P_0C - M'P'C;$$

de même, si MP est en $M''P''$, on aura $A = M''P''D - M_0P_0D$.

Ces conventions étant faites, nous allons montrer que la fonction continue A ainsi définie a pour dérivée $f(x)$. Prenons, comme l'indique la figure, deux ordonnées voisines MP, NQ, d'abscisses x et $x + \Delta x$. L'accroissement de l'aire ΔA est évidemment compris entre les deux rectangles qui auraient pour base commune la distance PQ et pour hauteurs respectives la plus grande et la plus petite des ordonnées de l'arc MN; désignons ces ordonnées maxima et minima par H et h, nous pouvons écrire

$$h\,\Delta x < \Delta A < H\,\Delta x,$$

ou, en divisant par Δx, $h < \frac{\Delta A}{\Delta x} < H$. Lorsque Δx tend vers zéro, la fonction $f(x)$ étant continue, H et h ont pour limite commune MP ou $f(x)$; la fonction A a donc pour dérivée $f(x)$. Le lecteur vérifiera sans peine que la conclusion est la même, quelle que soit la position du point M.

Si l'on connaît déjà une fonction primitive de $f(x)$, c'est-à-dire une fonction $F(x)$ ayant pour dérivée $f(x)$, la différence $A - F(x)$ ayant sa dérivée égale à zéro se réduit à une constante C (n° 8). Pour déterminer la constante C, il suffit de remarquer que l'aire A est nulle pour l'abscisse $x = a$ de la droite M_0P_0. On a donc

$$A = F(x) - F(a).$$

Le raisonnement qui précède prouve : d'une part, que la détermination d'une aire plane se ramène à la recherche d'une fonction primitive; d'autre part (et cette conséquence est beaucoup plus importante pour nous), que *toute fonction continue* $f(x)$ *est la dérivée d'une autre fonction*. Ce théorème fondamental est ainsi établi à l'aide d'une notion géométrique un peu vague, celle de l'aire d'une courbe plane. On s'est contenté pendant longtemps de cette démonstration, mais elle ne saurait suffire aujourd'hui. Pour fournir une base solide au Calcul intégral, il est indispensable de donner de ce théorème une démonstration purement analytique, ne faisant aucun appel à l'intuition géométrique. Si j'ai rappelé la démonstration précédente, c'est non seulement à cause de son intérêt historique, mais aussi parce qu'elle nous fournit l'élément analytique essentiel de la nouvelle démonstration. C'est en effet l'étude des sommes telles que (1), et de sommes d'une forme un peu plus générale, qui va jouer un rôle prépondérant. Avant d'aborder cette étude, il nous faut d'abord présenter quelques considérations sur les propriétés générales des fonctions et en particulier des fonctions continues [1].

---

[1] Parmi les travaux les plus importants sur la notion générale d'intégrale définie, je dois citer ici le Mémoire de Riemann *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* (*Œuvres de Riemann*, traduites par Laugel, p. 225), et le Mémoire déjà cité de M. Darboux *Sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2ᵉ série, t. IV).



II. — INTÉGRALES DÉFINIES. — NOTIONS GÉOMÉTRIQUES QUI S'Y RATTACHENT.

68. **Limites supérieure et inférieure.** — On dit qu'un ensemble de nombres est *limité supérieurement* s'il est possible de trouver un nombre fixe N tel qu'il n'existe aucun nombre faisant partie de l'ensemble et supérieur à N. On dit de même qu'un ensemble est *limité inférieurement* s'il est possible de trouver un nombre N' tel qu'il n'existe aucun nombre de cet ensemble inférieur à N'. Ainsi l'ensemble des nombres entiers positifs est limité inférieurement, mais n'est pas limité supérieurement; l'ensemble des nombres entiers, positifs ou négatifs, n'est limité dans aucun sens, tandis que l'ensemble des nombres rationnels, compris entre o et 1, est limité des deux côtés.

Soit (E) un ensemble limité supérieurement. On peut, relativement à cet ensemble, décomposer tous les nombres en deux classes. Nous dirons qu'un nombre α appartient à la première classe, s'il existe des nombres de l'ensemble (E) supérieurs à α, et qu'il appartient à la seconde classe si aucun des nombres de (E) n'est supérieur à α; l'ensemble considéré étant limité supérieurement, il est clair qu'il existe des nombres des deux classes. Soit A un nombre de la première classe et B un nombre de la deuxième classe; on a évidemment $A < B$, et il existe des nombres de l'ensemble (E) compris entre A et B, tandis qu'il n'en existe aucun qui soit supérieur à B. Le nombre $C = \frac{A+B}{2}$ peut appartenir à la première ou à la deuxième classe; dans le premier cas, nous remplacerons l'intervalle (A, B) par l'intervalle (C, B) et, dans le second cas, par l'intervalle (A, C). Le nouvel intervalle (A_1, B_1) est la moitié de (A, B) et possède la même propriété que le premier; il existe au moins un nombre de l'ensemble (E) supérieur à A_1, et il n'en existe aucun de supérieur à B_1. En opérant sur (A_1, B_1) comme on a opéré sur (A, B) et ainsi de suite indéfiniment, on forme une suite illimitée d'intervalles (A, B), (A_1, B_1), (A_2, B_2), ... dont chacun est la moitié du précédent et qui possèdent la même propriété que le premier intervalle (A, B), relativement à l'ensemble (E). Les nombres A, A_1, A_2, ..., A_n ne vont

jamais en décroissant et sont tous inférieurs à B; donc ils tendent vers une limite λ (n° 1). De même, les nombres B, B_1, B_2, ... ne vont jamais en croissant et sont tous supérieurs à A; ils tendent donc vers une limite λ'. D'ailleurs la différence $B_n - A_n = \frac{B-A}{2^n}$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, ce qui ne peut avoir lieu que si l'on a $\lambda' = \lambda$. Soit L cette limite commune; ce nombre L est appelé la *limite supérieure* de l'ensemble (E). D'après la façon même dont on l'a obtenu, il jouit des deux propriétés suivantes :

1° *Aucun nombre de l'ensemble* (E) *n'est supérieur à* L;

2° *Quelque petit que soit un nombre positif* ε, *il existe toujours un nombre de l'ensemble* (E) *supérieur à* $L - \varepsilon$.

Supposons en effet qu'il existe un nombre de l'ensemble supérieur à L, soit $L + h$ ($h > 0$). Comme B_n tend vers L lorsque n augmente indéfiniment, à partir d'une valeur de n assez grande, B_n serait inférieur à $L + h$, ce qui est impossible, puisque B_n est de la seconde classe. Soit d'autre part ε un nombre positif quelconque. A partir d'une valeur de n assez grande, A_n est supérieur à $L - \varepsilon$ et, comme il y a des nombres de (E) supérieurs à A_n, ils sont aussi supérieurs à $L - \varepsilon$. Il est clair que les deux propriétés précédentes ne peuvent appartenir à aucun autre nombre que L.

La limite supérieure L peut appartenir ou non à l'ensemble (E). Par exemple, si l'on prend les nombres rationnels qui ne dépassent pas 2, ce nombre 2 est précisément la limite supérieure et appartient à l'ensemble; au contraire, les nombres irrationnels qui ne dépassent pas 2 ont encore 2 pour limite supérieure, mais cette limite ne fait pas partie de l'ensemble. Observons encore que, lorsque la limite supérieure L n'appartient pas à l'ensemble (E), il y a toujours une infinité de nombres de (E) supérieurs à $L - \varepsilon$, aussi petit que soit ε. Car, s'il n'y en avait qu'un nombre fini, c'est le plus grand de ces nombres qui serait la limite supérieure, et non pas L. Lorsque l'ensemble se réduit à un système de n nombres différents, la limite supérieure est égale au plus grand de ces n nombres.

On démontre de la même façon que, si un ensemble est limité inférieurement, il admet une *limite inférieure* L', possédant les deux propriétés suivantes :

1° *Aucun nombre de l'ensemble n'est inférieur à* L';

2° ε *étant un nombre positif arbitraire, il existe un nombre de l'ensemble inférieur à* L' + ε (¹).

69. **Oscillation.** — Soit $f(x)$ une fonction bien définie dans un intervalle (a, b), c'est-à-dire telle qu'à toute valeur de x comprise entre a et b, et aux limites a et b elles-mêmes, corresponde une valeur unique de $f(x)$. Cette fonction est dite *finie* dans cet intervalle si toutes les valeurs qu'elle prend sont comprises entre deux nombres fixes A et B. L'ensemble des valeurs de la fonction $f(x)$ est alors limité supérieurement et inférieurement. Soient M et m les limites supérieure et inférieure de cet ensemble; la différence $\Delta = M - m$ s'appelle l'*oscillation* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b).

Les définitions qui précèdent donnent lieu à quelques remarques. Pour qu'une fonction soit finie dans un intervalle (a, b), il ne suffit pas qu'elle ait une valeur finie pour chaque valeur de x. Ainsi la fonction $f(x)$ définie de la manière suivante entre o et 1,

$$f(0) = 0, \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{pour } x > 0,$$

possède une valeur finie pour chaque valeur de x, et cependant elle n'est pas finie au sens que nous attachons à ce mot, car on a $f(x) > A$, pourvu que l'on prenne $x < \frac{1}{A}$. De même une fonction finie dans l'intervalle (a, b) peut prendre des valeurs qui diffèrent d'aussi peu qu'on voudra de la limite supérieure M ou de la limite inférieure m, mais elle n'atteint pas nécessairement ces valeurs elles-mêmes. Par exemple la fonction $f(x)$ définie dans

---

(¹) Lorsque *tous* les nombres peuvent être, d'après une propriété particulière, partagés en deux classes, A et B, de telle façon qu'un nombre quelconque de la classe A soit inférieur à un nombre quelconque de la classe B, la limite supérieure L des nombres de la classe A est en même temps la limite inférieure des nombres de la classe B. Il est clair d'abord que tout nombre supérieur à L est de la classe B; s'il existait un nombre $L' < L$, faisant partie de la classe B, il en serait de même de tout nombre supérieur à L'. On voit donc que tout nombre inférieur à L est de la classe A, tout nombre supérieur à L est de la classe B; le nombre L lui-même peut appartenir à l'une ou l'autre des deux classes.

l'intervalle (o, 1) par les conditions

$$f(0) = 0, \qquad f(x) = 1 - x, \qquad \text{pour } 0 < x \leqq 1,$$

admet pour limite supérieure $M = 1$, et n'atteint jamais cette limite.

70. **Propriétés des fonctions continues.** — Nous allons maintenant nous occuper en particulier des fonctions continues.

Théorème A. — *Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b), et ε un nombre positif arbitraire. On peut toujours décomposer l'intervalle (a, b) en un certain nombre d'intervalles partiels tels que, pour deux valeurs quelconques de la variable, x' et x'', appartenant à un même intervalle partiel, on ait toujours $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et soit $c = \frac{a+b}{2}$; l'un au moins des intervalles (a, c), (c, b) jouira de la même propriété que (a, b), c'est-à-dire qu'il sera impossible de le décomposer en intervalles partiels satisfaisant à l'énoncé du théorème. En le substituant à (a, b), et en raisonnant comme plus haut (n° 68), nous formerons une suite indéfinie d'intervalles (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., dont chacun est la moitié du précédent, et qui possèdent la même propriété que l'intervalle primitif (a, b). Quelque grand que soit n, on peut toujours trouver dans l'intervalle (a_n, b_n) deux nombres x' et x'' tels que $|f(x') - f(x'')|$ soit supérieur à ε. Cela étant, désignons par λ la limite commune des deux suites de nombres $a, a_1, a_2, \ldots$ et $b, b_1, b_2, \ldots$. La fonction $f(x)$ étant continue pour $x = \lambda$, on peut trouver un nombre η tel que l'on ait $|f(x) - f(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}$, pourvu que $|x - \lambda|$ soit inférieur à η. Choisissons ensuite n assez grand pour que a_n et b_n diffèrent de λ de moins de η, de façon que l'intervalle (a_n, b_n) soit compris dans l'intervalle $(\lambda - \eta, \lambda + \eta)$; x' et x'' étant deux valeurs quelconques de l'intervalle (a_n, b_n), on aura donc

$$|f(x') - f(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. La supposition dont nous

sommes partis nous conduit à une contradiction. Le théorème est donc exact.

Corollaire I. — Soit $a, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, b$ un mode de subdivision de l'intervalle (a, b) en p intervalles partiels, satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Dans l'intervalle (a, x_1) on aura $|f(x)| < |f(a)| + \varepsilon$, et en particulier $|f(x_1)| < |f(a)| + \varepsilon$; de même, dans l'intervalle (x_1, x_2), on aura $|f(x)| < |f(x_1)| + \varepsilon$ et *a fortiori* $|f(x)| < |f(a)| + 2\varepsilon$. En particulier, pour $x = x_2$, $|f(x_2)| < |f(a)| + 2\varepsilon$, et ainsi de suite. Pour le dernier intervalle, on obtiendra l'inégalité

$$|f(x)| < |f(x_{p-1})| + \varepsilon < |f(a)| + p\varepsilon.$$

On voit que la valeur absolue de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) reste toujours inférieure à $|f(a)| + p\varepsilon$. *Toute fonction continue dans un intervalle* (a, b) *est donc finie dans cet intervalle.*

Corollaire II. — Imaginons que l'on ait décomposé l'intervalle (a, b) en p intervalles partiels (a, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{p-1}, b), tels que l'on ait toujours $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour deux valeurs quelconques de x appartenant à un même intervalle. Soit η un nombre positif plus petit que toutes les différences $x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots, b - x_{p-1}$. Prenons deux nombres quelconques compris entre a et b, tels que l'on ait $|x' - x''| < \eta$, et cherchons une limite supérieure de $|f(x') - f(x'')|$. Si les deux nombres x', x'' tombent dans un même intervalle partiel, on a $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dans le cas contraire, x' et x'' appartiennent à deux intervalles consécutifs, et il est clair que l'on a $|f(x') - f(x'')| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc, *à tout nombre positif* ε *on peut faire correspondre un autre nombre positif* η *tel que,* x' *et* x'' *désignant deux nombres de l'intervalle* (a, b), *on ait*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

toutes les fois que l'on a $|x' - x''| < \eta$. On exprime aussi cette propriété en disant que la fonction $f(x)$ est *uniformément continue* dans l'intervalle (a, b).

Théorème B. — *Une fonction* $f(x)$ *continue dans l'inter-*

valle a, b) *prend au moins une fois toute valeur comprise entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *pour une valeur de* x *comprise entre* a *et* b.

Prenons d'abord un cas particulier. Supposons que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires, par exemple que l'on ait $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Nous allons montrer qu'il existe au moins une valeur de x comprise entre a et b pour laquelle $f(x) = 0$. En effet, $f(x)$ est négatif aux environs de a et positif aux environs de b; considérons l'ensemble des valeurs de x comprises entre a et b qui rendent la fonction $f(x)$ positive et soit λ la limite inférieure de cet ensemble ($a < \lambda < b$). D'après la définition même de la limite inférieure, $f(\lambda - h)$ est négatif ou nul, pour toute valeur positive de h; $f(\lambda)$ qui est la limite de $f(\lambda - h)$ est donc aussi négatif ou nul. D'un autre côté, on ne peut avoir $f(\lambda) < 0$. Supposons en effet $f(\lambda) = -m$, m étant un nombre positif. La fonction $f(x)$ étant continue pour $x = \lambda$, on peut trouver un nombre η tel que l'on ait $|f(x) - f(\lambda)| < m$, lorsque l'on a $|x - \lambda| < \eta$; la fonction $f(x)$ serait donc négative pour les valeurs de x comprises entre λ et $\lambda + \eta$, et λ ne serait pas la limite inférieure des valeurs de x rendant la fonction positive. On a donc $f(\lambda) = 0$.

Soit maintenant N un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$. La fonction continue $\varphi(x) = f(x) - \mathrm{N}$ prend des valeurs de signes contraires pour $x = a$ et pour $x = b$. Donc, d'après le cas particulier qui vient d'être traité, elle s'annule au moins une fois dans l'intervalle (a, b).

Théorème C. — *Toute fonction continue dans un intervalle* (a, b) *atteint au moins une fois sa limite supérieure et sa limite inférieure.*

D'abord toute fonction continue restant finie, comme on l'a déjà démontré, admet une limite supérieure M et une limite inférieure m. Démontrons, par exemple, que l'on a $f(x) = \mathrm{M}$ pour une valeur de x au moins dans l'intervalle (a, b).

Soit $c = \frac{a+b}{2}$; la limite supérieure de $f(x)$ est égale à M pour l'un au moins des intervalles (a, c), (c, b). Remplaçons (a, b) par ce nouvel intervalle, sur lequel nous recommencerons l'opération, et ainsi de suite. En raisonnant comme on l'a déjà fait plu-

sieurs fois, nous formerons une suite indéfinie d'intervalles (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... dont chacun est la moitié du précédent, la limite supérieure de $f(x)$ dans chacun de ces intervalles étant toujours égale à M. Soit λ la limite commune des deux suites a, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ et $b, b_1, \ldots, b_n, \ldots$; *$f(\lambda)$ est égal à* M. Supposons, en effet, $f(\lambda) = M - h$, h étant positif; on peut déterminer un nombre positif η tel que, x variant de $\lambda - \eta$ à $\lambda + \eta$, $f(x)$ reste compris entre $f(\lambda) + \frac{h}{2}$ et $f(\lambda) - \frac{h}{2}$ et soit, par conséquent, inférieur à $M - \frac{h}{2}$. Prenons ensuite n assez grand pour que a_n et b_n diffèrent de leur limite λ de moins de η; l'intervalle (a_n, b_n) sera compris dans l'intervalle $(\lambda - \eta, \lambda + \eta)$. La limite supérieure de $f(x)$ dans l'intervalle (a_n, b_n) ne pourrait donc être égale à M.

En rapprochant ce théorème du précédent, on en conclut qu'*une fonction continue dans un intervalle* (a, b) *passe, au moins une fois, par toute valeur comprise entre sa limite supérieure et sa limite inférieure*. Le théorème A peut de même s'énoncer ainsi : *Étant donnée une fonction continue dans l'intervalle* (a, b), *on peut le décomposer en intervalles partiels assez petits pour que l'oscillation de la fonction dans chacun d'eux soit moindre que tout nombre positif choisi arbitrairement*. L'oscillation d'une fonction continue est, en effet, égale à la différence des valeurs de $f(x)$ pour deux valeurs particulières de la variable.

71. Les sommes S et *s*. — Soit $f(x)$ une fonction finie, continue ou non, dans l'intervalle (a, b), où $a < b$. Imaginons l'intervalle (a, b) décomposé en un certain nombre d'intervalles partiels plus petits (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{p-1}, b), les nombres x_1, $x_2, \ldots, x_{p-1}$ allant en croissant; désignons par M et m les limites de $f(x)$ dans l'intervalle total et par M_i et m_i les limites dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i) et posons

$$S = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_p(b - x_{p-1}),$$
$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_p(b - x_{p-1}).$$

A tout mode de subdivision de (a, b) en intervalles plus petits correspond une somme S et une somme $s < S$. Toutes les sommes S sont évidemment supérieures à $m(b - a)$, car tous les

nombres M_i sont plus grands que m; ces sommes S ont donc une limite inférieure I. De même, les sommes s, qui sont toutes plus petites que $M(b-a)$, ont une limite supérieure I'. Nous allons montrer que I' *est au plus égal à* I. Il suffit évidemment pour cela de montrer qu'étant donnés deux modes de subdivision quelconques de l'intervalle (a, b), auxquels correspondent respectivement les sommes S et s, S' et s', on a $s < S'$, $s' < S$.

Supposons d'abord qu'on subdivise chacun des intervalles (a, x_1), (x_1, x_2), ... en intervalles plus petits par de nouveaux points de division et soit

$$a,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{k-1},\ x_1,\ y_{k+1},\ \ldots,\ y_{l-1},\ x_2,\ y_{l+1},\ \ldots,\ b$$

la nouvelle suite obtenue; le nouveau mode de subdivision est dit *consécutif* au premier. Désignons par Σ et σ les sommes analogues à S et à s relatives à cette nouvelle division de (a, b) et comparons S et Σ, s et σ. Comparons, par exemple, les portions des deux sommes S et Σ qui proviennent de l'intervalle (a, x_1). Soient M'_1 et m'_1 les limites de $f(x)$ dans l'intervalle (a, y_1), M'_2 et m'_2 les limites dans l'intervalle (y_1, y_2), ..., M'_k et m'_k les limites dans l'intervalle (y_{k-1}, x_1). La portion de Σ qui provient de (a, x_1) est donc égale à

$$M'_1(y_1-a)+M'_2(y_2-y_1)+\ldots+M'_k(x_1-y_{k-1}),$$

et, comme les nombres M'_1, M'_2, ..., M'_k ne peuvent dépasser M_1, il est clair que la somme précédente est au plus égale à $M_1(x_1-a)$; de même, la portion de Σ qui provient de l'intervalle (x_1, x_2) est au plus égale à $M_2(x_2-x_1)$, et ainsi de suite. En ajoutant toutes ces inégalités, on trouve $\Sigma \leqq S$, et l'on verrait de même que l'on a $\sigma \geqq s$.

Considérons maintenant deux modes de subdivision tout à fait quelconques, auxquels correspondent les sommes S et s, S' et s'. En superposant les points de division des deux subdivisions précédentes, on obtient un troisième mode de subdivision qui peut être considéré comme consécutif à chacun des premiers. Soient Σ et σ les sommes relatives à cette division auxiliaire. D'après ce que nous venons de voir, on a les inégalités

$$\Sigma \leqq S, \qquad \sigma \geqq s, \qquad \Sigma \leqq S', \qquad \sigma \geqq s';$$

comme Σ est supérieur à σ, on en conclut que l'on a $s' < S$, $s < S'$. Toutes les sommes S étant supérieures aux sommes s, la limite I ne peut être inférieure à la limite I'; donc on a $I \geqq I'$.

72. **Fonctions intégrables.** — Une fonction finie dans un intervalle (a, b) est dite *intégrable* dans cet intervalle, si les deux sommes S et s tendent vers une limite commune lorsque le nombre des intervalles partiels augmente indéfiniment, de façon que chacun de ces intervalles partiels tende vers zéro.

Pour qu'une fonction soit intégrable dans un intervalle (a, b), *il faut et il suffit qu'à tout nombre positif* ε *on puisse faire correspondre un autre nombre positif* η *tel que* $S - s$ *soit inférieur à* ε, *lorsque tous les intervalles partiels sont moindres que* η.

La condition est *nécessaire*. Si S et s ont une limite commune I, on peut trouver un nombre η assez petit pour que $|S - I|$ et $|s - I|$ soient inférieurs à $\frac{\varepsilon}{2}$ lorsque tous les intervalles partiels sont moindres que η. On aura *a fortiori* $S - s < \varepsilon$.

La condition est *suffisante*. On peut écrire, en effet,

$$S - s = S - I + I - I' + I' - s;$$

aucun des nombres $S - I$, $I - I'$, $I' - s$ ne peut être négatif; pour que leur somme soit inférieure à ε, il faut que chacun d'eux soit moindre que ε. Or $I - I'$ est un nombre fixe, positif ou nul, ε un nombre positif arbitraire; il faut donc que l'on ait $I' = I$. Il faut de plus que l'on ait $S - I < \varepsilon$, $I - s < \varepsilon$, lorsque tous les intervalles partiels sont moindres que η, ce qui revient à dire que les sommes S et s ont une limite commune I.

La fonction $f(x)$ est dite alors *intégrable* dans l'intervalle (a, b); la limite I s'appelle une *intégrale définie* et se représente par le symbole

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

qui rappelle son origine, et qui se lit *somme* de a à b de $f(x)\,dx$. D'après sa définition même, I est toujours comprise entre les deux sommes S et s, correspondant à un mode quelconque de subdivi-

sion; en prenant pour valeur approchée de I un nombre quelconque compris entre S et s, l'erreur commise est plus petite que $S - s$.

Toute fonction continue est intégrable. — La différence $S - s$ est, en effet, plus petite ou au plus égale à $(b - a)\omega$, en désignant par ω une limite supérieure de l'oscillation de $f(x)$ dans chaque intervalle partiel. Or on peut choisir un nombre η tel que l'oscillation soit moindre qu'un nombre positif donné dans tout intervalle inférieur à η (n° 70). Si l'on choisit η de façon que l'oscillation soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{b-a}$, la différence $S - s$ sera inférieure à ε.

Une fonction qui n'est jamais décroissante, ou jamais croissante dans un intervalle, est intégrable dans cet intervalle.

On dit qu'une fonction n'est jamais décroissante dans un intervalle (a, b) si l'on a pour deux valeurs quelconques x', x'' de cet intervalle $f(x') \geqq f(x'')$ lorsque $x' > x''$. La fonction peut conserver une valeur constante dans certaines portions de l'intervalle, mais, si elle ne reste pas constante, elle va en croissant. Partageons l'intervalle (a, b) en n intervalles partiels inférieurs à η; on peut écrire

$$S = f(x_1)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(b)(b - x_{n-1}),$$
$$s = f(a)\ (x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}).$$

En effet, la limite supérieure dans l'intervalle (a, x_1), par exemple, est égale à $f(x_1)$, et la limite inférieure égale à $f(a)$, et de même pour les autres. On tire de là

$$S - s = (x_1 - a)[f(x_1) - f(a)]$$
$$+ (x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] + \ldots + (b - x_{n-1})[f(b) - f(x_{n-1})];$$

toutes les différences qui figurent au second membre sont des nombres positifs, et toutes les différences $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ..., sont inférieures à η. On a donc

$$S - s < \eta[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})];$$

c'est-à-dire

$$S - s < \eta[f(b) - f(a)].$$



suffira de prendre

$$\eta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

pour que l'on ait $S - s < \varepsilon$. On raisonne de même pour une fonction qui n'est jamais croissante.

Revenons au cas général. On peut remplacer, dans la définition de l'intégrale, les sommes S et s par une expression plus générale. Étant donnée une subdivision de l'intervalle (a, b)

$$a, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{i-1}, \quad x_i, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad b,$$

soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots,$ des valeurs appartenant respectivement à ces intervalles. La somme

$$(2) \quad \begin{cases} f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(b - x_{n-1}) \\ \quad = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \end{cases}$$

est évidemment comprise entre les sommes S et s, car on a toujours $m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i$; si la fonction est intégrable, cette somme a aussi pour limite I. En particulier, si l'on suppose que $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ coïncident respectivement avec $a, x_1, \ldots, x_{n-1}$, on retrouve la somme (1), considérée plus haut (n° 65).

De la définition de l'intégrale résultent immédiatement quelques conséquences. On a supposé dans le raisonnement $a < b$; si l'on échange les deux limites a et b, tous les facteurs $x_i - x_{i-1}$ sont changés de signe, et la limite elle-même est changée de signe; on a donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Il résulte aussi de la définition que l'on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

si c est compris entre a et b, c'est évident. Si b est compris entre a et c, par exemple, la formule subsiste encore pourvu que la fonction $f(x)$ soit intégrable entre a et c, car on peut l'écrire

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Si l'on a $f(x) = A\varphi(x) + B\psi(x)$, A et B étant deux constantes quelconques, on a aussi

$$\int_a^b f(x)\,dx = A\int_a^b \varphi(x)\,dx + B\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

et il en serait de même pour la somme d'un nombre quelconque de fonctions.

73. **Théorème de M. Darboux.** — Étant donnée une fonction *finie* quelconque $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), les sommes S et s tendent respectivement vers I et I', lorsque tous les intervalles partiels tendent vers zéro, leur nombre croissant indéfiniment. Démontrons-le pour les sommes S, par exemple. Nous supposerons que l'on a $a < b$, et que la fonction $f(x)$ est positive dans l'intervalle (a, b); on peut toujours réaliser cette condition en ajoutant une constante convenable à la fonction $f(x)$, ce qui revient à augmenter toutes les sommes S d'une quantité constante. Cela posé, le nombre I étant la limite inférieure des sommes S, on peut trouver un mode particulier de division, soit

$$a, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{p-1}, \quad b,$$

pour lequel la somme S est inférieure à $I + \frac{\varepsilon}{2}$, ε étant un nombre positif donné à l'avance. Considérons maintenant une division de (a, b) en intervalles moindres que η, et cherchons une limite supérieure de la somme S' correspondante. Prenons d'une part les intervalles ne renfermant aucun des points $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$; en se reportant au raisonnement du n° 71, on voit qu'ils fournissent dans la somme S' une portion inférieure à la somme S primitive, c'est-à-dire à $I + \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, le nombre des intervalles qui renferment quelqu'un des points $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, ne peut dépasser $p-1$, et, en désignant par M la limite supérieure de $f(x)$, ils fournissent dans la somme S' une part qui ne peut dépasser $(p-1)M\eta$. On a donc

$$S' < I + \frac{\varepsilon}{2} + (p-1)M\eta,$$

et il suffira de choisir η inférieur à $\frac{\varepsilon}{2M(p-1)}$ pour que la somme S' soit inférieure à $I + \varepsilon$.

On démontre de même que les sommes s ont pour limite I'. Si la fonction $f(x)$ est quelconque, ces deux limites I et I' sont différentes. Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit que l'on ait $I' = I$.

74. **Formule de la moyenne.** — Nous supposerons désormais, à moins de mention expresse, que les fonctions sous le signe d'intégration sont continues.



Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues dans l'intervalle (a, b), dont l'une $\varphi(x)$ conserve le même signe entre a et b; nous supposerons, pour fixer les idées, $a < b$ et $\varphi(x) > 0$.

Imaginons une division de (a, b) en intervalles plus petits, et soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$, des valeurs appartenant à chacun de ces intervalles respectivement. Tous les nombres $f(\xi_i)$ sont compris entre les limites M et m de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b)

$$m \leqq f(\xi_i) \leqq \text{M}.$$

Multiplions toutes ces doubles inégalités par les facteurs

$$\varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

qui, par hypothèse, sont tous positifs et ajoutons; on voit que la somme $\Sigma f(\xi_i)\ \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ est comprise entre les deux sommes $m\Sigma\varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ et $\text{M}\Sigma\varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Le nombre des intervalles partiels augmentant indéfiniment, on a donc à la limite

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx < \text{M}\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

μ étant compris entre m et M. La fonction $f(x)$ étant continue prend la valeur μ pour une valeur ξ comprise entre a et b, et l'on a encore

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

ξ étant compris entre a et b. Si en particulier on suppose $\varphi(x) = 1$, l'intégrale $\int_a^b dx$ est, d'après la définition même, égale à $(b - a)$, et il reste

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

75. Seconde formule de la moyenne. — On doit à M. Bonnet une autre formule qu'il a déduite d'un lemme important dû à Abel.

Lemme. — *Soient $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ un nombre quelconque de quantités*

positives décroissantes, et $u_0, u_1, \ldots, u_p$ *un même nombre de quantités positives ou négatives quelconques. Si toutes les sommes* $s_0 = u_0$, $s_1 = u_0 + u_1$, $\ldots$, $s_p = u_0 + u_1 + \ldots + u_p$ *sont comprises entre deux nombres* A *et* B, *la somme*

$$S = \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_p u_p$$

sera comprise entre $A\varepsilon_0$ *et* $B\varepsilon_0$.

On peut écrire, en effet,

$$u_0 = s_0, \qquad u_1 = s_1 - s_0, \qquad \ldots, \qquad u_p = s_p - s_{p-1};$$

la somme S est donc égale à

$$s_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \ldots + s_{p-1}(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + s_p \varepsilon_p.$$

Toutes les différences $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\ldots$, $\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p$ étant positives, on aura deux limites pour S en remplaçant $s_0, s_1, \ldots, s_p$ par leur limite supérieure A, puis par leur limite inférieure B. On trouve ainsi

$$S < A(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p + \varepsilon_p) = A\varepsilon_0.$$

et l'on voit de même que l'on a $S > B\varepsilon_0$.

Cela posé, soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues, la fonction $\varphi(x)$ étant positive et décroissante lorsque x croît de a jusqu'à b. L'intégrale $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ est la limite de la somme

$$f(a)\varphi(a)(x_1 - a) + f(x_1)\varphi(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots;$$

les nombres $\varphi(a)$, $\varphi(x_1)$, $\ldots$, étant positifs et décroissants, cette somme est, d'après le lemme précédent, comprise entre $A\varphi(a)$ et $B\varphi(a)$, A et B étant la plus grande et la plus petite des sommes

$$\begin{array}{l} f(a)(x_1 - a), \\ f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}). \end{array}$$

En passant à la limite, on voit que l'intégrale considérée est comprise entre $A_1\varphi(a)$ et $B_1\varphi(a)$, A_1 et B_1 désignant le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_a^c f(x)\,dx,$$

lorsque c varie de a à b. Comme cette intégrale est évidemment une fonction continue de sa limite supérieure c, on peut écrire

$$(5) \qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx \qquad (a < \xi < b).$$



Lorsque la fonction $\varphi(x)$ est décroissante, sans rester positive, entre a et b, on peut appliquer une formule plus générale due à Weierstrass. Posons en effet $\varphi(x) = \varphi(b) + \psi(x)$; la fonction $\psi(x)$ est positive et décroissante, et l'on peut lui appliquer la formule (5)

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = [\varphi(a) - \varphi(b)] \int_a^\xi f(x)\,dx.$$

On en tire

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi(b)\,dx + [\varphi(a) - \varphi(b)] \int_a^\xi f(x)\,dx,$$

ou

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a) \int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b) \int_\xi^b f(x)\,dx.$$

On a des formules analogues lorsque la fonction $\varphi(x)$ est croissante.

76. Retour sur les fonctions primitives. — Nous pouvons maintenant donner une démonstration purement analytique du théorème fondamental. Soit $f(x)$ une fonction continue; l'intégrale définie

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

où l'on regarde la limite a comme fixe, est une fonction de la limite supérieure x. Nous allons démontrer qu'*elle admet pour dérivée* $f(x)$. Nous avons en effet

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

ou, en appliquant la formule de la moyenne (4),

$$F(x+h) - F(x) = hf(\xi),$$

ξ étant compris entre x et $x+h$. Lorsque h tend vers zéro, $f(\xi)$ a pour limite $f(x)$; la fonction $F(x)$ a donc pour dérivée $f(x)$.

Toute autre fonction admettant la même dérivée s'obtient en ajoutant à $F(x)$ une constante arbitraire C. Il existe une de ces fonctions, et une seule, prenant une valeur donnée à l'avance y_0 pour $x = a$; c'est la fonction

$$y_0 + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre, on met la même lettre x pour désigner la limite supérieure et la variable d'intégration, et l'on écrit $\int_a^x f(x)\,dx$ au lieu de $\int_a^x f(t)\,dt$, mais il est bien évident qu'une intégrale définie ne dépend que des limites et de la fonction sous le signe d'intégration; la lettre qui désigne la variable d'intégration est absolument indifférente.

Toute fonction ayant pour dérivée $f(x)$ est une intégrale indéfinie de $f(x)$ et se représente par le symbole

$$\int f(x)\,dx,$$

où l'on n'indique pas les limites. D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C.$$

Inversement, si l'on a obtenu par un moyen quelconque une fonction $F(x)$ admettant pour dérivée $f(x)$, on peut écrire

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C;$$

pour déterminer la constante C, il suffit d'observer que le premier membre est nul pour $x = a$. On doit donc prendre $C = -F(a)$, et l'on a la formule fondamentale

$$(6) \qquad \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Remplaçons dans cette formule $f(x)$ par $F'(x)$; il vient

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(x)\,dx,$$

ou, en appliquant le théorème de la moyenne,

$$F(x) - F(a) = (x - a)F'(\xi),$$

ξ étant compris entre a et x. Nous retrouvons le théorème des accroissements finis, mais la démonstration est moins générale que la première (n° 8), car elle suppose la continuité de la dérivée $F'(x)$.

Nous passerons en revue, dans le Chapitre suivant, les catégories les plus simples de fonctions dont on sait trouver une fonction primitive; nous indiquerons ici seulement quelques-unes de celles qui s'offrent immédiatement :

$$\int A(x-a)^\alpha dx = A\,\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha+1 \neq 0),$$

$$\int A\,\frac{dx}{x-a} = A\log(x-a) + C,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

$$\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + C \qquad (m \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log(x+\sqrt{x^2+A}) + C, \qquad \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \log f(x) + C.$$

La formule fondamentale (6) a été établie en supposant la fonction $f(x)$ continue entre a et b. Si l'on n'a pas égard à cette condition, on peut être conduit à des conclusions paradoxales. Ainsi, en prenant $f(x) = \frac{1}{x^2}$, la formule (6) donne

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b};$$

le premier membre n'a de sens jusqu'ici que si a et b sont de même signe, tandis que le second membre a une valeur déterminée, alors même que a et b sont de signes différents. Nous verrons plus tard l'explication de ce paradoxe, en étudiant les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.

La formule (6) donne de même

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \log\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right];$$

si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, $f(x)$ s'annule entre a et b, et les deux membres de l'égalité précédente n'ont jusqu'ici aucun sens pour nous. On verra de même plus tard la signification qu'il convient de lui attribuer.

La formule (6) peut aussi présenter quelque ambiguïté : ainsi, en prenant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, elle donne

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, b - \text{arc tang}\, a.$$

Le premier membre a un sens bien déterminé, tandis que le second membre présente une infinité de déterminations. Pour lever l'ambiguïté, posons

$$F(x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2};$$

cette fonction $F(x)$ est continue dans tout intervalle et s'annule avec x. Désignons, d'autre part, par arc tang$x$ l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Ces deux fonctions ont même dérivée et s'annulent pour $x = 0$; elles sont donc égales, et l'on peut écrire

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, b - \text{arc tang}\, a,$$

en prenant toujours pour arc tang la valeur comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

On établit de même la formule

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, b - \text{arc sin}\, a,$$

où le radical est pris en valeur absolue, où a et b sont compris entre -1 et $+1$, et où l'on désigne par arc sin$x$ l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

77. **Indices.** — D'une manière générale, lorsque la fonction primitive $F(x)$ admet plusieurs déterminations, on choisira une des valeurs initiales $F(a)$ et l'on suivra la variation continue de cette détermination lorsque x varie dans le même sens de a à b. Prenons, par exemple, l'intégrale

$$\int_a^b \frac{P'Q - PQ'}{P^2+Q^2}\, dx = \int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\, dx,$$

où

$$f(x) = \frac{P}{Q},$$

P et Q étant deux fonctions continues dans l'intervalle (a, b), ne s'annulant pas en même temps. Une fonction primitive est arc tang$f(x)$. Si Q ne s'annule pas entre a et b, $f(x)$ ne devient pas infini, et arc tang$f(x)$ reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; mais il n'en est plus de même, en général, si l'équation $Q = 0$ a des racines dans cet intervalle. Pour voir comment on doit modifier la formule, réservons toujours la notation arc tang à l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et supposons d'abord que Q s'annule une seule fois entre a et b, pour une valeur $x = c$. Nous pouvons écrire

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'} + \int_{c+\varepsilon'}^b,$$

ε et ε' étant deux nombres positifs très petits; $f(x)$ ne devenant pas infini entre a et $c - \varepsilon$, ni entre $c + \varepsilon'$ et b, on a encore

$$\int_a^b \frac{f'\,dx}{1+f^2} = \operatorname{arc\,tang} f(c-\varepsilon) - \operatorname{arc\,tang} f(a)$$
$$+ \operatorname{arc\,tang} f(b) - \operatorname{arc\,tang} f(c+\varepsilon') + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}.$$

Il peut se présenter plusieurs cas. Supposons, pour fixer les idées, que $f(x)$ devienne infini en passant de $+\infty$ à $-\infty$; $f(c-\varepsilon)$ sera positif et très grand, arc tang$f(c-\varepsilon)$ sera très voisin de $\frac{\pi}{2}$, $f(c+\varepsilon')$ sera négatif et très grand, arc tang$f(c+\varepsilon')$ sera très voisin de $-\frac{\pi}{2}$; quant à l'intégrale $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}$, sa valeur absolue est très petite. Passons à la limite; il vient

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \pi + \operatorname{arc\,tang} f(b) - \operatorname{arc\,tang} f(a);$$

on verrait de même qu'il faudrait retrancher π, si $f(x)$ passait de $-\infty$ à $+\infty$. Dans le cas général, on partagera l'intervalle (a, b) en intervalles partiels assez petits pour que, dans chacun d'eux, $f(x)$ ne devienne infini qu'une seule fois : en raisonnant sur chacun de ces intervalles comme on vient de le faire, et ajoutant les résultats obtenus, il vient

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \operatorname{arc\,tang} f(b) - \operatorname{arc\,tang} f(a) + (K - K')\pi,$$

K désignant le nombre de fois que $f(x)$ devient infini en passant de $+\infty$ à $-\infty$, K' le nombre de fois que $f(x)$ passe de $-\infty$ à $+\infty$. Ce nombre $K - K'$ est appelé l'*indice* de la fonction $f(x)$ entre a et b.

Lorsque $f(x)$ se réduit à une fonction rationnelle $\frac{V_1}{V}$, on peut calculer l'indice par des opérations élémentaires, sans connaître les racines de V. Il est clair qu'on peut supposer V_1 premier avec V et de degré inférieur à V, car on ne change pas l'indice en retranchant un polynome. Cela posé, imaginons la suite des divisions à effectuer pour trouver le plus grand commun diviseur entre V et V_1, en changeant chaque fois le signe du reste. On divise d'abord V par V_1, ce qui donne un quotient Q_1 et un reste $-V_2$; on divise ensuite V_1 par V_2, ce qui donne un quotient Q_2 et un reste $-V_3$, et ainsi de suite; on finira par arriver à un reste constant $-V_{n+1}$. Les opérations donnent la suite d'égalités

$$\begin{aligned} V &= V_1 Q_1 - V_2, \\ V_1 &= V_2 Q_2 - V_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_{n-1} &= V_n Q_n - V_{n+1}, \end{aligned}$$

et la suite de polynomes

$$(7) \qquad V, \quad V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_{r-1}, \quad V_r, \quad V_{r+1}, \quad \ldots, \quad V_n, \quad V_{n+1},$$

jouit des propriétés essentielles d'une suite de Sturm : 1° deux polynomes consécutifs ne peuvent s'annuler en même temps, car on en déduirait de proche en proche que cette valeur de x doit annuler tous les autres polynomes, et en particulier V_{n+1}; 2° lorsqu'un des polynomes intermédiaires V_1, V_2, ..., V_n s'annule, le nombre des variations présenté par la suite (7) ne change pas, car, si V_r s'annule pour $x = c$, V_{r-1} et V_{r+1} sont de signes contraires pour $x = c$. Il s'ensuit que le nombre des variations présentées par la suite (7) ne peut changer que lorsque x passe par une racine de $V = 0$. Si $\frac{V_1}{V}$ passe de $+\infty$ à $-\infty$, ce nombre augmente d'une unité; il diminue au contraire d'une unité, si $\frac{V_1}{V}$ passe de $-\infty$ à $+\infty$. L'indice est donc égal à la différence entre le nombre des variations de la suite (7) pour $x = b$ et $x = a$.

78. Aire d'une courbe. — Nous pouvons maintenant donner une définition purement analytique de l'aire limitée par une courbe plane continue, l'aire du rectangle étant seule considérée comme connue. Nous n'avons pour cela qu'à traduire en langage géométrique les résultats du n° 72. Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b); nous supposerons, pour fixer les idées, $a < b$, et $f(x) > 0$ dans cet intervalle. Considérons comme plus haut (*fig.* 9) la portion du plan limitée par le contour $AMBB_0A_0$, composé du segment A_0B_0 de l'axe des x, des droites AA_0 et BB_0

parallèles à Oy, d'abscisses a et b, et de l'arc de courbe AMB qui a pour équation $y=f(x)$. Marquons sur A_0B_0 un certain nombre de points de division P_1, P_2, ..., P_{i-1}, P_i, ... d'abscisses x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ... et par ces points menons des parallèles à l'axe des y, qui rencontrent l'arc AMB aux points Q_1, Q_2, ..., Q_{i-1}, Q_i, ... respectivement. Cela fait, prenons en particulier la portion du plan limitée par le contour $Q_{i-1}Q_iP_iP_{i-1}Q_{i-1}$, et sur l'arc $Q_{i-1}Q_i$ marquons le point le plus haut et le point le plus bas, c'est-à-dire les points qui correspondent à la valeur maximum M_i et à la valeur minimum m_i de $f(x)$ dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i) (dans le cas de la figure, le point le plus bas coïncide avec Q_{i-1}). Soit R_i l'aire du rectangle $P_{i-1}P_is_is_{i-1}$ construit sur la base $P_{i-1}P_i$ avec la hauteur M_i; soit de même r_i l'aire du rectangle $P_{i-1}P_iq_iQ_{i-1}$ construit sur la base $P_{i-1}P_i$ avec la hauteur m_i. On a

$$R_i = M_i(x_i - x_{i-1}), \qquad r_i = m_i(x_i - x_{i-1}),$$

et les résultats démontrés plus haut (n° 72) peuvent s'énoncer ainsi : quels que soient les points dę division du segment A_0B_0, il existe un nombre déterminé I qui est inférieur à ΣR_i et supérieur à Σr_i, et les deux sommes ΣR_i, Σr_i ont pour limite I quand tous les intervalles partiels tels que $P_{i-1}P_i$ tendent vers zéro, leur nombre croissant indéfiniment. Nous dirons que cette limite commune I des deux sommes de rectangles ΣR_i, Σr_i est l'aire de la portion du plan limitée par le contour $AMBB_0A_0A$. Cette aire est donc égale à l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$.

Cette définition est bien d'accord avec l'idée vulgaire de l'aire d'une courbe plane. En effet, ce qui résulte de plus clair de cette notion, malgré son peu de précision, c'est que l'aire limitée par le contour $P_{i-1}P_iQ_in_iQ_{i-1}P_{i-1}$ est comprise entre les aires R_i et r_i des deux rectangles $P_{i-1}P_is_is_{i-1}$ et $P_{i-1}P_iq_iQ_{i-1}$; l'aire totale limitée par le contour $AMBB_0A_0A$ doit donc être une quantité comprise entre les deux sommes ΣR_i et Σr_i. Or l'intégrale définie I est la seule quantité *fixe* qui soit constamment comprise entre ces deux sommes, quel que soit le mode de subdivision de A_0B_0, puisque c'est la limite commune de ΣR_i et de Σr_i.

L'aire considérée peut encore être définie, d'une infinité de

manières, comme limite d'une somme de rectangles. On a vu, en effet, que l'intégrale définie I est aussi la limite de la somme

$$\Sigma(x_i - x_{i-1})f(\xi_i),$$

ξ_i étant une valeur quelconque de l'intervalle (x_{i-1}, x_i). Or

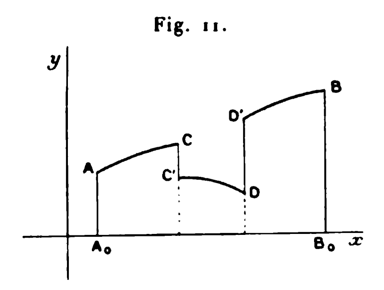
$$(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$$

représente l'aire d'un rectangle ayant pour base $P_{i-1}P_i$ et pour hauteur l'ordonnée d'un point quelconque de l'arc $Q_{i-1}n_iQ_i$. On peut remarquer aussi que l'intégrale définie I représente encore l'aire, quelle que soit la position de l'arc AMB par rapport à Ox, pourvu que l'on adopte la convention faite plus haut (n° 67). Toute intégrale définie représentant une aire, le calcul d'une intégrale s'appelle une *quadrature*.

La notion d'aire une fois acquise d'une façon bien précise, rien n'empêche de s'en servir dans certains raisonnements, qu'elle rend presque intuitifs. Par exemple, il est évident que l'aire précédente est comprise entre les deux rectangles qui auraient pour base commune la base A_0B_0 et pour hauteurs respectives la plus grande et la plus petite des ordonnées de l'arc AMB. Elle est donc égale à l'aire d'un rectangle ayant pour base A_0B_0 et pour hauteur l'ordonnée d'un point convenablement choisi sur l'arc AMB; c'est le théorème de la moyenne.

79. Voici une autre remarque importante. Soit $f(x)$ une fonction finie dans l'intervalle (a, b), qui est discontinue de la façon suivante pour un nombre fini de valeurs entre a et b:

Fig. 11.



Supposons que $f(x)$ soit continue entre c et $c+k (k>0)$, et que $f(c+\varepsilon)$ tende vers une limite lorsque ε tend vers zéro en restant positif; nous désignerons cette limite par $f(c+0)$; de

même, supposons $f(x)$ continue entre $c-k$ et $c(k>0)$, et soit $f(c-0)$ la limite vers laquelle tend $f(c-\varepsilon)$ lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives. Lorsque les deux limites $f(c+0)$ et $f(c-0)$ sont différentes, la fonction $f(x)$ est discontinue pour $x=c$. On convient en général de prendre pour $f(c)$ la valeur $\frac{1}{2}[f(c+0)+f(c-0)]$. Si la fonction $f(x)$ présente un certain nombre de points de discontinuité de cette nature entre a et b, elle est représentée graphiquement par plusieurs arcs de courbe distincts AC, C′D, D′B. Soient, par exemple, c et d les abscisses des points de discontinuité. Nous poserons

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx,$$

définition qui pourrait se justifier en se reportant au n° 72; géométriquement, cette intégrale définie représente l'aire limitée par le contour $ACC'DD'BB_0A_0A$.

Si l'on remplace maintenant la limite supérieure b par une variable x, l'intégrale définie

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

est encore une fonction continue de x. En un point x, où $f(x)$ est continue, on a encore $F'(x) = f(x)$. Pour un point de discontinuité, $x=c$ par exemple, on a

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(x)\,dx = hf(c+\theta h), \qquad 0<\theta<1;$$

le rapport $\dfrac{F(c+h)-F(c)}{h}$ a pour limite $f(c+0)$ ou $f(c-0)$, suivant que h est positif ou négatif. Nous avons là un exemple de fonction continue $F(x)$ dont la dérivée présente deux valeurs distinctes pour certaines valeurs de la variable.

80. **Longueur d'un arc de courbe.** — Étant donné un arc de courbe AB, prenons sur cet arc un certain nombre de points intermédiaires $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$, et construisons la ligne polygonale $Am_1m_2\ldots m_{n-1}B$, ayant pour sommets les différents points dans l'ordre où ils se succèdent quand on va de A en B.

Si le périmètre de cette ligne polygonale tend vers une limite

lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment, la longueur de chacun des côtés tendant vers zéro, cette limite est par définition la *longueur de l'arc* AB.

Soient

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

les coordonnées rectangulaires d'un point de l'arc AB, exprimées au moyen d'un paramètre variable t; nous supposerons que, t variant de a à b $(a < b)$, les fonctions f, φ, ψ sont continues et admettent des dérivées du premier ordre continues, et que le point (x, y, z) décrit l'arc AB en marchant constamment dans le même sens. Désignons par

$$a, \quad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_{i-1}, \quad t_i, \quad \ldots, \quad t_{n-1}, \quad b,$$

les valeurs de t qui correspondent aux sommets de cette ligne polygonale; le côté c_i a pour expression

$$c_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2},$$

ou, en appliquant la formule des accroissements finis à $x_i - x_{i-1}, \ldots,$

$$c_i = (t_i - t_{i-1}) \sqrt{[f'(\xi_i)]^2 + [\varphi'(\eta_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2},$$

ξ_i, η_i, ζ_i étant compris entre t_{i-1} et t_i. Lorsque l'intervalle (t_{i-1}, t_i) est très petit, le radical diffère très peu de

$$\sqrt{[f'(t_{i-1})]^2 + [\varphi'(t_{i-1})]^2 + [\psi'(t_{i-1})]^2};$$

pour trouver une limite de la différence, nous pouvons l'écrire

$$\frac{[f'(\xi_i) - f'(t_{i-1})][f'(\xi_i) + f'(t_{i-1})] + \ldots}{\sqrt{f'^2(\xi_i) + \varphi'^2(\eta_i) + \psi'^2(\zeta_i)} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \varphi'^2(t_{i-1}) + \psi'^2(t_{i-1})}}.$$

Or on a

$$|f'(\xi_i)| + |f'(t_{i-1})| < \sqrt{f'^2(\xi_i) + \ldots} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \ldots}$$

et, par suite,

$$\left| \frac{f'(\xi_i) + f'(t_{i-1})}{\sqrt{f'^2(\xi_i) + \ldots} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \ldots}} \right| < 1.$$

Si donc on a choisi tous les intervalles assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation des fonctions $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ soit moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$, on pourra écrire

$$\sqrt{f'^2(\xi_i) + \ldots} = \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \ldots} + \varepsilon_i,$$

où

$$|\varepsilon_i| < \varepsilon.$$

Le périmètre de la ligne polygonale est donc égal à

$$\Sigma(t_i - t_{i-1})\sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \varphi'^2(t_{i-1}) + \psi'^2(t_{i-1})} + \Sigma\varepsilon_i(t_i - t_{i-1}).$$

Le terme complémentaire $\Sigma\varepsilon_i(t_i - t_{i-1})$ est inférieur en valeur absolue à $\varepsilon\Sigma(t_i - t_{i-1})$, c'est-à-dire à $\varepsilon(b-a)$; puisque ε peut être rendu aussi petit qu'on le veut, pourvu que les intervalles soient assez petits, on en conclut que ce terme tend vers zéro, et la longueur S de l'arc AB est égale à l'intégrale définie

$$(8) \qquad S = \int_a^b \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}\,dt.$$

La définition précédente s'étend aussi au cas où les dérivées f', φ', ψ' seraient discontinues en un nombre fini de points de l'arc AB; ce qui arriverait si la courbe présentait des points anguleux. Il suffirait de partager l'arc AB en plusieurs autres, pour chacun desquels f', φ', ψ' seraient continues.

De la formule (8) on déduit que l'arc compris entre un point fixe A et un point variable M, correspondant à la valeur t du paramètre, est une fonction de t ayant pour dérivée

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2};$$

en élevant au carré les deux membres et multipliant par dt^2, il vient

$$(9) \qquad dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

formule qui a lieu, quelle que soit la variable indépendante. On peut la retenir aisément, d'après sa signification géométrique; elle exprime que dS est la diagonale d'un parallélépipède rectangle dont dx, dy, dz sont les trois arêtes.

Remarque. — En appliquant la formule de la moyenne à l'intégrale définie qui représente l'arc M_0M_1, dont les extrémités correspondent aux valeurs t_0, t_1 du paramètre $(t_1 > t_0)$, on a

$$s = \text{arc}\, M_0M_1 = (t_1 - t_0)\sqrt{f'^2(\theta) + \varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)},$$

θ étant compris dans l'intervalle (t_0, t_1). On a de même, en dési-

gnant par c la corde M_0M_1,

$$c^2 = [f(t_1) - f(t_0)]^2 + [\varphi(t_1) - \varphi(t_0)]^2 + [\psi(t_1) - \psi(t_0)]^2;$$

en appliquant la formule des accroissements finis à chacune des différences $f(t_1) - f(t_0)$, ..., nous pouvons écrire

$$c = (t_1 - t_0)\sqrt{f'^2(\xi) + \varphi'^2(\eta) + \psi'^2(\zeta)},$$

les trois nombres ξ, η, ζ appartenant à l'intervalle (t_0, t_1). D'après le calcul fait plus haut, la différence des deux radicaux est inférieure à ε, pourvu que l'oscillation des fonctions $f'(t), \varphi'(t), \psi'(t)$ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$ dans l'intervalle (t_0, t_1). On a donc

$$s - c < \varepsilon(t_1 - t_0),$$

et par suite

$$1 - \frac{c}{s} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{f'^2(\theta) + \varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}}.$$

Si l'arc M_0M_1 devient infiniment petit, $t_1 - t_0$ tend vers zéro; il en est de même de ε et, par suite, de $1 - \frac{c}{s}$. Donc *le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde a pour limite l'unité.*

Exemple. — Soit à trouver l'arc d'une courbe plane donnée par son équation en coordonnées polaires $\rho = f(\omega)$. En prenant ω pour variable indépendante, la courbe est représentée par les trois équations $x = \rho\cos\omega, y = \rho\sin\omega, z = 0$, d'où l'on tire

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (\cos\omega\, d\rho - \rho\sin\omega\, d\omega)^2 + (\sin\omega\, d\rho + \rho\cos\omega\, d\omega)^2,$$

ou, en réduisant,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

Prenons, par exemple, la *cardioïde* représentée par l'équation

$$\rho = R + R\cos\omega.$$

La formule précédente donne

$$ds^2 = R^2 d\omega^2[\sin^2\omega + (1 + \cos\omega)^2] = 4R^2\cos^2\frac{\omega}{2}\, d\omega^2;$$

si nous faisons varier ω de 0 à π seulement, on en déduit

$$ds = 2R\cos\frac{\omega}{2}\, d\omega,$$

et la longueur d'un arc a pour expression

$$\left(4\,R\sin\frac{\omega}{2}\right)_{\omega_0}^{\omega_1}.$$

La longueur totale est donc égale à 8R.

81. **Cosinus directeurs.** — Pour étudier les propriétés d'une courbe, on est souvent conduit à prendre l'arc pour variable indépendante. On adopte alors sur la courbe considérée un sens de parcours positif, et l'on désigne par s la longueur de l'arc AM compris entre un point fixe A et un point quelconque M, affectée du signe + ou du signe —, suivant que la direction de A en M est la direction positive ou la direction opposée. En un point quelconque M de cette courbe menons la direction de la tangente qui coïncide avec la direction des arcs croissants, et soient α, β, γ les angles que fait cette direction avec les directions positives de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. On a

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz} = \pm\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{\pm 1}{ds};$$

pour savoir le signe qui convient, supposons que la direction positive de la tangente fasse un angle aigu avec Ox; x et s croissent en même temps, on doit donc prendre le signe +. Si l'angle α est obtus, $\cos\alpha$ est négatif, x diminue quand s augmente, $\frac{dx}{ds}$ est négatif, il faut encore prendre le signe +. On a donc, dans tous les cas,

$$(10) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

dx, dy, dz, ds étant les différentielles prises par rapport à la variable indépendante, qui peut être quelconque.

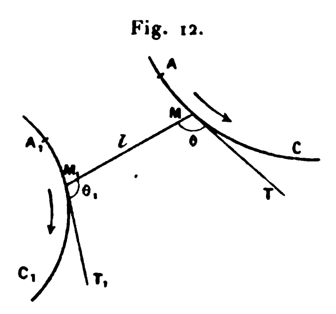
82. **Variation d'un segment de droite.** — Soit MM_1 un segment de droite dont les extrémités décrivent deux courbes C, C_1. Sur chacune des deux courbes adoptons un point pour origine et un sens positif de parcours.

Soient : s l'arc AM, s_1 l'arc A_1M_1, ces deux arcs étant pris avec un signe, l la longueur MM_1, θ l'angle de MM_1 avec la direction positive de la tangente MT, θ_1 l'angle de M_1M avec la direction

positive de la tangente M_1T_1. Nous allons chercher une relation entre θ, θ_1 et les différentielles ds, ds_1, dl.

Appelons x, y, z, x_1, y_1, z_1 les coordonnées des points M, M_1

Fig. 12.



respectivement, α, β, γ les angles de MT avec les axes, α_1, β_1, γ_1 les angles de M_1T_1 avec les axes. On a

$$l^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2;$$

on en déduit

$$l\,dl = (x - x_1)(dx - dx_1) + (y - y_1)(dy - dy_1) + (z - z_1)(dz - dz_1),$$

ce qui peut s'écrire en tenant compte des formules (10) et des formules analogues pour C_1,

$$\begin{aligned} dl = & \left(\frac{x - x_1}{l}\cos\alpha + \frac{y - y_1}{l}\cos\beta + \frac{z - z_1}{l}\cos\gamma\right)ds \\ & + \left(\frac{x_1 - x}{l}\cos\alpha_1 + \frac{y_1 - y}{l}\cos\beta_1 + \frac{z_1 - z}{l}\cos\gamma_1\right)ds_1. \end{aligned}$$

Mais $\frac{x - x_1}{l}$, $\frac{y - y_1}{l}$, $\frac{z - z_1}{l}$ sont les cosinus directeurs de M_1M, et le coefficient de ds est $-\cos\theta$. De même, le coefficient de ds_1 est $-\cos\theta_1$ et l'on obtient la relation cherchée

$$(10)' \qquad dl = -ds\cos\theta - ds_1\cos\theta_1,$$

dont nous ferons souvent des applications. Nous allons en indiquer une.

83. **Théorèmes de Graves et de Chasles.** — Soient E, E′ deux ellipses homofocales; d'un point M de l'ellipse extérieure E′, on mène les deux tangentes MA, MB à l'ellipse E; *la différence* MA + MB — arc ANB *reste constante lorsque le point* M *parcourt l'ellipse* E′.

Soient s et s' les arcs OA et OB, σ l'arc O'M, l et l' les longueurs AM et BM, θ l'angle de MB avec la direction positive de la tangente MT; d'après les propriétés focales, l'angle de MA avec MT est égal à $\pi - \theta$. En observant que AM coïncide avec la direction positive de la tangente en A et que BM est opposée à la direction positive de la tangente en B, la formule (10)' donne successivement

$$dl = -\,ds + d\sigma\cos\theta,$$
$$dl' = \quad ds' - d\sigma\cos\theta,$$

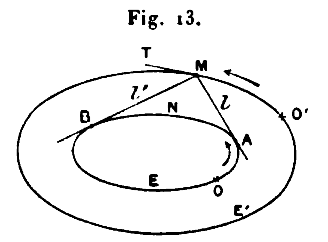
et, en ajoutant, il vient

$$d(l + l') = d(s' - s) = d\,\text{arc}\,\text{ANB},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Ce théorème est dû à un géomètre anglais, Graves. On démontre de la

Fig. 13.



même façon le théorème suivant, découvert par Chasles : Étant données une ellipse et une hyperbole homofocale se rencontrant en N, si d'un point M, pris sur la branche d'hyperbole qui passe au point N, on mène les deux tangentes MA, MB à l'ellipse, la différence des arcs NA — NB est égale à la différence des tangentes MA — MB.

III. — CHANGEMENT DE VARIABLES. — INTÉGRATION PAR PARTIES.

Un grand nombre d'intégrales définies, que l'on ne peut obtenir immédiatement, se calculent au moyen de deux procédés généraux que nous allons faire connaître.

84. Changement de variables. — Si, dans une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$, on remplace la variable x par une nouvelle variable indépendante t au moyen de la substitution $x = \varphi(t)$, on obtient une nouvelle intégrale définie. Nous supposerons que la fonction $\varphi(t)$ est continue et admet une dérivée continue entre α

et β, et que $\varphi(t)$ varie toujours dans le même sens depuis a jusqu'à b lorsque t varie de α à β.

L'intervalle (α, β) étant partagé en intervalles plus petits par des valeurs intermédiaires $\alpha, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \beta$, soient $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ les valeurs correspondantes de $x = \varphi(t)$. On a, d'après le théorème des accroissements finis,

$$x_i - x_{i-1} = (t_i - t_{i-1})\varphi'(\theta_i),$$

θ_i étant compris entre t_{i-1} et t_i; soit $\xi_i = \varphi(\theta_i)$ la valeur correspondante de x, qui est comprise entre x_{i-1} et x_i. La somme

$$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(b - x_{n-1})$$

a pour limite l'intégrale définie considérée. Mais cette somme peut aussi s'écrire

$$f[\varphi(\theta_1)]\varphi'(\theta_1)(t_1 - \alpha) + \ldots + f[\varphi(\theta_i)]\varphi'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}) + \ldots,$$

et, sous cette forme, on reconnaît qu'elle a pour limite la nouvelle intégrale définie $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$. On a donc l'égalité

$$(11) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

qui constitue la formule du *changement de variable*. On voit qu'on obtient la nouvelle différentielle sous le signe d'intégration en remplaçant, dans $f(x)\,dx$, x et dx par leurs valeurs $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)\,dt$, tandis que les nouvelles limites sont les valeurs de t correspondant aux anciennes limites. En choisissant convenablement la fonction $\varphi(t)$, il peut se faire que la nouvelle intégrale soit plus facile à calculer que la première, mais on ne saurait donner à cet égard de règles bien précises.

Soit, par exemple, à calculer l'intégrale définie

$$\int_0^x \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2};$$

en posant $x = \alpha + \beta t$, il vient

$$\int_0^x \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta}\int_{-\frac{\alpha}{\beta}}^{t} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\beta}\left(\text{arc tang}\, t + \text{arc tang}\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

ou, en revenant à la variable x,

$$\frac{1}{\beta}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}+\operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Toutes les hypothèses qui ont été faites pour établir la formule (11) ne sont pas indispensables. Ainsi il n'est pas nécessaire que la fonction $\varphi(t)$ varie toujours dans le même sens lorsque t varie de α à β. Pour fixer les idées, supposons que t croissant de α à $\gamma\,(\gamma<\beta)$, $\varphi(t)$ aille en croissant de a à $c\,(c>b)$, puis, que t croissant de γ à β, $\varphi(t)$ décroisse de c à b. Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, c), on peut appliquer la formule à chacun des intervalles (a, c), (c, b), ce qui donne

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_\alpha^\gamma f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_c^b f(x)\,dx=\int_\gamma^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt;$$

en ajoutant ces deux égalités, il vient

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Par contre, il est nécessaire que la fonction $\varphi(t)$ soit une fonction bien déterminée de t. Si l'on ne tient pas compte de cette condition, on peut être conduit à des résultats absurdes. Par exemple, si à l'intégrale $\int_{-1}^{+1} dx$ on applique telle quelle la formule (11) en posant $x=t^{\frac{3}{2}}$, on est conduit à écrire

$$\int_{-1}^{+1} dx=\int_1^1 \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt,$$

résultat qui est absurde, puisque la seconde intégrale est nulle. Pour appliquer correctement la formule, il faut partager l'intervalle $(-1, +1)$ en deux intervalles $(-1, 0)$, $(0, 1)$. Dans le premier intervalle, on posera $x=-\sqrt{t^3}$, et l'on fera varier t de 1 à 0; dans le second intervalle, on posera $x=\sqrt{t^3}$, et l'on fera

varier t de 0 à 1. On trouve ainsi un résultat exact

$$\int_{-1}^{+1} dx = 3\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \left(2t^{\frac{3}{2}}\right)_0^1 = 2.$$

Remarque. — Si l'on remplace, dans la formule (11), les limites supérieures b et β par des limites variables x et t, il vient

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_\alpha^t f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt;$$

ce qui montre qu'une fonction $F(x)$ dont la dérivée est $f(x)$ se change, quand on pose $x = \varphi(t)$, en une fonction $\Phi(t)$ dont la dérivée est $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. C'est aussi ce qui résulte immédiatement de la formule qui donne la dérivée d'une fonction de fonction. Nous pouvons donc écrire, d'une manière générale,

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt;$$

c'est la formule du changement de variable dans les intégrales indéfinies.

85. Intégration par parties. — Soient u et v deux fonctions continues, ainsi que leurs dérivées u' et v', entre a et b. On a

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

et, en intégrant les deux membres de cette égalité,

$$\int_a^b \frac{d(uv)}{dx}\,dx = \int_a^b u\frac{dv}{dx}\,dx + \int_a^b v\frac{du}{dx}\,dx,$$

ce que l'on peut encore écrire

(12) $$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du,$$

en désignant d'une façon générale par $[F(x)]_a^b$ la différence

$$F(b) - F(a).$$

Si l'on remplace la limite b par une limite variable x, a restant fixe, ce qui revient à considérer les intégrales indéfinies au lieu

des intégrales définies, on a de même

$$(13) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Le calcul de l'intégrale $\int u\,dv$ est ainsi ramené au calcul de l'intégrale $\int v\,du$, qui peut être plus facile. Soit, par exemple, à calculer l'intégrale définie $\int_a^b x^m \log x\,dx$, $(m+1 \neq 0)$; en posant $u = \log x$, $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, la formule (12) donne

$$\int_a^b \log x . x^m\,dx = \left[\frac{x^{m+1}\log x}{m+1}\right]_a^b - \frac{1}{m+1}\int_a^b x^m\,dx$$
$$= \left[\frac{x^{m+1}\log x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}\right]_a^b.$$

La formule ne s'applique plus si $m+1=0$; on a, dans ce cas particulier,

$$\int_a^b \log x \frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_a^b.$$

La formule (12) peut être généralisée. Désignons par u', u'', ..., $u^{(n+1)}$, v', v'', ..., $v^{(n+1)}$ les dérivées successives des deux fonctions u et v. L'application de la formule (12) aux intégrales $\int u\,dv^{(n)}$, $\int u'\,dv^{(n-1)}$, ..., conduit aux égalités suivantes

$$\int_a^b uv^{(n+1)}\,dx = \int_a^b u\,dv^{(n)} = [uv^{(n)}]_a^b - \int_a^b u'v^{(n)}\,dx,$$
$$\int_a^b u'v^{(n)}\,dx = \int_a^b u'\,dv^{(n-1)} = [u'v^{(n-1)}]_a^b - \int_a^b u''v^{(n-2)}\,dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int_a^b u^{(n)}v'\,dx = \int_a^b u^{(n)}\,dv = [u^{(n)}v]_a^b - \int_a^b u^{(n+1)}v\,dx.$$

En multipliant ces égalités par $+1$ et -1 alternativement et ajoutant, il vient

$$(14) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b uv^{(n+1)}\,dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)}v]_a^b \\ \displaystyle\qquad + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx, \end{cases}$$

formule qui ramène le calcul de l'intégrale $\int uv^{(n+1)}\,dx$ au calcul de l'intégrale $\int u^{(n+1)}v\,dx$.

Cette formule s'applique en particulier quand on a sous le signe d'intégration le produit d'un polynome u de degré n au plus par la dérivée d'ordre $(n+1)$ d'une fonction connue v; on a, en effet, $u^{(n+1)}=0$, et le second membre ne renferme plus aucun signe d'intégration. Soit, par exemple, à calculer l'intégrale définie

$$\int_a^b e^{\omega x} f(x)\,dx,$$

où $f(x)$ est un polynome de degré n; on posera $u=f(x)$, $v=\frac{e^{\omega x}}{\omega^{n+1}}$, et la formule (14) donne, en mettant $e^{\omega x}$ en facteur,

$$(15)\qquad \int_a^b e^{\omega x} f(x)\,dx = \left\{ e^{\omega x}\left[\frac{f(x)}{\omega} - \frac{f'(x)}{\omega^2} + \ldots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{\omega^{n+1}}\right]\right\}_a^b.$$

La même méthode, ou, ce qui revient au même, une suite d'intégrations par parties permet de calculer les intégrales définies

$$\int_a^b \cos mx f(x)\,dx,\qquad \int_a^b \sin mx f(x)\,dx,$$

où $f(x)$ est un polynome.

86. Formule de Taylor. — Dans la formule (14), remplaçons u par une fonction $F(x)$, continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$, entre a et b, et posons $v=(b-x)^n$. On a

$$v' = -n(b-x)^{n-1},\qquad v'' = n(n-1)(b-x)^{n-2},\qquad \ldots,$$
$$v^{(n)} = (-1)^n\, 1.2\ldots n,\qquad v^{(n+1)} = 0,$$

et la formule devient, en remarquant que $v, v', v'', \ldots, v^{(n-1)}$ s'annulent pour $x=b$,

$$\begin{aligned} 0 = (-1)^n \Big[& n!\,F(b) - n!\,F(a) - n!\,F'(a)(b-a) \\ & - \frac{n!}{2} F''(a)(b-a)^2 \ldots - F^{(n)}(a)(b-a)^n \Big] \\ & + (-1)^{n+1}\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx. \end{aligned}$$

On tire de là

$$F(b) = F(a) + \frac{b-a}{1} F'(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!} F^{(n)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx;$$

le facteur $(b-x)^n$ conservant un signe constant lorsque x varie de a à b, on peut appliquer la formule de la moyenne à l'intégrale du second membre, ce qui donne

$$\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx = F^{(n+1)}(\xi) \int_a^b (b-x)^n dx$$
$$= \frac{1}{n+1} (b-a)^{n+1} F^{(n+1)}(\xi),$$

ξ étant compris entre a et b. En substituant cette valeur dans l'égalité précédente, nous retrouvons précisément la formule de Taylor, avec la forme du reste de Lagrange.

87. **Transcendance de** e. — La formule (15) permet de démontrer un théorème célèbre, découvert par M. Hermite : *Le nombre e n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers* [1].

Faisons, dans la formule (15), $a = 0$, $\omega = -1$; il vient

$$\int_0^b e^{-x} f(x)\, dx = -[e^{-x} F(x)]_0^b,$$

où

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(n)}(x),$$

ce que nous pouvons encore écrire

$$(16) \qquad F(b) = e^b F(0) - e^b \int_0^b f(x) e^{-x} dx.$$

Cela posé, admettons que e soit racine d'une équation algébrique à coefficients entiers

$$c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \ldots + c_m e^m = 0.$$

Dans l'égalité précédente (16), faisons successivement $b = 0, 1, 2, \ldots, m$, et ajoutons les formules obtenues, après les avoir multipliées respectivement par $c_0, c_1, \ldots, c_m$, il vient

$$(17) \quad c_0 F(0) + c_1 F(1) + \ldots + c_m F(m) + \sum_{i=0}^{i=m} c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x} dx = 0,$$

---

[1] Cette démonstration est due à M. David Hilbert, qui s'est inspiré de la méthode suivie par M. Hermite.

l'indice i ne prenant que les valeurs entières 0, 1, 2, ..., m. Nous allons montrer qu'une telle relation est impossible, si le polynome $f(x)$, qui est resté arbitraire jusqu'ici, est convenablement choisi.

Prenons

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \ldots (x-m)^p,$$

p étant un nombre premier supérieur à m; ce polynome est de degré $mp+p-1$, et, si l'on calcule ses dérivées successives, à partir de la $p^{\text{ième}}$, tous les coefficients sont des nombres entiers divisibles par p, car le produit de p entiers consécutifs est divisible par $p!$ D'ailleurs $f(x)$ s'annule, ainsi que ses $(p-1)$ premières dérivées, pour $x = 1, 2, \ldots, m$; il s'ensuit que $F(1)$, $F(2)$, ..., $F(m)$ sont des nombres entiers divisibles par p. Reste à calculer $F(0)$

$$F(0) = f(0) + f'(0) + \ldots + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + f^{(p+1)}(0) + \ldots;$$

on a d'abord $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(p-2)}(0) = 0$, et $f^{(p)}(0), f^{(p+1)}(0), \ldots$ sont des nombres entiers divisibles par p pour la même raison que tout à l'heure. Pour avoir $f^{(p-1)}(0)$, il suffit de multiplier par $(p-1)!$ le coefficient de x^{p-1} dans $f(x)$, ce qui donne $\pm(1.2\ldots m)^p$. La somme

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + \ldots + c_m F(m)$$

est donc égale à un nombre entier divisible par p, augmenté de

$$\pm c_0(1.2\ldots m)^p;$$

si l'on a pris pour p un nombre premier supérieur à m et à c_0, ce dernier nombre ne pourra être divisible par p, et la première partie de la somme (17) sera un nombre entier *différent de zéro*.

Nous allons montrer maintenant qu'en prenant pour p un nombre premier assez grand, la somme

$$\sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x}\, dx$$

peut être rendue plus petite que toute quantité donnée. Lorsque x varie de 0 à i, chaque facteur de $f(x)$ est plus petit que m; on a donc

$$|f(x)| < \frac{1}{(p-1)!} m^{mp+p-1},$$

$$\left|\int_0^i f(x) e^{-x}\, dx\right| < \frac{1}{(p-1)!} m^{mp+p-1} \int_0^i e^{-x}\, dx < \frac{1}{(p-1)!} m^{mp+p-1},$$

et par suite

$$\left|\Sigma c_i e^i \int_0 f(x) e^{-x}\, dx\right| < M \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} e^m = \varphi(p),$$

M étant une limite supérieure de $|c_0|+|c_1|+\ldots+|c_m|$. Lorsque p augmente indéfiniment, la fonction $\varphi(p)$ tend vers zéro, car c'est le terme général d'une série convergente, où le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro. On peut donc trouver un nombre premier p assez grand pour que l'égalité (17) soit impossible; ce qui démontre le théorème de M. Hermite.

88. Polynomes de Legendre. — Proposons-nous de déterminer un polynome de degré n, $P_n(x)$, tel que l'intégrale

$$\int_a^b QP_n\,dx,$$

où Q est un polynome de degré inférieur à n, soit nulle, quel que soit ce polynome Q. On peut considérer P_n comme la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un polynome R de degré $2n$, et ce polynome R n'est pas complètement déterminé, car on peut lui ajouter un polynome arbitraire de degré $n-1$, sans changer la dérivée $n^{\text{ième}}$. Nous pouvons donc toujours supposer que l'on a $P_n = \dfrac{d^nR}{dx^n}$, le polynome R s'annulant ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées pour $x=a$. D'autre part, la formule d'intégration par parties nous donne

$$\int_a^b Q\frac{d^nR}{dx^n}\,dx = \left(Q\frac{d^{n-1}R}{dx^{n-1}} - Q'\frac{d^{n-2}R}{dx^{n-2}} + \ldots \pm R\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right)_a^b;$$

puisque l'on a, par hypothèse,

$$R(a)=0,\qquad R'(a)=0,\qquad \ldots,\qquad R^{(n-1)}(a)=0,$$

il faudra que l'on ait aussi, pour que l'intégrale soit nulle,

$$Q(b)R^{(n-1)}(b) - Q'(b)R^{(n-2)}(b) + \ldots \pm Q^{(n-1)}(b)R(b) = 0.$$

Le polynome Q de degré $n-1$ étant arbitraire, les quantités $Q(b)$, $Q'(b)$, ..., $Q^{(n-1)}(b)$ sont elles-mêmes arbitraires, et il faudra que l'on ait aussi

$$R(b)=0,\qquad R'(b)=0,\qquad \ldots,\qquad R^{(n-1)}(b)=0.$$

Le polynome $R(x)$ est donc égal, à un facteur constant près, au produit $(x-a)^n(x-b)^n$, et le polynome cherché P_n est complètement déminé, à un facteur constant près,

$$P_n = C\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n].$$

Lorsque les limites a et b sont -1 et $+1$, les polynomes P_n sont les polynomes de Legendre. En choisissant la constante C comme Legendre,

nous poserons

$$(18) \qquad X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

Si l'on convient en outre de poser $X_0 = 1$, on a

$$X_0 = 1, \qquad X_1 = x, \qquad X_2 = \frac{3x^2-1}{2}, \qquad X_3 = \frac{5x^3-3x}{2}, \qquad \ldots;$$

X_n est un polynome de degré n, où tous les exposants de x sont de même parité que n. La formule de Leibniz, qui donne la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux facteurs, montre immédiatement que l'on a

$$(19) \qquad X_n(1) = 1, \qquad X_n(-1) = (-1)^n.$$

D'après la propriété générale que nous venons d'établir, on a, $\varphi(x)$ désignant un polynome quelconque de degré inférieur à n,

$$(20) \qquad \int_{-1}^{+1} X_n \varphi(x)\,dx = 0;$$

en particulier, si m et n sont deux nombres entiers différents, on a toujours

$$(21) \qquad \int_{-1}^{+1} X_m X_n\,dx = 0.$$

Cette formule permet d'établir très simplement une relation de récurrence entre trois polynomes X_n consécutifs. Observons d'abord que tout polynome de degré n peut s'exprimer comme fonction linéaire à coefficients constants au moyen de $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Nous pouvons donc écrire

$$xX_n = C_0 X_{n+1} + C_1 X_n + C_2 X_{n-1} + C_3 X_{n-2} + \ldots,$$

$C_0, C_1, C_2, \ldots,$ étant des coefficients constants. Pour déterminer C_3, par exemple, multiplions les deux membres de cette égalité par X_{n-2} et intégrons entre les limites -1 et $+1$; il reste, en vertu des formules (20) et (21),

$$C_3 \int_{-1}^{+1} X_{n-2}^2\,dx = 0,$$

et, par suite, $C_3 = 0$. On démontrerait de même que l'on a $C_4 = 0$, $C_5 = 0, \ldots$. Le coefficient C_1 est nul aussi, puisque le produit xX_n ne renferme pas de terme en x^n. Enfin, pour déterminer C_0 et C_2, nous n'avons qu'à égaler les coefficients de x^{n+1}, et à égaler les deux membres pour $x = 1$. Nous obtenons ainsi la relation de récurrence

$$(22) \qquad (n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0,$$

qui permet de calculer très simplement les polynomes X_n de proche en proche.

La relation (22) montre que la suite des polynomes

(23) $$X_0, \quad X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_n,$$

jouit des propriétés d'une suite de Sturm; x variant d'une manière continue de -1 à $+1$, le nombre des variations présentées par cette suite ne peut changer que lorsque x passe par une racine de $X_n = 0$. Or, les formules (19) montrent que, pour $x = -1$, la suite (23) présente n variations, et n'en présente aucune pour $x = 1$. L'équation $X_n = 0$ a donc n racines réelles, comprises entre -1 et $+1$; ce qui résulte aussi très facilement du théorème de Rolle.

IV. — EXTENSIONS DIVERSES DE LA NOTION D'INTÉGRALE. INTÉGRALES CURVILIGNES [1].

89. La fonction à intégrer devient infinie. — Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction à intégrer restait finie entre les limites de l'intégration. On peut, dans certains cas, étendre la définition à des fonctions devenant infinies entre les limites. Considérons d'abord le cas particulier suivant : $f(x)$ est continue pour toute valeur de x comprise entre a et b, et pour $x = b$, mais elle devient infinie pour $x = a$. Nous supposerons, pour fixer les idées, $a < b$. L'intégrale de $f(x)$, prise entre les limites $a + \varepsilon$ et b $(\varepsilon > 0)$, a une valeur finie, aussi petit que soit ε. Si cette intégrale tend vers une limite lorsque ε tend vers zéro, on convient, comme il est naturel, de représenter cette limite par

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Lorsqu'on connaît une fonction primitive de $f(x)$, soit $F(x)$, on a

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = F(b) - F(a+\varepsilon)$$

et il suffit d'examiner si $F(a+\varepsilon)$ tend vers une limite lorsque ε tend vers zéro. On a, par exemple,

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{M\,dx}{(x-a)^\mu} = -\frac{M}{\mu-1}\left[\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}\right] \qquad (\mu \neq 1).$$

[1] Le lecteur peut, sans inconvénient, lire le Chapitre suivant avant les derniers paragraphes de ce Chapitre.

Si $\mu > 1$, le terme $\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}$ augmente indéfiniment lorsque ε tend vers zéro; au contraire, si μ est moindre que un, on peut écrire $\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}} = \varepsilon^{1-\mu}$, et l'on voit que ce terme tend vers zéro avec ε. L'intégrale définie tend donc vers une limite

$$\int_a^b \frac{M\,dx}{(x-a)^\mu} = \frac{M(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu};$$

si $\mu = 1$, on a

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{M\,dx}{x-a} = M \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

et le second membre augmente indéfiniment lorsque ε tend vers zéro. En résumé, pour que l'intégrale considérée ait une limite, *il faut et il suffit que μ soit moindre que un.*

La courbe qui a pour équation

$$y = \frac{M}{(x-a)^\mu}$$

admet la droite $x = a$ pour asymptote, si μ est positif. Cependant l'aire comprise entre l'axe des x, une ordonnée fixe $x = b$, la courbe et son asymptote a une valeur finie, d'après ce qu'on vient de voir, pourvu que l'on ait $\mu < 1$.

Lorsqu'on ne connaît pas de fonction primitive de $f(x)$, on procède par comparaison avec des intégrales connues. On prend le plus souvent l'intégrale précédente comme terme de comparaison, ce qui conduit à quelques règles pratiques, suffisantes dans beaucoup de cas. Observons d'abord que la limite supérieure b n'intervient pas dans les raisonnements, car tout dépend de la façon dont $f(x)$ devient infinie pour $x = a$. On peut remplacer b par un nombre quelconque c compris entre a et b, ce qui revient à écrire $\int_{a+\varepsilon}^b = \int_{a+\varepsilon}^c + \int_c^b$. En particulier, si $f(x)$ n'a pas une infinité de racines dans le voisinage de $x = a$, on peut supposer que $f(x)$ conserve un signe constant entre a et c.

Nous établirons d'abord le lemme suivant : *Soit $\varphi(x)$ une fonction positive dans l'intervalle (a, b), telle que $\int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x)\,dx$ ait une limite. Si l'on a constamment $|f(x)| < \varphi(x)$ dans cet*

intervalle, l'intégrale définie $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ *a aussi une limite.*

Si $f(x)$ est positive, la démonstration est immédiate. On a, en effet, puisque $f(x)$ est moindre que $\varphi(x)$,

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx < \int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx;$$

d'ailleurs $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ augmente lorsque ε diminue, puisque tous ses éléments sont positifs. L'inégalité précédente montre qu'elle est constamment moindre que la limite de la seconde intégrale; elle a donc elle-même une limite. Si $f(x)$ était négatif entre a et b, on n'aurait qu'à changer le signe de tous les éléments. Enfin, si la fonction $f(x)$ a une infinité de racines dans le voisinage de $x = a$, nous pouvons écrire

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \int_{a+\varepsilon}^{b} [f(x) + |f(x)|]\,dx - \int_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|\,dx.$$

La seconde intégrale du second membre a une limite puisque $|f(x)| < \varphi(x)$. D'autre part, la fonction $f(x) + |f(x)|$ est positive ou nulle entre a et b, et sa valeur absolue ne peut être supérieure à $2\varphi(x)$; l'intégrale

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} [f(x) + |f(x)|]\,dx$$

a donc aussi une limite. On déduit de là que, si une fonction $f(x)$ ne tend vers aucune limite pour $x = a$, tout en restant inférieure en valeur absolue à un nombre fixe, l'intégrale a une limite. Par exemple, l'intégrale $\int_{0}^{1} \sin\frac{1}{x}\,dx$ a une valeur déterminée.

Règle pratique. — Supposons que la fonction $f(x)$ puisse se mettre sous la forme

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}},$$

la fonction $\psi(x)$ restant finie lorsque x tend vers a. *Si on a* $\mu < 1$, *et si la fonction* $\psi(x)$ *reste moindre en valeur absolue qu'un nombre fixe* M, *l'intégrale a une limite. Si l'on a* $\mu \geqq 1$, *et si la*

valeur absolue de $\psi(x)$ est supérieure à un nombre positif m, l'intégrale n'a pas de limite.

La première partie de la proposition est immédiate. En effet, la valeur absolue de $f(x)$ sera moindre que $\frac{M}{(x-a)^\mu}$, et l'intégrale de cette dernière fonction a une limite, puisqu'on suppose $\mu < 1$.

Pour démontrer la seconde partie, observons d'abord que $\psi(x)$, restant supérieur en valeur absolue à un nombre positif m, conserve un signe constant dans le voisinage de $x = a$. Supposons $\psi(x) > 0$ entre a et b; nous pouvons alors écrire

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx > \int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{m\,dx}{(x-a)^\mu}$$

et la seconde intégrale augmente indéfiniment, lorsque ε diminue. Ces règles suffisent toutes les fois qu'on peut trouver un exposant μ tel que le produit $(x-a)^\mu f(x)$ ait, pour $x = a$, une limite K différente de zéro. Si μ est inférieur à un, on peut prendre la limite b assez voisine de a pour que l'on ait dans l'intervalle (a, b),

$$|f(x)| < \frac{L}{(x-a)^\mu},$$

L étant un nombre positif, supérieur à $|K|$. L'intégrale a donc une limite. Au contraire si $\mu \geqq 1$, on peut prendre b assez voisin de a pour que l'on ait, dans l'intervalle (a, b),

$$|f(x)| > \frac{l}{(x-a)^\mu},$$

l étant un nombre positif inférieur à $|K|$. D'ailleurs la fonction $f(x)$, étant continue, conserve un signe constant et, par suite, l'intégrale $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ augmente indéfiniment en valeur absolue.

Exemples. — Soit $f(x) = \frac{P}{Q}$ une fonction rationnelle; si a est une racine d'ordre m du dénominateur, le produit $(x-a)^m f(x)$ tend vers une limite différente de zéro pour $x = a$. Comme m est au moins égal à un, on voit que l'intégrale $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ croît au delà de toute limite lorsque ε tend vers zéro. Supposons au con-

traire

$$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

P et R étant deux polynomes et $R(x)$ étant premier avec sa dérivée; a étant une racine de $R(x)$, le produit $(x-a)^{\frac{1}{2}} f(x)$ a une limite pour $x = a$; l'intégrale a donc elle-même une limite. Ainsi

$$\int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

a pour limite $\frac{\pi}{2}$ pour $\varepsilon = 0$.

Prenons encore l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{1} \log x \, dx$; le produit $x^{\frac{1}{2}} \log x$ a zéro pour limite; à partir d'une valeur de x assez petite on peut donc écrire $\log x < M x^{-\frac{1}{2}}$, M étant un nombre positif choisi à volonté. L'intégrale a donc une limite.

Tout ce qui a été dit de la limite inférieure a peut être répété sans modification pour la limite supérieure b. Si la fonction $f(x)$ est infinie pour $x = b$, on définira l'intégrale $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ comme la limite de l'intégrale $\int_{a}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx$, lorsque ε' tend vers zéro. Si $f(x)$ est infinie aux deux limites, on définira $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ comme la limite de l'intégrale $\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx$, lorsque ε et ε' tendent vers zéro, indépendamment l'un de l'autre. Soit c un nombre quelconque compris entre a et b; nous pouvons écrire

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

et chacune des intégrales qui sont au second membre doit admettre une limite. Enfin, si $f(x)$ devient infinie pour une valeur c comprise entre a et b, on définit l'intégrale $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ comme la somme des limites des deux intégrales $\int_{a}^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx$, $\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$,

et l'on procède de la même façon pour un nombre quelconque de discontinuités comprises entre a et b.

Il est à remarquer que la formule fondamentale (6), qui a été établie en supposant $f(x)$ continue entre a et b, s'applique encore si $f(x)$ devient infinie entre ces limites, pourvu que la fonction primitive $F(x)$ reste continue. Pour fixer les idées, supposons que la fonction $f(x)$ ne devienne infinie que pour une valeur c comprise entre a et b. On a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx;$$

si $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$, nous pouvons écrire ceci :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'=0} F(c-\varepsilon') - F(a) + F(b) - \lim_{\varepsilon=0} F(c+\varepsilon).$$

La fonction $F(x)$ étant supposée continue pour $x = c$, $F(c+\varepsilon)$ et $F(c-\varepsilon')$ ont la même limite $F(c)$, et par suite il reste

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Par exemple

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \left(3x^{\frac{1}{3}}\right)_{-1}^{+1} = 6.$$

Si la fonction primitive $F(x)$ devient elle-même infinie entre a et b, la formule n'est plus applicable, car l'intégrale qui est au premier membre n'a, du moins jusqu'à présent, aucune signification.

Les formules du changement de variable et de l'intégration par parties s'étendent de la même façon aux nouvelles intégrales, en les considérant comme limites d'intégrales ordinaires.

90. L'une des limites devient infinie. — Soit $f(x)$ une fonction continue de x pour toute valeur de x supérieure à un nombre a. L'intégrale $\int_a^l f(x)\,dx$, où $l > a$, a une valeur finie, aussi grand que soit l; si cette intégrale tend vers une limite lorsque l augmente indéfiniment, on représente cette limite par $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Lorsqu'on connaît une fonction primitive de $f(x)$, il est facile de voir si l'intégrale a une limite. Ainsi l'on a

$$\int_0^l \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} l;$$

lorsque l augmente indéfiniment, le second membre a pour limite $\frac{\pi}{2}$, et nous pouvons écrire

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On a de même, en supposant a positif et $\mu - 1$ différent de zéro,

$$\int_a^l \frac{k\,dx}{x^\mu} = \frac{k}{1-\mu}\left(\frac{1}{l^{\mu-1}} - \frac{1}{a^{\mu-1}}\right);$$

si μ est plus grand que un, le second membre tend vers une limite lorsque l croît indéfiniment, et l'on peut écrire

$$\int_a^{+\infty} \frac{k\,dx}{x^\mu} = \frac{k}{(\mu-1)a^{\mu-1}}.$$

Au contraire, si μ est moindre que un, l'intégrale augmente indéfiniment avec l. Il en est de même si $\mu = 1$, car l'intégrale s'exprime par un logarithme.

Quand on ne connaît pas de fonction primitive de $f(x)$, on procède encore par comparaison, en remarquant d'abord qu'on peut prendre pour limite inférieure a un nombre aussi grand qu'on le voudra. On s'appuie sur le lemme suivant :

Soit $\varphi(x)$ une fonction positive pour $x > a$, telle que l'intégrale $\int_a^l \varphi(x)\,dx$ ait une limite; si l'on a, pour toutes les valeurs de x supérieures à a, $|f(x)| \leqq \varphi(x)$, l'intégrale $\int_a^l f(x)\,dx$ a aussi une limite.

La démonstration est la même que celle qui a été donnée plus haut. Lorsque la fonction $f(x)$ peut se mettre sous la forme

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{x^\mu},$$

la fonction $\psi(x)$ restant finie pour x infini, on a les théorèmes suivants, que je me borne à énoncer :

Si $\psi(x)$ est inférieur en valeur absolue à un nombre fixe M, *et μ supérieur à un, l'intégrale a une limite.*

Si $\psi(x)$ est plus grand en valeur absolue qu'un nombre positif m, et μ inférieur ou égal à un, l'intégrale n'a pas de limite.

Par exemple, l'intégrale $\int_0^l \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$ a une limite, car on peut écrire

$$\frac{\cos ax}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos ax}{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

et la fonction qui multiplie $\frac{1}{x^2}$ est inférieure à un en valeur absolue.

La règle précédente suffit lorsqu'on peut trouver un nombre positif μ tel que le produit $x^\mu f(x)$ tende vers une limite *différente de zéro* pour x infini. L'intégrale a une limite si μ est plus grand que un, et n'a pas de limite si μ est inférieur ou égal à un.

Par exemple, pour que l'intégrale d'une fraction rationnelle ait une limite, lorsque la limite supérieure de l'intégrale augmente indéfiniment, il faut et il suffit que le degré du dénominateur surpasse le degré du numérateur d'au moins *deux unités*. Prenons encore

$$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

P et R étant deux polynomes de degrés p et r respectivement; le produit $x^{\frac{r}{2}-p} f(x)$ a une limite différente de zéro pour x infini. Pour que l'intégrale ait une limite, il faut et il suffit que l'on ait $p < \frac{r}{2} - 1$.

91. Les règles précédentes ne suffisent pas toujours pour décider si une intégrale a une limite ou non. Prenons par exemple $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; le produit $x^\mu f(x)$ a pour limite zéro lorsque μ est moindre que un, et peut prendre des valeurs supérieures à tout nombre donné si μ est plus grand que un. Ce produit oscille

entre $+1$ et -1, si $\mu = 1$. Aucune des règles énoncées ne s'applique; cependant l'intégrale a une limite. Considérons l'intégrale un peu plus générale

$$A = \int_0^l e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx \qquad (\alpha \geqq 0);$$

la fonction sous le signe d'intégration change de signe pour $x = k\pi$. Nous sommes conduits à étudier la série alternée

$$(24) \qquad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$$

où l'on pose

$$a_0 = \int_0^\pi e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad a_1 = -\int_\pi^{2\pi} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad \ldots,$$

$$a_n = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx \right|;$$

le terme général a_n peut encore s'écrire, en changeant x en $y + n\pi$,

$$a_n = \int_0^\pi e^{-\alpha y - n\alpha\pi} \frac{\sin y}{y + n\pi}\, dy.$$

Il est évident que la fonction sous le signe d'intégration diminue quand n augmente, et, par suite, on a $a_{n+1} < a_n$; d'ailleurs, le terme général a_n est moindre que $\int_0^\pi \frac{dy}{n\pi}$, c'est-à-dire que $\frac{1}{n}$. La série précédente est donc convergente, puisque les termes vont en décroissant en valeur absolue et que le terme général tend vers zéro. Si la limite supérieure l est comprise entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$, nous pouvons écrire

$$\int_0^l e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx = S_n \pm \theta a_n, \qquad 0 < \theta < 1,$$

S_n étant la somme des n premiers termes de la série (24); lorsque l augmente indéfiniment, il en est de même du nombre entier n, a_n tend vers zéro, et l'intégrale a pour limite la somme S de la série (24).

On démontrera de la même façon que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx,$$

qui se présentent dans la théorie de la diffraction, ont une valeur finie. La courbe $y = \sin x^2$, par exemple, a la forme ondulée d'une sinusoïde, mais les ondulations vont en se resserrant de plus en plus, car la différence $\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}$ de deux racines consécutives de $\sin x^2$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

Remarque. — Ce dernier exemple donne lieu à une remarque intéressante. Lorsque x croît indéfiniment, $\sin x^2$ oscille entre -1 et $+1$; l'intégrale peut donc avoir une limite sans que la fonction sous le signe d'intégration tende vers zéro, autrement dit, sans que la courbe $y = f(x)$ soit asymptote à l'axe des x. Voici encore un exemple où il en est de même et où la fonction $f(x)$ conserve de plus un signe constant. Soit

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^6 \sin^2 x};$$

cette fonction est constamment positive si x est positif, elle ne tend pas vers zéro, car on a $f(k\pi) = k\pi$. Pour faire voir que l'intégrale a une limite, considérons comme plus haut la série

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots,$$

où

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x\,dx}{1 + x^6 \sin^2 x};$$

x variant de $n\pi$ à $(n+1)\pi$, x^6 est supérieur à $n^6\pi^6$, et l'on a

$$a_n < (n+1)\pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + n^6\pi^6 \sin^2 x}.$$

Une fonction primitive est

$$\frac{1}{\sqrt{1 + n^6\pi^6}} \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1 + n^6\pi^6} \operatorname{tang} x\right)$$

x variant de $n\pi$ à $(n+1)\pi$, $\operatorname{tang} x$ devient infinie une seule fois en passant de $+\infty$ à $-\infty$; donc l'intégrale est égale (n° 77) à $\frac{\pi}{\sqrt{1 + n^6\pi^6}}$ et l'on a

$$a_n < \frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{1 + n^6\pi^6}} < \frac{(n+1)}{n^3\pi}.$$

La série Σa_n étant convergente, l'intégrale $\int_0^l f(x)\,dx$ a une limite.

Il est d'ailleurs évident que, si $f(x)$ a une limite h *différente de zéro* pour x infini, l'intégrale ne peut avoir de limite, car, à partir d'une valeur

assez grande de x, $f(x)$ sera supérieur en valeur absolue à $\left|\frac{h}{2}\right|$ et gardera un signe constant.

Les raisonnements qui précèdent offrent une grande analogie avec ceux que l'on emploie dans l'étude des séries. Le lien intime qui existe entre les deux questions a été mis en évidence par un théorème de Cauchy, qui sera exposé plus loin (Chap. VIII); on verra en même temps de nouveaux critères permettant de reconnaître si une intégrale a une limite ou non, dans des cas plus étendus que ceux que nous avons traités.

92. La fonction $\Gamma(a)$. — L'intégrale définie

$$(25) \qquad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

a une valeur déterminée, pourvu que a soit positif.

Considérons en effet les deux intégrales

$$\int_\varepsilon^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx, \quad \int_1^l x^{a-1} e^{-x}\, dx,$$

où ε est un nombre positif très petit, et l un nombre positif très grand. La seconde intégrale a toujours une limite, car à partir d'une valeur de x assez grande on a $x^{a-1}e^{-x} < \frac{1}{x^2}$, ce qui revient à écrire $e^x > x^{a+1}$. Quant à la première intégrale, le produit $x^{1-a}f(x)$ a pour limite 1 lorsque x tend vers zéro; pour que l'intégrale ait une limite, il faut et il suffit que $1-a$ soit inférieur à un, ou que a soit positif. Supposons cette condition remplie; la somme des deux limites est la fonction $\Gamma(a)$, appelée aussi *intégrale Eulérienne de seconde espèce*. Cette fonction $\Gamma(a)$ devient infinie lorsque a tend vers zéro; elle a une valeur positive pour toute valeur positive de a, et augmente indéfiniment avec a. Elle présente un minimum pour $x = 1,4616321\ldots$, et la valeur correspondante est $0,8856032\ldots$.

Intégrons par parties la formule (25) et supposons $a > 1$; en considérant $e^{-x}\,dx$ comme la différentielle de $-e^{-x}$, il vient

$$\Gamma(a) = -[x^{a-1}e^{-x}]_0^{+\infty} + (a-1)\int_0^{+\infty} x^{a-2}e^{-x}\, dx;$$

mais le produit $x^{a-1}e^{-x}$ est nul aux deux limites, puisque $a > 1$, et il reste

$$(26) \qquad \Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1).$$

L'application répétée de cette formule permet de ramener le calcul de $\Gamma(a)$ au cas où l'argument a est compris entre 0 et 1. Il est facile d'en déduire la valeur de $\Gamma(a)$, lorsque a est un nombre entier. On a d'abord

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = -[e^{-x}]_0^{+\infty} = 1;$$

la formule précédente donne ensuite successivement, en faisant $a = 2$, $3, \ldots, n, \ldots,$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 1.2,$$

et, d'une manière générale, si n est un nombre entier positif,

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1). \tag{27}$$

93. **Intégrales curvilignes.** — Soient AB un arc de courbe plane continu, et $P(x, y)$ une fonction continue de deux variables x, y le long de AB (x, y désignant les coordonnées d'un point de AB par rapport à deux axes situés dans son plan). Prenons sur l'arc AB un certain nombre de points de division $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots$, de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i), \ldots$, et sur chacun des arcs $m_{i-1}m_i$ prenons encore un point n_i à volonté, de coordonnées (ξ_i, η_i). Considérons la somme

$$\left\{\begin{array}{l} P(\xi_1, \eta_1)(x_1 - a) + P(\xi_2, \eta_2)(x_2 - x_1) + \ldots \\ \quad + P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots \end{array}\right. \tag{28}$$

étendue à tous les intervalles partiels; lorsque le nombre des points de division augmente indéfiniment, de façon que chacune des différences $x_i - x_{i-1}$ tende vers zéro, la somme précédente tend vers une limite que l'on appelle l'*intégrale curviligne* de $P(x, y)$ étendue à l'arc AB, et que l'on représente par le symbole

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx.$$

Pour démontrer l'existence de cette limite, supposons d'abord qu'une parallèle à Oy ne puisse rencontrer l'arc AB en plus d'un point. Soient a et b les abscisses des points A et B et $y = \varphi(x)$ l'équation de l'arc AB; $\varphi(x)$ est une fonction continue de x dans l'intervalle (a, b). Si l'on remplace y par $\varphi(x)$ dans $P(x, y)$, le résultat est également une fonction continue $\Phi(x) = P[x, \varphi(x)]$, et l'on a

$$P(\xi_i, \eta_i) = P[\xi_i, \varphi(\xi_i)] = \Phi(\xi_i).$$

La somme précédente peut donc s'écrire

$$\Phi(\xi_1)(x_1 - a) + \Phi(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \Phi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots;$$

elle a donc pour limite l'intégrale définie ordinaire

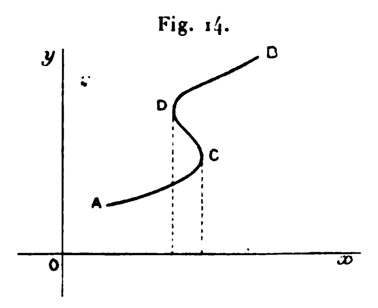
$$\int_a^b \Phi(x)\, dx = \int_a^b P[x, \varphi(x)]\, dx,$$

et, par suite,

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \int_a^b P[x, \varphi(x)]\, dx.$$

Si une parallèle à l'axe Oy peut rencontrer l'arc AB en plus d'un point, on partagera cet arc en plusieurs autres dont chacun n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à Oy. Étant donné, par exemple, un arc de courbe tel que ACDB (*fig.* 14), soient C

Fig. 14.



et D les points où l'abscisse est maximum ou minimum. Chacun des arcs AC, CD, DB satisfait à la condition précédente, et nous écrirons

$$\int_{ACDB} P(x, y)\, dx = \int_{AC} P(x, y)\, dx + \int_{CD} P(x, y)\, dx + \int_{DB} P(x, y)\, dx;$$

mais il est à remarquer que, pour calculer les trois intégrales du second membre, on devra remplacer y par trois fonctions différentes de la variable x dans $P(x, y)$.

Les intégrales curvilignes $\int_{AB} Q(x, y)\, dy$ se définissent de la même façon; ces intégrales, comme on le voit, se ramènent immédiatement aux intégrales définies ordinaires, mais leur introduction se justifie par leur utilité. Nous ferons remarquer aussi que l'arc de courbe AB peut se composer de portions de courbes absolument distinctes, telles que droites, arcs de cercle, etc.

Un cas très fréquent dans les applications est celui où les coor-

données d'un point de l'arc AB peuvent s'exprimer en fonction d'un paramètre variable

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

$\varphi(t)$ et $\psi(t)$ étant des fonctions continues de t, ainsi que les dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$; nous supposerons que, t variant de α à β, le point (x, y) décrit l'arc AB en marchant toujours dans le même sens. L'intervalle (α, β) étant divisé en intervalles partiels plus petits, soient t_{i-1} et t_i deux valeurs consécutives de t auxquelles correspondent sur l'arc AB deux points m_{i-1} et m_i, de coordonnées (x_{i-1}, y_{i-1}) et (x_i, y_i). On a

$$x_i - x_{i-1} = \varphi'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

θ_i étant compris entre t_{i-1} et t_i, et à cette valeur θ_i correspond un point (ξ_i, η_i) de l'arc $m_{i-1} m_i$. Nous pouvons donc écrire

$$\Sigma P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \Sigma P[\varphi(\theta_i), \psi(\theta_i)]\varphi'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

et, en passant à la limite,

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\, dt.$$

On obtiendrait de la même façon une formule analogue pour $\int Q\, dy$ et, en ajoutant les deux formules, il vient

$$(29) \qquad \int_{AB} P\, dx + Q\, dy = \int_\alpha^\beta [P\varphi'(t) + Q\psi'(t)]\, dt;$$

c'est la formule du changement de variable dans les intégrales curvilignes. Bien entendu, si l'arc de courbe AB se compose de portions de courbes distinctes, les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ n'auront pas la même expression tout le long de AB, et l'on appliquera la formule à chacune des portions séparément.

94. Aire d'une courbe fermée. — Nous avons défini plus haut l'aire de la portion du plan limitée par un arc de courbe AMB, une droite ne rencontrant pas l'arc AMB et les deux perpendiculaires AA_0, BB_0 abaissées des points A et B sur cette droite (n°s 65, 78, *fig.* 9). Considérons maintenant une courbe fermée continue de forme quelconque; nous entendons par là le lieu

décrit par un point M dont les coordonnées sont des fonctions continues $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ d'un paramètre t, qui reprennent les mêmes valeurs lorsque t croît de t_0 à T. Ces fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ peuvent d'ailleurs avoir des expressions tout à fait différentes entre les limites t_0 et T; c'est ce qui arrivera si le contour fermé C se compose d'arcs de courbes distinctes. Considérons sur la courbe C un certain nombre de points $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_{n-1}, M_0$ correspondant à des valeurs $t_0, t_1, t_2, \ldots$, du paramètre, croissantes de t_0 à T. En joignant ces points dans l'ordre où ils se succèdent sur la courbe, on obtient un polygone inscrit dans cette courbe; on appelle *aire de la courbe fermée* C la limite vers laquelle tend l'aire de ce polygone lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment, de façon que chacun des côtés tende vers zéro [1]. Cette définition est bien d'accord avec celle qui a été adoptée dans le cas particulier rappelé plus haut; car si l'on décompose le polygone $A_0AQ_1Q_2\ldots BB_0A_0$ en petits trapèzes par des parallèles à la droite AA_0, l'aire de l'un de ces petits trapèzes a pour expression $(x_i - x_{i-1})\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\right]$, ce qui peut encore s'écrire $(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$, ξ_i étant compris entre x_{i-1} et x_i. L'aire polygonale a donc pour limite l'intégrale définie $\int f(x)\,dx$.

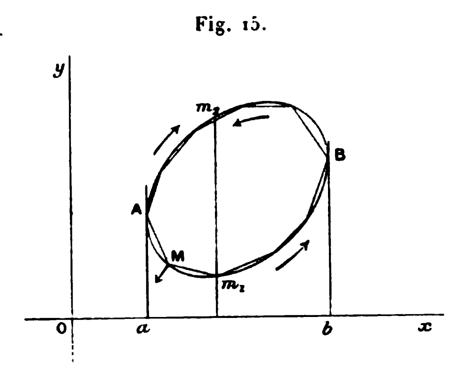
Considérons maintenant une courbe fermée C qui ne peut être rencontrée en plus de deux points par une droite parallèle à une direction fixe. Choisissons pour axe des y une droite parallèle à cette direction et pour axe des x une droite perpendiculaire, de telle façon que la courbe C soit tout entière dans l'angle xOy (*fig.* 15).

Les points du contour C se projettent sur Ox suivant les points d'un segment ab, et toute parallèle à Oy menée par un point de ab rencontre le contour C en deux points seulement m_1 et m_2. Soient $y_1 = \psi_1(x)$ et $y_2 = \psi_2(x)$ les équations des deux arcs de courbe Am_1B et Am_2B. Supposons, pour plus de clarté, que les points A et B du contour C qui se projettent en a et b soient des sommets de la ligne polygonale. L'aire du polygone inscrit dans le

(1) On suppose, bien entendu, que la courbe considérée n'a pas de point double, et que les côtés du polygone inscrit sont assez petits pour que le périmètre de ce polygone n'ait pas lui-même de point double.

contour C est égale à la différence des aires polygonales limitées par les droites Aa, ab, bB et les lignes brisées inscrites dans les arcs Am_2B et Am_1B. En passant à la limite, on en conclut que l'aire de la courbe C est égale à la différence des aires limitées par

Fig. 15.



les deux contours Am_2BbaA et Am_1BbaA, c'est-à-dire à la différence des deux intégrales

$$\int_a^b \psi_2(x)\,dx - \int_a^b \psi_1(x)\,dx.$$

Les deux intégrales représentent l'intégrale curviligne $\int y\,dx$, prise le long de Am_2B et le long de Am_1B. Si nous convenons de dire que le contour C est décrit dans le sens direct lorsqu'un observateur debout sur le plan et décrivant ce contour laisse à sa gauche l'aire enveloppée (les axes ayant la disposition habituelle, comme dans le cas de la figure), le résultat obtenu peut s'exprimer comme il suit : L'aire Ω enveloppée par le contour fermé C a pour valeur

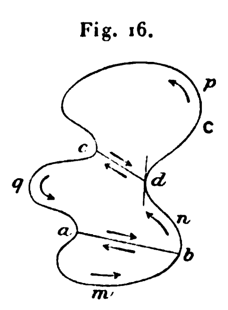
$$(30) \qquad \Omega = -\int_{(C)} y\,dx,$$

l'intégrale curviligne étant prise le long du contour fermé C dans le sens direct. Cette intégrale ne changeant pas, quand on déplace l'origine des coordonnées, la formule subsiste, quelle que soit la position du contour C par rapport aux axes de coordonnées.

Considérons maintenant un contour C de forme quelconque.

Nous supposerons qu'on peut, en menant des transversales joignant deux points de C, obtenir des contours partiels dont chacun n'est rencontré qu'en deux points par une droite parallèle à Oy. Tel est le cas de la région limitée par le contour C de la *fig.* 16

Fig. 16.



que l'on décompose au moyen des transversales ab, cd, en trois régions limitées respectivement par les contours $amba$, $abndcqa$, $cdpc$, à chacune desquelles on peut appliquer la formule précédente. En ajoutant les résultats obtenus, les intégrales curvilignes provenant des lignes auxiliaires ab, cd se détruisent, et l'aire limitée par C est encore égale à l'intégrale curviligne $-\int y\,dx$, prise le long de C dans le sens direct.

On démontre de la même façon que l'on a

$$\Omega = \int_{(C)} x\,dy, \tag{31}$$

et, en combinant les deux formules, il vient

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_{(C)} x\,dy - y\,dx, \tag{32}$$

les intégrales étant toujours prises dans le sens direct.

Par exemple, l'aire de l'ellipse, représentée par les formules

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t,$$

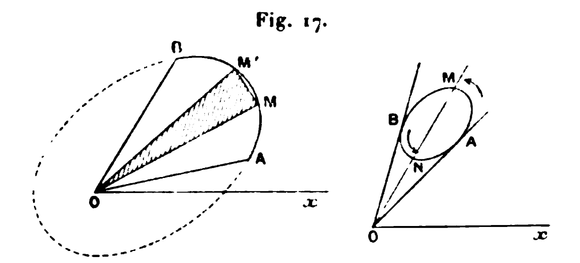
a pour expression

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

95. Aire d'une courbe en coordonnées polaires. — Soit à éva-

luer l'aire limitée par le contour OAMBO (*fig.* 17), formé des deux droites OA, OB et de l'arc AMB, qui n'est rencontré qu'en un point au plus par une droite issue de O. Prenons le point O pour

Fig. 17.



pôle, pour axe polaire une droite Ox, et soit $\rho = f(\omega)$ l'équation de l'arc AMB.

Inscrivons une ligne polygonale dans cet arc AMB, et soient M, M' deux sommets voisins ; l'aire cherchée est la limite de la somme des triangles OMM'. Or l'aire du triangle OMM' a pour expression

$$\frac{1}{2}\rho(\rho + \Delta\rho)\sin\Delta\omega = \Delta\omega\left(\frac{\rho^2}{2} + \varepsilon\right),$$

ε étant infiniment petit avec $\Delta\omega$. On vérifie aisément que toutes les quantités analogues à ε peuvent être supposées moindres que tout nombre donné η pourvu que tous les angles $\Delta\omega$ soient assez petits. On peut donc négliger $\varepsilon\,\Delta\omega$ dans la recherche de la limite ; l'aire cherchée est la limite de la somme $\sum \frac{\rho^2}{2}\Delta\omega$, c'est-à-dire l'intégrale définie

$$\frac{1}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho^2\, d\omega,$$

ω_1 et ω_2 étant les angles que font avec Ox les droites OA et OB.

Une aire limitée par un contour de forme quelconque est la somme ou la différence d'un certain nombre d'aires limitées comme la précédente. Si l'on veut, par exemple, évaluer l'aire d'un contour fermé entourant le point O et rencontré en deux points seulement par une droite passant par le point O, il suffira de faire varier ω de 0 à 2π. L'aire d'un contour fermé convexe laissant le point O à l'extérieur (*fig.* 17) est égale à la différence des aires des deux secteurs OAMBO, OANBO, qu'on calculera

comme on vient de l'expliquer. Dans tous les cas, l'aire est encore représentée par l'intégrale curviligne $\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega$, prise le long de C dans le sens direct. Cette formule ne diffère pas au fond de la précédente; en effet, quand on passe des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires, on a

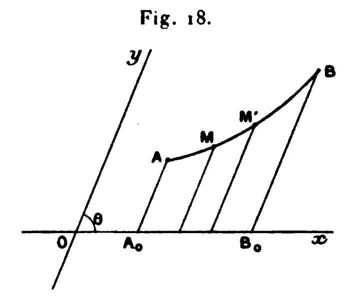
$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega,$$

$$dx = \cos\omega\, d\rho - \rho\sin\omega\, d\omega, \qquad dy = \sin\omega\, d\rho + \rho\cos\omega\, d\omega,$$

$$x\, dy - y\, dx = \rho^2\, d\omega.$$

Considérons encore un arc de courbe AMB représentée en coordonnées obliques par l'équation $y = f(x)$. Pour évaluer l'aire

Fig. 18.



limitée par l'arc AMB, l'axe des x et les parallèles AA_0, BB_0 à l'axe Oy, imaginons une ligne polygonale inscrite dans AMB, et décomposons l'aire du polygone en petits trapèzes par des parallèles à Oy. L'aire d'un de ces trapèzes a pour expression

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})\sin\theta,$$

ce qui peut encore s'écrire $(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)\sin\theta$, ξ_i appartenant à l'intervalle (x_{i-1}, x_i). L'aire est donc égale à l'intégrale définie

$$\sin\theta \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx.$$

On en déduit, comme plus haut, que l'aire limitée par un contour fermé quelconque C a pour expression

$$\frac{\sin\theta}{2}\int_{(C)} x\, dy - y\, dx.$$

Remarque. — Étant donnée une courbe fermée C (*fig.* 15) menons en un point M de cette courbe la direction de la normale qui va vers l'extérieur, et soient α, β les angles que fait cette direction avec les axes Ox, Oy, ces angles étant comptés de o à π. Le long de l'arc Am_1B, l'angle β est obtus et l'on a $dx = -ds\cos\beta$, de sorte que l'on peut écrire

$$\int_{(Am_1B)} y\,dx = -\int y\cos\beta\,ds.$$

Le long de Bm_2A, l'angle β est aigu, dans l'intégrale curviligne le long de Bm_2A, dx est négatif, et si l'on convient de regarder ds comme toujours positif, on a encore $dx = -ds\cos\beta$. L'aire de la courbe fermée est donc représentée par l'intégrale

$$\int y\cos\beta\,ds,$$

l'angle β étant défini comme on l'a dit, et ds étant essentiellement positif. La formule s'étend comme plus haut à un contour de forme quelconque, et l'on verrait de même que l'aire est égale aussi à l'intégrale

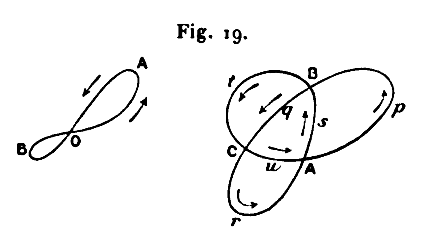
$$\int x\cos\alpha\,ds.$$

Cet énoncé est absolument indépendant de la disposition des axes.

96. Valeur de l'intégrale $\frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$. — Il est naturel de se demander ce que représente l'intégrale $\int x\,dy - y\,dx$, prise le long d'une courbe de forme quelconque, fermée ou non.

Considérons, par exemple, les deux courbes fermées OAOBO, $ApBqCrAsBtCuA$ (*fig.* 19) qui ont respectivement un point double

Fig. 19.



et trois points doubles. Il est clair que l'on peut les remplacer l'une et l'autre par la réunion de deux courbes fermées sans point double. Ainsi

le contour fermé OAOBO est équivalent à la suite des deux contours OAO OBO. L'intégrale prise le long du contour total est égale à l'aire de la boucle OAO diminuée de l'aire de la boucle OBO. De même, le second contour peut être remplacé par les deux courbes fermées $ApBqCrA$ et $AsBtCuA$. L'intégrale est donc égale à la somme des aires des boucles $ApBsA$, $BtCqB$, $ArCuA$, plus deux fois l'aire de la boucle $AsBqCuA$. Le raisonnement est général. Un contour fermé, avec un nombre quelconque de points doubles, détermine un certain nombre d'aires partielles σ_1, σ_2, ..., σ_p qu'il limite complètement. L'intégrale, prise le long du contour total, est égale à une somme de la forme

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \ldots + m_p\sigma_p,$$

m_1, m_2, ..., m_p étant des nombres entiers positifs ou négatifs, que l'on détermine par la règle suivante : *Étant données deux aires limitrophes σ, σ' séparées par un arc ab du contour* C, *on imagine un observateur debout sur le plan et décrivant le contour dans le sens indiqué par les flèches; l'aire laissée à gauche a un coefficient supérieur d'une unité à celui de l'aire laissée à droite.* On donne le coefficient o à l'aire illimitée extérieure au contour, et l'on détermine les autres coefficients de proche en proche.

Si l'on a un arc de courbe AB non fermé, on le transforme en une courbe fermée en joignant les extrémités A et B à l'origine, et l'on applique la règle précédente à ce contour; car l'intégrale $\int x\,dy - y\,dx$, prise le long des rayons OA et OB, est évidemment nulle.

V. — FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

97. Différentiation sous le signe $\int$. — On a souvent à étudier des intégrales définies où la fonction à intégrer dépend non seulement de la variable d'intégration, mais d'une ou plusieurs variables que l'on considère comme des paramètres. Soit $f(x, \alpha)$ une fonction des deux variables x et α, continue lorsque x varie de x_0 à X et que α varie entre certaines limites α_0, α_1. L'intégrale définie

$$F(\alpha) = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx,$$

où l'on suppose que α ait une valeur déterminée comprise entre α_0 et α_1, et où les limites x_0 et X sont indépendantes de α, est une fonction de la variable α, dont nous allons étudier les propriétés.

Nous pouvons écrire

$$(33) \qquad F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_{x_0}^{X}[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx;$$

la fonction $f(x, \alpha)$ étant continue, on peut prendre $\Delta\alpha$ assez petit pour que la différence sous le signe d'intégration soit moindre en valeur absolue qu'un nombre positif donné à l'avance ε. L'accroissement $\Delta F(\alpha)$ sera donc moindre en valeur absolue que $\varepsilon|X-x_0|$; ce qui prouve la continuité.

Si la fonction $f(x, \alpha)$ a une dérivée par rapport à la variable α, on a

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)=\Delta\alpha[f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon],$$

ε tendant vers zéro en même temps que $\Delta\alpha$. On peut donc écrire, en divisant les deux membres de (33) par $\Delta\alpha$,

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_{x_0}^{X}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+\int_{x_0}^{X}\varepsilon\,dx;$$

désignons par η la limite supérieure de ε en valeur absolue, la dernière intégrale est moindre en valeur absolue que $\eta|X-x_0|$ et, en passant à la limite, il vient

$$(34) \qquad \frac{dF}{d\alpha}=\int_{x_0}^{X}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

Pour que la conclusion soit absolument rigoureuse, il faut être assuré que l'on peut prendre $\Delta\alpha$ assez petit pour que le nombre ε soit moindre que tout nombre positif η donné à l'avance, et cela pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x_0 et X. Il en est certainement ainsi lorsque la dérivée $f'_\alpha(x, \alpha)$ est elle-même continue. En effet, le théorème des accroissements finis donne

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)=\Delta\alpha f'_\alpha(x,\alpha+\theta\,\Delta\alpha); \qquad 0<\theta<1,$$

on a, par conséquent,

$$\varepsilon=f'_\alpha(x,\alpha+\theta\,\Delta\alpha)-f'_\alpha(x,\alpha).$$

Si la fonction f'_α est continue, la différence ε sera moindre que η, quels que soient x et α, pourvu que $|\Delta\alpha|$ soit inférieur à un nombre positif h choisi assez petit (*voir* plus loin, Chap. VI).

Supposons maintenant que les limites X et x_0 sont elles-mêmes des fonctions de α. On peut écrire, en désignant par ΔX et Δx_0 les accroissements correspondants à un accroissement $\Delta\alpha$,

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_{x_0}^{X}[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx$$
$$+\int_{X}^{X+\Delta X}f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx,$$

ou, en appliquant le théorème de la moyenne aux deux dernières intégrales et divisant par $\Delta\alpha$,

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_{x_0}^{X}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx$$
$$+\frac{\Delta X}{\Delta\alpha}f(X+\theta\,\Delta X,\alpha+\Delta\alpha)-\frac{\Delta x_0}{\Delta\alpha}f(x_0+\theta'\Delta x_0,\alpha+\Delta\alpha).$$

Lorsque $\Delta\alpha$ tend vers zéro, la première intégrale a la même limite que plus haut, et il vient, en passant à la limite,

$$(35)\qquad \frac{dF}{d\alpha}=\int_{x_0}^{X}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+\frac{dX}{d\alpha}f(X,\alpha)-\frac{dx_0}{d\alpha}f(x_0,\alpha).$$

C'est la formule générale de *différentiation sous le signe* $\int$.

Toute intégrale curviligne pouvant se ramener à une somme d'intégrales définies ordinaires, la formule s'y étend immédiatement. Par exemple, soit

$$F(\alpha)=\int_{AB}P(x,y,\alpha)\,dx+Q(x,y,\alpha)\,dy$$

une intégrale curviligne prise le long d'un arc AB qui est le même, quel que soit α; on a

$$F'(\alpha)=\int_{AB}P'_\alpha(x,y,\alpha)\,dx+Q'_\alpha(x,y,\alpha)\,dy,$$

l'intégrale étant prise le long de la même courbe. Au contraire, les raisonnements supposent essentiellement que les limites sont finies et que la fonction à intégrer ne devient pas infinie entre ces limites. Nous examinerons plus loin les cas où ces conditions ne sont pas satisfaites (Chap. VIII).

La formule (35) est souvent employée pour obtenir la valeur

de certaines intégrales définies, en les rattachant à d'autres intégrales plus faciles à calculer. Par exemple on a, si a est positif,

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{a}},$$

et, en appliquant la formule (34) $n-1$ fois de suite, on en déduit

$$(-1)^{n-1}1.2\ldots(n-1)\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{a}}\right).$$

98. Exemples de discontinuité. — Lorsque les conditions supposées ne sont pas toujours remplies entre les limites de l'intégration, il peut arriver que l'intégrale définie soit une fonction discontinue du paramètre. Considérons par exemple l'intégrale définie

$$F(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha + x^2};$$

cette intégrale a une valeur finie, car les racines du dénominateur sont imaginaires, sauf dans le cas où $\alpha = k\pi$; mais il est clair que, dans ce cas, on a $F(\alpha)=0$. Supposons par conséquent $\sin\alpha \gtrless 0$; en posant

$$x = \cos\alpha + t\sin\alpha,$$

il vient, en prenant d'abord l'intégrale indéfinie,

$$\int \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tang} t.$$

L'intégrale définie $F(\alpha)$ est donc égale à

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right),$$

les arcs étant comptés de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Mais on a

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \times \frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -1,$$

et par conséquent la différence des arcs est égale à $\pm\frac{\pi}{2}$. Pour savoir le signe qu'on doit prendre, il suffit de remarquer que tous les éléments de l'intégrale ont le signe de $\sin\alpha$. On a donc $F(\alpha) = \pm\frac{\pi}{2}$, suivant que $\sin\alpha$ est positif ou négatif; la fonction $F(\alpha)$ est discontinue pour toutes les valeurs $\alpha = k\pi$. Ce résultat n'est nullement en contradiction avec le rai-

sonnement fait au début de ce paragraphe. En effet, lorsque x varie de -1 à $+1$, et α de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, par exemple, la fonction sous le signe $\int$ devient indéterminée pour les systèmes de valeurs $\alpha = 0$, $x = -1$, et $\alpha = 0$, $x = +1$, qui font partie de ce domaine, quelque petit que soit ε.

Il serait facile de multiplier les exemples. Prenons encore l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x}\,dx\,;$$

en faisant le changement de variable $mx = y$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x}\,dx = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy,$$

le signe $\pm$ dépendant du signe de m, car les limites de la nouvelle intégrale sont les mêmes que celles de la première si m est positif, et doivent être renversées si m est négatif. Nous avons vu (n° 91) que l'intégrale du second membre est une quantité positive N. L'intégrale considérée est donc égale à $\pm$ N, suivant le signe de m.

VI. — CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES.

99. Généralités. — Quand on ne connaît pas de fonction primitive de $f(x)$, on a recours à des méthodes d'approximation pour trouver la valeur approchée de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$. Le théorème de la moyenne fournit deux limites entre lesquelles est comprise cette intégrale, et l'on peut, par un procédé analogue, en trouver une infinité d'autres. Supposons que, x variant de a à $b\,(a < b)$, on ait constamment $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$; il est évident que l'on aura aussi

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx\,;$$

si l'on a choisi, pour les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, les dérivées de deux fonctions connues, on obtiendra de cette façon deux limites entre lesquelles sera comprise la valeur de l'intégrale considérée. Prenons, par exemple, l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}\,;$$

on peut écrire $\sqrt{1 - x^4} = \sqrt{1 - x^2}\,\sqrt{1 + x^2}$, et, x variant de 0 à 1,

$\sqrt{1+x^2}$ reste compris entre 1 et $\sqrt{2}$. L'intégrale cherchée est donc comprise entre les deux intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

c'est-à-dire entre $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ et $\frac{\pi}{2}$. On peut trouver deux limites plus rapprochées en observant que $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ est plus grand que $1-\frac{x^2}{2}$, comme le montre le développement de $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule de Taylor, limitée aux deux premiers termes. L'intégrale I est donc supérieure à

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

la dernière intégrale a pour valeur $\frac{\pi}{4}$ (*voir* n° 105) et, par suite, I est compris entre $\frac{3\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Il est clair qu'on n'obtient de cette façon que des indications sur la valeur exacte de l'intégrale. Pour avoir des valeurs plus approchées, on partagera l'intervalle (a, b) en intervalles plus petits à chacun desquels on appliquera la formule de la moyenne. Pour fixer les idées, supposons que $f(x)$ aille constamment en croissant depuis a jusqu'à b. Divisons l'intervalle (a, b) en n parties égales $(b-a=nh)$; d'après la définition même de l'intégrale, $\int_a^b f(x)\,dx$ est comprise entre les deux sommes

$$s = h\{f(a) + f(a+h) + \ldots + f[a+(n-1)h]\},$$
$$S = h[f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh)].$$

En prenant pour valeur de l'intégrale $\frac{S+s}{2}$, l'erreur commise est certainement inférieure à $S-s=\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$. La valeur $\frac{S+s}{2}$ peut s'écrire

$$h\left\{\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + \frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} + \ldots + \frac{f[a+(n-1)h]+f(a+nh)}{2}\right\};$$

si l'on observe que $\frac{h}{2}\{f(a+ih)+f[a+(i+1)h]\}$ représente l'aire du trapèze qui aurait pour hauteur h et pour bases $f(a+ih)$ et $f(a+ih+h)$, on voit que la méthode revient à remplacer l'aire de la courbe $y=f(x)$, comprise entre deux ordonnées voisines, par l'aire du trapèze rectiligne ayant pour bases ces deux ordonnées. La méthode est pratique, quand on n'a pas besoin d'une grande approximation.

Prenons, par exemple, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; si l'on prend $n=4$, on a pour valeur approchée de l'intégrale

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{16}{17}+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{1}{4}\right)=0,7827\ldots,$$

et l'erreur commise est moindre que $\frac{1}{16}=0,0625$. On en déduit une valeur approchée de π qui a une décimale exacte 3,1308.

Si la fonction $f(x)$ ne varie pas dans le même sens lorsque x croît de a à b, on partage cet intervalle en plusieurs autres pour lesquels cette condition soit satisfaite.

100. Interpolation. — Voici une autre méthode pour évaluer l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$: On fait passer une courbe parabolique d'ordre n

$$y=\varphi(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

par $(n+1)$ points $B_0, B_1, \ldots, B_n$ pris sur la courbe $y=f(x)$, entre les deux points d'abscisses a et b, et l'on prend pour valeur approchée de l'intégrale à évaluer la valeur de l'intégrale définie $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, qu'il est facile de calculer.

Soient $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ les coordonnées des $(n+1)$ points $B_0, B_1, \ldots, B_n$. Le polynome $\varphi(x)$ est donné par la formule d'interpolation de Lagrange

$$\varphi(x)=y_0X_0+y_1X_1+\ldots+y_iX_i+\ldots+y_nX_n,$$

où le coefficient X_i de y_i

$$X_i=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

est un polynome de degré n qui s'annule pour les valeurs données x_0, x_1, ..., x_n, sauf pour $x = x_i$, et qui est égal à un pour $x = x_i$. On a donc

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b X_i\,dx;$$

or, nous pouvons écrire

$$x_0 = a + \theta_0(b-a), \quad x_1 = a + \theta_1(b-a), \quad \ldots, \quad x_n = a + \theta_n(b-a),$$

θ_0, θ_1, ..., θ_n étant des nombres croissants de 0 à 1, et, en faisant le changement de variable $x = a + (b-a)t$, la valeur approchée de l'intégrale prend la forme

$$(36) \qquad (b-a)(K_0 y_0 + K_1 y_1 + \ldots + K_n y_n),$$

où l'on a posé

$$K_i = \int_0^1 \frac{(t-\theta_0)\ldots(t-\theta_{i-1})(t-\theta_{i+1})\ldots(t-\theta_n)}{(\theta_i-\theta_0)\ldots(\theta_i-\theta_{i-1})(\theta_i-\theta_{i+1})\ldots(\theta_i-\theta_n)}\,dt.$$

Si, quelle que soit la fonction $f(x)$, on décompose l'intervalle (a, b) en intervalles plus petits dans un rapport constant, les nombres θ_0, θ_1, ..., θ_n et, par suite, les coefficients K_i sont indépendants de $f(x)$. Ces coefficients étant calculés une fois pour toutes, on n'a plus qu'à remplacer y_0, y_1, ..., y_n par leurs valeurs correspondantes dans la formule (36).

Lorsque la courbe $y = f(x)$, dont on veut avoir l'aire, est donnée graphiquement, il est commode de diviser l'intervalle (a, b) en parties égales, et l'on n'a plus qu'à mesurer sur cette courbe des ordonnées équidistantes. Si l'on divise en deux parties égales, on doit prendre $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_2 = 1$, ce qui donne pour valeur approchée de l'intégrale

$$I = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

On trouve de même, pour $n = 4$,

$$I = \frac{b-a}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3).$$

et, pour $n = 5$,

$$I = \frac{b-a}{90}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4).$$

La méthode précédente est due à Côtes. Celle de Simpson est un peu différente. Imaginons l'intervalle (a, b) divisé en $2n$ parties égales, et soient $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ les ordonnées correspondant aux points de division. Si l'on applique la première formule de Côtes à l'aire comprise entre deux ordonnées d'indice pair consécutives, telles que y_0 et y_2, y_2 et y_4, ..., on trouve pour valeur de l'aire totale à évaluer

$$I = \frac{b-a}{6n}[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})]$$

et, en réduisant, on est conduit à la formule de Simpson

$$I = \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})].$$

101. Méthode de Gauss. — Dans la méthode de Gauss, on prend d'autres valeurs pour les quantités θ_i. Voici comment on y est conduit : Admettons que l'on puisse trouver des polynomes de degrés croissants, qui diffèrent de moins en moins de la fonction à intégrer $f(x)$, dans l'intervalle (a, b). Admettons, par exemple, que l'on ait

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{2n-1}x^{2n-1} + R_{2n}(x),$$

le reste $R_{2n}(x)$ étant moindre qu'un nombre fixe ε_n pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b (¹); nous ne connaissons pas en général les coefficients α_i, mais ils n'interviennent pas, comme on va le voir, dans le calcul. Soient maintenant x_0, $x_1, \ldots, x_{n-1}$ des valeurs de x comprises entre a et b, et $\varphi(x)$ le polynome de degré $n-1$, qui prend les mêmes valeurs que $f(x)$ pour les valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. La formule d'interpolation de Lagrange montre que ce polynome peut s'écrire

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{2n-1} \alpha_m \varphi_m(x) + R_{2n}(x_0)\Psi_0(x) + \ldots + R_{2n}(x_{n-1})\Psi_{n-1}(x),$$

(¹) C'est une propriété générale des fonctions continues dans l'intervalle (a, b), d'après un théorème de Weierstrass. (*Voir* plus loin, Chapitre IX.)

φ_m et Ψ_k étant des polynomes de degré $n-1$ au plus. Il est visible que le polynome $\varphi_m(x)$ ne dépend que des valeurs choisies x_0, $x_1, \ldots, x_{n-1}$. D'autre part, ce polynome $\varphi_m(x)$ doit prendre les mêmes valeurs que x^m pour $x=x_0$, $x=x_1$, $\ldots$, $x=x_{n-1}$; car, si l'on supposait tous les α_i nuls, sauf α_m, ainsi que $R_{2n}(x)$, $f(x)$ se réduirait à $\alpha_m x^m$ et $\varphi(x)$ à $\alpha_m \varphi_m(x)$. La différence $x^m - \varphi_m(x)$ doit donc être divisible par le produit

$$P_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),$$

et l'on doit avoir $x^m - \varphi_m(x) = P_n Q_{m-n}(x)$, $Q_{m-n}(x)$ étant un polynome de degré $m-n$, si $m \geqq n$, et $x^m - \varphi_m(x) = 0$, si m est $\leqq n-1$. Cela posé, l'erreur commise en remplaçant $\int_a^b f(x)\,dx$ par $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ est égale à

$$(37)\quad \sum_{m=0}^{2n-1} \alpha_m \int_a^b [x^m - \varphi_m(x)]\,dx + \int_a^b R_{2n}(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} R_{2n}(x_i) \int_a^b \Psi_i(x)\,dx.$$

Les termes qui dépendent des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont identiquement nuls et l'on voit que l'erreur commise dépend uniquement des coefficients $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n-1}$ et du reste $R_{2n}(x)$. Or en général ce reste R_{2n} est très petit par rapport aux coefficients $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n-1}$; on aura donc de grandes chances pour augmenter l'approximation, si l'on peut disposer de $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, de façon que les termes qui dépendent de $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n-1}$ soient nuls aussi. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les n intégrales

$$\int_a^b P_n Q_0\,dx, \quad \int_a^b P_n Q_1\,dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b P_n Q_{n-1}\,dx$$

soient nulles, Q_i étant un polynome de degré i. Nous avons vu plus haut (nº 88) qu'on satisfait à ces conditions en prenant

$$P_n = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n];$$

il suffira donc de prendre pour $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ les n racines de l'équation $P_n = 0$, racines qui sont bien comprises entre a et b.

Lorsque l'on a $a = -1$, $b = +1$, cas auquel on peut ramener tous les autres par la substitution $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$, les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont les racines du polynome de Legendre $X_n = 0$. On trouvera dans le *Traité de Calcul intégral* de M. Bertrand (p. 342) les valeurs de ces racines, ainsi que des coefficients K_i de la formule (36), jusqu'à $n = 5$, avec 7 et 8 décimales.

L'erreur commise dans la méthode de Gauss est égale à

$$\int_a^b R_{2n}(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} R_{2n}(x_i) \int_a^b \Psi_i(x)\,dx;$$

les fonctions $\Psi_i(x)$ ne dépendent pas de la fonction dont on cherche l'intégrale. Pour avoir une limite de l'erreur commise, il suffit donc de connaître une limite de $R_{2n}(x)$, c'est-à-dire de savoir avec quelle approximation la fonction $f(x)$ peut être représentée par un polynome de degré $2n-1$ dans l'intervalle (a, b), sans qu'il soit nécessaire de connaître ce polynome.

On peut aussi, pour calculer la valeur numérique d'une intégrale définie, développer en série la fonction $f(x)$ et intégrer ensuite terme à terme la série obtenue. Nous verrons plus loin (Chap. VIII) à quelles conditions cette opération est légitime et quelle est l'approximation qu'elle donne.

102. Planimètre d'Amsler. — On a imaginé un grand nombre d'appareils pour mesurer, par des moyens mécaniques, l'aire d'une courbe plane ([1]). Un des plus ingénieux est le planimètre d'Amsler, dont la théorie offre une application intéressante des intégrales curvilignes.

Considérons une droite rigide mobile dans un plan, et les aires $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ des courbes décrites par deux points A_1, A_2 de cette droite, lorsque, dans son mouvement, elle revient à sa position initiale au bout d'un certain temps. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des deux points A_1, A_2, dans un système d'axes rectangulaires, l la distance des deux points, et θ l'angle que fait avec Ox la direction A_1A_2. Pour définir le mouvement de la droite, il faut supposer que x_1, y_1 et θ sont des fonctions périodiques d'une certaine variable indépendante t, qui reprennent les mêmes valeurs lorsque t augmente de T. On a $x_2 = x_1 + l\cos\theta$, $y_2 = y_1 + l\sin\theta$, et,

([1]) On en trouvera la description dans un Ouvrage de M. ABDANK-ABAKANOWICS : *Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications.* (Gauthier-Villars, 1886.)

par suite,

$$x_2 dy_2 - y_2 dx_2 = x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + l^2 d\theta \\ + l(\cos\theta\, dy_1 - \sin\theta\, dx_1 + x_1 \cos\theta\, d\theta + y_1 \sin\theta\, d\theta).$$

En désignant par $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ les aires des courbes décrites par les points A_1, A_2, ces aires étant évaluées avec la convention générale faite plus haut (n° 96), on a

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\int x_1 dy_1 - y_1 dx_1, \qquad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\int x_2 dy_2 - y_2 dx_2,$$

et, par conséquent, en intégrant les deux membres de l'égalité,

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \frac{l^2}{2}\int d\theta + \frac{l}{2}\int \cos\theta\, dy_1 - \sin\theta\, dx_1 + \int (x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta)\, d\theta,$$

toutes les intégrales étant prises entre les limites t_0 et $t_0 + T$ pour la variable t. Il est clair que $\int d\theta = 2K\pi$, K étant un nombre entier qui dépend du mouvement de la droite. D'autre part, on a, en intégrant par parties,

$$\int x_1 \cos\theta\, d\theta = \quad x_1 \sin\theta - \int \sin\theta\, dx_1,$$

$$\int y_1 \sin\theta\, d\theta = -y_1 \cos\theta + \int \cos\theta\, dy_1;$$

or $x_1 \sin\theta$ et $y_1 \cos\theta$ reprennent la même valeur lorsque t croît de t_0 à $t_0 + T$. Nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + K\pi l^2 + l\int \cos\theta\, dy_1 - \sin\theta\, dx_1;$$

soient s l'arc de la courbe décrite par A_1, compté positivement dans un sens déterminé, à partir d'une origine arbitraire, et α l'angle que fait avec Ox la direction positive de la tangente, on a encore

$$\cos\theta\, dy_1 - \sin\theta\, dx_1 = (\sin\alpha \cos\theta - \sin\theta \cos\alpha)\, ds = \sin V\, ds,$$

V étant l'angle que fait avec la direction choisie sur la droite la direction positive de la tangente, compté positivement comme en Trigonométrie. La formule précédente peut encore s'écrire

$$(38) \qquad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + K\pi l^2 + l\int \sin V\, ds.$$

Soit A_3 un troisième point de la droite, à une distance l' de A_1; on a de même, pour l'aire de la courbe décrite par A_3,

$$(39) \qquad \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 + K\pi l'^2 + l'\int \sin V\, ds.$$

Si entre ces deux formules on élimine l'intégrale inconnue $\int \sin V\, ds$, il vient

$$l'\mathcal{A}_2 - l\mathcal{A}_3 = (l'-l)\mathcal{A}_1 + K\pi l l'(l-l'),$$

relation qui peut encore s'écrire

$$(40) \qquad \mathcal{A}_1(23) + \mathcal{A}_2(31) + \mathcal{A}_3(12) + K\pi(12)(23)(31) = 0,$$

en désignant par (ik) la distance des deux points A_i, A_k $(i, k = 1, 2, 3)$ affectée d'un signe. Pour donner une application de cette formule, considérons une droite A_1A_2 de longueur $(a+b)$ dont les extrémités A_1 et A_2 décrivent une même courbe fermée convexe C; le point A_3 qui divise A_1A_2 en deux segments de longueur a et b décrit aussi une courbe fermée C′ intérieure à C. On a ici

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1, \qquad (12) = a+b, \qquad (23) = -b, \qquad (31) = -a, \qquad K = 1,$$

et il vient, en divisant par $a+b$,

$$\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3 = \pi ab;$$

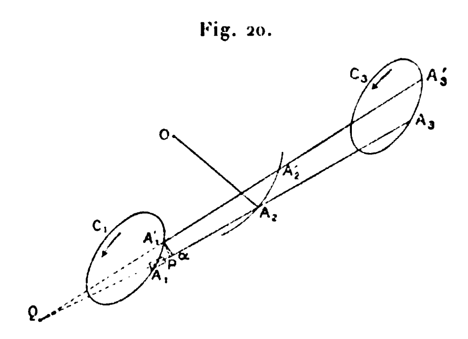
or $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$ représente l'aire comprise entre les deux courbes C, C′. On voit que cette aire est indépendante de la forme de la courbe C. Ce théorème est dû à M. Holditch.

Au lieu d'éliminer $\int \sin V\, ds$ entre les formules (38) et (39), éliminons $\mathcal{A}_1$, il vient

$$(41) \qquad \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 + K\pi(l'^2 - l^2) + (l'-l)\int \sin V\, ds;$$

le planimètre d'Amsler offre une application de cette dernière formule.

Fig. 20.



Soit $A_1A_2A_3$ une tige rigide articulée en A_2 avec une autre tige OA_2. Le point O étant fixé, on fait décrire à l'extrémité A_3, qui est munie d'une pointe, le contour de l'aire que l'on veut évaluer, le point A_2 décrit un arc de cercle, ou une circonférence entière suivant la nature du mouve-

ment. Dans tous les cas, on connaît $\mathcal{A}_2$, K, l, l', et il suffira de connaître l'intégrale $\int \sin V\, ds$ pour avoir l'aire cherchée $\mathcal{A}_3$. Cette intégrale est prise le long de la courbe C_1 décrite par l'extrémité A_1. Cette extrémité porte un cylindre de révolution gradué dont l'axe coïncide avec l'axe même de la tige A_1A_3, et qui peut tourner autour de cet axe.

Considérons un déplacement infiniment petit de la tige, qui amène $A_1A_2A_3$ dans la position $A'_1A'_2A'_3$. Soit Q le point de rencontre des deux droites A_1A_3 et $A'_1A'_3$; du point Q comme centre décrivons un arc de cercle $A'_1\alpha$, et du point A'_1 abaissons la perpendiculaire A'_1P sur A_1A_2. Pour amener la tige de la première position à la seconde, on peut imaginer qu'elle glisse d'abord sur elle-même de façon que A_1 vienne en α. Dans ce mouvement, le cylindre glisse le long de la génératrice de contact, et la rotation est nulle. Si l'on fait ensuite tourner la tige autour de Q, de façon que α vienne en A'_1, la rotation du cylindre est mesurée par l'arc $\alpha A'_1$. Or les deux rapports $\frac{\alpha A'_1}{A'_1P}$, $\frac{A'_1P}{\text{arc}\, A_1A'_1}$ tendent respectivement vers 1 et $\sin V$ lorsque l'arc A'_1A_1 tend vers zéro. On peut donc écrire $\alpha A'_1 = \Delta s(\sin V + \varepsilon)$, ε étant infiniment petit avec Δs. La rotation totale du cylindre est, par suite, proportionnelle à la limite de la somme $\Sigma\Delta s(\sin V + \varepsilon)$, c'est-à-dire à l'intégrale $\int \sin V\, ds$. Il suffit donc de mesurer cette rotation pour en déduire l'aire cherchée.

EXERCICES.

1. Démontrer que la somme $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$ a pour limite $\log 2$, lorsque n augmente indéfiniment.

[On prouve que cette somme a pour limite l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.]

2. Trouver de même les limites des sommes

$$\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}},$$

en les rattachant à des intégrales définies. D'une façon générale, la limite de la somme $\sum_{i=0}^{n} \varphi(i, n)$ pour n infini est égale à une intégrale définie lorsque $\varphi(i, n)$ est une fonction homogène de degré -1 de i et de n.

3. Trouver la valeur de l'intégrale définie $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2.$

[On peut partir de la formule connue de Trigonométrie

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

ou s'appuyer sur les égalités presque évidentes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx.]$$

4. Déduire de la précédente la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tang x\,dx.$$

5. Démontrer que l'on a $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$

[On peut poser $x = \tang\varphi$ et partager l'intégrale obtenue en trois parties.]

*6. Trouver la valeur de l'intégrale définie $\int_0^{\pi} \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx.$

[Poisson.]

En partageant l'intervalle de 0 à π en n parties égales et appliquant une formule connue de Trigonométrie, on est conduit à chercher la limite, pour n infini, de l'expression

$$\frac{\pi}{n}\log\left[\frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\alpha^{2n}-1)\right];$$

si α est compris entre -1 et $+1$, cette limite est nulle. Elle est égale à $\pi\log\alpha^2$, si $\alpha^2 > 1$.

7. L'intégrale définie $\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$, où α est positif, est égale à 2 si α est < 1, et à $\frac{2}{\alpha}$ si α est > 1.

*8. Pour qu'une fonction $f(x)$ soit intégrable dans un intervalle (a, b), il faut et il suffit qu'à tout nombre positif ε corresponde une subdivision de l'intervalle telle que la différence $S - s$ des sommes correspondantes soit plus petite que ε.

Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues dans l'intervalle (a, b)

et $(a, x_1, x_2, \ldots, b)$ une division de cet intervalle. Si l'on prend deux valeurs quelconques ξ_i, η_i dans chaque intervalle partiel (x_{i-1}, x_i), la somme $\Sigma f(\xi_i)\varphi(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$ a pour limite l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx.$$

10. Soit $f(x)$ une fonction continue et positive dans l'intervalle (a, b). Le produit des deux intégrales définies $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ est minimum lorsque la fonction est constante.

11. Soit $\mathrm{I}_{x_0}^{x_1}$ l'indice d'une fonction (n° 77) entre x_0 et x_1. On a la relation

$$\mathrm{I}_{x_0}^{x_1} f(x) + \mathrm{I}_{x_0}^{x_1} \frac{1}{f(x)} = \varepsilon,$$

où $\varepsilon = +1$, lorsque $f(x_0) > 0$, $f(x_1) < 0$, $\varepsilon = -1$ lorsque $f(x_0) < 0$, $f(x_1) > 0$, et $\varepsilon = 0$ lorsque $f(x_0)$ et $f(x_1)$ ont le même signe.

On applique la dernière formule de la page 176 aux deux fonctions $f(x)$, $\frac{1}{f(x)}$.

***12.** Soient U et V deux polynomes de degrés n et $n-1$ premiers entre eux. L'indice de la fraction rationnelle $\frac{V}{U}$, entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ de la variable, est égal à la différence entre le nombre des racines imaginaires de l'équation $U + iV = 0$, où le coefficient de i est positif, et le nombre de ces racines où il est négatif.

[Hermite, *Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 128.]

***13.** Établir le second théorème de la moyenne au moyen d'une intégration par parties.

Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues dans l'intervalle (a, b) dont la première $f(x)$ est constamment croissante ou constamment décroissante et admet une dérivée continue. On a, en posant

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx,$$

et intégrant par parties,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(b)\Phi(b) - \int_a^b f'(x)\Phi(x)\,dx;$$

la dérivée $f'(x)$ ayant un signe constant, il suffit maintenant d'appliquer la première formule de la moyenne à la nouvelle intégrale.

14. Vérifier que l'intégrale définie $\int x\,dy - y\,dx$, prise le long d'un contour fermé, se change en une intégrale de même forme quand on passe d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires de même disposition.

15. De la formule

$$\int_a^b \cos\lambda x\,dx = \frac{1}{\lambda}(\sin\lambda b - \sin\lambda a)$$

déduire les intégrales définies

$$\int_a^b x^{2p+1}\sin\lambda x\,dx, \quad \int_a^b x^{2p}\cos\lambda x\,dx.$$

16. Étant données deux courbes planes quelconques C, C′, on fait correspondre les points (x, y), (x', y') des deux courbes où les tangentes sont parallèles. Le point de coordonnées $x_1 = px + qx'$, $y_1 = py + qy'$, où p et q sont des constantes données, décrit une nouvelle courbe C_1 et l'on a, entre les arcs correspondants des trois courbes, la relation

$$s_1 = \pm ps \pm qs'.$$

17. Les arcs correspondants des deux courbes

$$\text{C}\left\{\begin{array}{l} x = tf'(t) - f(t) + \varphi'(t),\\ y = f'(t) - t\varphi'(t) + \varphi(t), \end{array}\right. \qquad \text{C}'\left\{\begin{array}{l} x' = tf'(t) - f(t) - \varphi'(t),\\ y' = f'(t) + t\varphi'(t) - \varphi(t) \end{array}\right.$$

ont la même longueur, quelles que soient les fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$.

18. Étant données dans un plan n courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, on abaisse d'un point M du même plan des normales $MP_1, \ldots, MP_n$ à ces courbes. Soit l_i la longueur MP_i. Le lieu des points M tels que l'on ait une relation de forme donnée $F(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0$ entre les n longueurs l_i est une courbe Γ. Si l'on porte sur chaque droite MP_i, et dans un sens convenable, une longueur proportionnelle à $\dfrac{\partial F}{\partial l_i}$, la résultante de ces n segments donne la direction de la normale à la courbe Γ. Extension aux surfaces.

19. Soit C une courbe fermée. Sur la tangente en un point m de C, on prend deux points p, p' de part et d'autre de m, tels que $mp = mp'$, la longueur mp variant d'après une loi arbitraire. Les aires des deux courbes décrites par les points p, p' sont égales. Cas où la longueur mp est constante.

20. L'aire comprise entre une courbe fermée convexe et une courbe parallèle, obtenue en portant sur les normales une longueur constante l, est égale à $\pm\pi l^2 + sl$, s étant la longueur de la courbe fermée.



21. Soit C une courbe fermée. Le lieu des points A tels que l'aire de la podaire correspondante ait une valeur donnée est un cercle dont le centre est fixe.

On définit la courbe C par son équation tangentielle

$$x \cos t + y \sin t = f(t).$$

22. Soient C une courbe fermée, C_1 la podaire de cette courbe relativement à un point A, C_2 le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point A sur les normales à C. On a, entre les aires de ces trois courbes, la relation $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$.

D'après les propriétés de la podaire (n° 36), si ρ et ω sont les coordonnées polaires d'un point de C_1, les coordonnées du point correspondant de C_2 sont ρ' et $\omega + \frac{\pi}{2}$, et celles du point correspondant de C sont $r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$ et $\varphi = \omega + \text{arc tang}\frac{\rho'}{\rho}$.

23. Lorsqu'une courbe C roule sans glisser sur une droite, tout point A invariablement lié à la courbe C décrit une courbe appelée *roulette* : 1° l'aire comprise entre un arc de la roulette et la base est égale au double de l'aire correspondante de la podaire du point A par rapport à C; 2° l'arc de la roulette est égal à l'arc correspondant de la podaire.

[STEINER.]

Pour démontrer ces théorèmes par l'analyse, soient X, Y les coordonnées du point A par rapport à un système d'axes mobiles formé par la tangente et la normale en un point M de C, s l'arc OM compté à partir d'un point fixe O de C, et ω l'angle des tangentes en O et en M. On établit les relations

$$ds + dX = Y\,d\omega, \qquad dY + X\,d\omega = 0,$$

d'où les propositions se déduisent.

***24.** L'erreur commise dans la méthode de quadrature de Gauss a pour expression

$$\frac{f^{(2n)}(\xi)}{1.2\ldots 2n} \times \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots(2n-1)}\right]^2,$$

ξ étant compris entre -1 et $+1$.

[MANSION, *Comptes rendus*, 1886.]

CHAPITRE V.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

Nous allons passer en revue, dans ce Chapitre, les catégories générales de fonctions élémentaires dont l'intégrale s'exprime elle-même à l'aide des mêmes symboles. Nous entendons par fonctions élémentaires les fonctions algébriques, rationnelles et irrationnelles, la fonction exponentielle et le logarithme, les fonctions circulaires et les fonctions inverses, et celles que l'on obtient par des combinaisons en nombre fini des précédentes. Lorsque l'intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$ ne peut pas s'exprimer à l'aide de ces symboles, cette intégrale constitue une transcendante nouvelle; l'étude des propriétés de ces transcendantes et leur classification sont un des objets les plus importants du Calcul intégral.

I. — INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES.

103. Méthode générale. — Toute fonction rationnelle $f(x)$ est la somme d'une partie entière $E(x)$ et d'une fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ est premier avec $Q(x)$ et d'un degré inférieur à celui de $Q(x)$. Si l'on connaît les racines, réelles et imaginaires, de l'équation $Q(x) = 0$, cette fraction rationnelle peut se décomposer en une somme de fractions simples, appartenant à l'un des deux types suivants

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n},$$

les fractions simples du premier type provenant des racines réelles, et les autres fractions des racines imaginaires conjuguées. L'intégrale de la partie entière s'obtient immédiatement; si $m > 1$,

on a

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}},$$

et, si $m = 1$,

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\log(x-a);$$

nous omettons, pour abréger, la constante C qui doit être ajoutée au second membre. Il n'y a donc plus à examiner que les fractions simples provenant des racines imaginaires du dénominateur. Afin de simplifier l'écriture, posons

$$x = \alpha + \beta t, \qquad dx = \beta\,dt,$$

ce qui donne

$$\int \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx = \frac{1}{\beta^{2n-1}}\int \frac{M\alpha+N+M\beta t}{(1+t^2)^n}\,dt,$$

et l'on a deux sortes d'intégrales

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n}, \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

La première se calcule aisément en remarquant que $t\,dt$ est la moitié de la différentielle de $1+t^2$; on a donc, si $n > 1$,

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} = -\frac{\beta^{2n-2}}{2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}},$$

et, si $n = 1$,

$$\int \frac{t\,dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\log(1+t^2) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{(x-\alpha)^2+\beta^2}{\beta^2}\right).$$

Il ne reste plus que les intégrales

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n};$$

si $n = 1$, on a immédiatement la valeur de cette intégrale

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tang} t = \operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta};$$

si n est plus grand que un, on emploie une *formule de réduction* permettant de ramener le calcul de l'intégrale proposée au calcul d'une intégrale de même forme où l'exposant de $1+t^2$ est diminué d'une unité. Nous pouvons écrire, en désignant par I_n

l'intégrale en question,

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}\,dt = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n};$$

intégrons par parties $\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n}$, en posant

$$u = t, \quad dv = \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n}, \quad v = -\frac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}},$$

il vient

$$\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}.$$

Remplaçons cette intégrale par sa valeur dans la relation précédente, il reste

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}.$$

Changeons dans cette formule n en $n-1$, puis en $n-2$, et ainsi de suite; nous serons ramenés à l'intégrale $I_1 = \operatorname{arc\,tang} t$. En remontant ensuite de proche en proche, on a finalement

$$I_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2} \operatorname{arc\,tang} t + R(t),$$

$R(t)$ étant une fonction rationnelle de t dont il serait facile d'avoir l'expression; nous observerons seulement que le dénominateur est $(1+t^2)^{n-1}$ et que le numérateur est de degré inférieur à $2n-2$ (*voir* n° 97, p. 219).

En définitive, l'intégrale d'une fonction rationnelle se compose d'une partie qui est elle-même rationnelle et de termes transcendants de l'une des formes suivantes

$$\log(x-a), \quad \log[(x-\alpha)^2+\beta^2], \quad \operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Soit à calculer, par exemple, l'intégrale $\int \frac{dx}{x^4-1}$. Le dénominateur admet deux racines réelles $+1$ et -1, et deux racines imaginaires $+i$ et $-i$. On a donc, en décomposant en fractions simples,

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{1+x^2};$$

pour déterminer le coefficient A, multiplions les deux membres par $x-1$ et faisons ensuite $x=1$, il vient $A=\frac{1}{4}$, et l'on trouve de même $B=-\frac{1}{4}$. L'identité précédente peut alors s'écrire

$$\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{Cx+D}{1+x^2}$$

ou, en réduisant le premier membre,

$$\frac{1}{2(1+x^2)}=\frac{Cx+D}{1+x^2};$$

on doit donc prendre $C=0$, $D=-\frac{1}{2}$, et nous pouvons écrire

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)},$$

ce qui donne

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\,\text{arc tang}\,x.$$

Remarque. — La méthode précédente, quoique absolument générale, n'est pas toujours la plus simple. On peut quelquefois abréger le calcul par des artifices convenables. Prenons, par exemple, l'intégrale

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^n};$$

si $n>1$, on pourrait, soit décomposer en fractions simples en séparant les racines $+1$ et -1, soit employer une formule de réduction comme pour l'intégrale I_n. Mais on l'obtient d'une façon plus élégante en faisant le changement de variable $x=\frac{1+z}{1-z}$, ce qui donne

$$x^2-1=\frac{4z}{(1-z)^2},\qquad dx=\frac{2\,dz}{(1-z)^2},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^n}=\frac{2}{4^n}\int\frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}\,dz.$$

En développant $(1-z)^{2n-2}$ par la formule du binome, on n'a plus à intégrer que des monomes de la forme Az^{μ}, μ pouvant être d'un signe quelconque.

104. Méthode de M. Hermite. — Nous avons supposé jusqu'ici la fraction à intégrer décomposée en fractions simples, ce qui exige que l'on connaisse les racines du dénominateur. La méthode suivante, due à M. Hermite, permet de trouver la partie algébrique de l'intégrale sans connaître ces racines et n'exige que des opérations élémentaires, c'est-à-dire des additions, multiplications et divisions de polynomes.

Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ la fraction rationnelle à intégrer, dont nous pouvons supposer les deux termes premiers entre eux. La théorie des racines égales permet de mettre le polynome $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 \dots X_p^p,$$

$X_1, X_2, \dots, X_p$ étant des polynomes qui n'ont que des facteurs linéaires simples et qui n'ont deux à deux aucun facteur commun. On peut ensuite décomposer la fonction proposée en fractions simples ayant pour dénominateurs $X_1, X_2^2, \dots, X_p^p$,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} + \dots + \frac{A_p}{X_p^p},$$

A_i étant un polynome premier avec X_i. On sait en effet, d'après la théorie du plus grand commun diviseur, qu'étant donnés deux polynomes premiers entre eux X et Y, et un polynome quelconque Z, on peut toujours trouver deux autres polynomes A et B donnant lieu à l'identité

$$BX + AY = Z.$$

Prenons $X = X_1$, $Y = X_2^2 \dots X_p^p$, $Z = f(x)$; l'identité précédente devient

$$BX_1 + AX_2^2 \dots X_p^p = f(x),$$

ou, en divisant par $F(x)$,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{X_1} + \frac{B}{X_2^2 \dots X_p^p},$$

et il est clair, d'après l'identité précédente, que, si $f(x)$ est premier avec $F(x)$, A est premier avec X_1 et B est premier avec $X_2^2 \dots X_p^p$. En recommençant les mêmes opérations sur la

fraction

$$\frac{B}{X_2^2 \ldots X_p^p},$$

et ainsi de suite, on mettra $\frac{f(x)}{F(x)}$ sous la forme annoncée.

Il nous suffit donc de montrer comment on peut trouver la partie rationnelle d'une intégrale telle que

$$\int \frac{A\,dx}{\varphi^n},$$

où $\varphi(x)$ est un polynome premier avec sa dérivée. D'après le théorème déjà rappelé, on peut alors trouver deux autres polynomes B et C donnant lieu à l'identité

$$B\varphi(x) + C\varphi'(x) = A$$

et nous pouvons écrire l'intégrale précédente

$$\int \frac{A\,dx}{\varphi^n} = \int \frac{B\varphi + C\varphi'}{\varphi^n}\,dx = \int \frac{B\,dx}{\varphi^{n-1}} + \int C\frac{\varphi'\,dx}{\varphi^n}.$$

Si n est supérieur à un, intégrons par parties la dernière intégrale en posant

$$u = C, \qquad v = \frac{-1}{(n-1)\varphi^{n-1}},$$

il vient

$$\int C\frac{\varphi'\,dx}{\varphi^n} = -\frac{C}{(n-1)\varphi^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{C'}{\varphi^{n-1}}\,dx,$$

et, en portant dans la relation précédente, on a

$$\int \frac{A\,dx}{\varphi^n} = -\frac{C}{(n-1)\varphi^{n-1}} + \int \frac{A_1\,dx}{\varphi^{n-1}},$$

A_1 désignant un nouveau polynome. Si $n > 2$, on peut appliquer le même procédé de réduction à la nouvelle intégrale, et ainsi de suite; on ne sera arrêté que lorsque l'exposant de φ au dénominateur sera égal à un et l'on obtiendra alors une relation de la forme

$$\int \frac{A\,dx}{\varphi^n} = R(x) + \int \frac{\psi\,dx}{\varphi},$$

$R(x)$ étant une fonction rationnelle de x et ψ un polynome que l'on peut toujours supposer de degré inférieur à celui de φ, mais qui n'est pas nécessairement premier avec φ. Pour calculer cette

dernière intégrale, il faudrait connaître les racines de φ, mais l'intégration n'introduirait aucun terme rationnel. En effet, la fraction $\frac{\psi}{\varphi}$, décomposée en fractions simples, ne donnera que des termes tels que

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

et l'intégrale de chacun d'eux est une fonction transcendante.

La méthode permet en particulier de reconnaître si l'intégrale d'une fonction rationnelle est elle-même une fonction rationnelle. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'après avoir poussé la réduction aussi loin que possible tous les polynomes tels que ψ soient nuls.

On remarquera que la méthode qui a été suivie plus haut pour réduire l'intégrale I_n n'est au fond qu'un cas particulier de la méthode précédente. Prenons encore l'intégrale plus générale

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}, \qquad A \neq 0, \qquad B^2-AC \neq 0;$$

on a l'identité

$$A(Ax^2+2Bx+C)-(Ax+B)^2 = AC-B^2,$$

ce qui permet d'écrire

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{A}{AC-B^2}\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} - \frac{1}{AC-B^2}\int (Ax+B)\frac{(Ax+B)\,dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}.$$

En intégrant par parties la dernière intégrale, on a

$$\int (Ax+B)\frac{Ax+B}{(Ax^2+2Bx+C)^n}\,dx = -\frac{Ax+B}{2(n-1)(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} + \frac{A}{2n-2}\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}},$$

et la relation précédente nous donne

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{Ax+B}{2(n-1)(AC-B^2)(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{A}{AC-B^2}\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}}.$$

En continuant de la sorte, on sera ramené à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C},$$

qui s'exprime par un logarithme si $B^2 - AC > 0$, et par un arc tang si $B^2 - AC < 0$.

Prenons encore l'intégrale

$$\int \frac{5x^3 + 3x - 1}{(x^3 + 3x + 1)^3} dx;$$

on a l'identité

$$5x^3 + 3x - 1 = 6x(x^2 + 1) - (x^3 + 3x + 1),$$

ce qui permet d'écrire

$$\int \frac{5x^3 + 3x - 1}{(x^3 + 3x + 1)^3} dx = \int \frac{6x(x^2 + 1)}{(x^3 + 3x + 1)^3} dx - \int \frac{dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

En intégrant par parties la première intégrale, on a

$$\int x \frac{6(x^2 + 1)\,dx}{(x^3 + 3x + 1)^3} = \frac{-x}{(x^3 + 3x + 1)^2} + \int \frac{dx}{(x^3 + 3x + 1)^2};$$

il reste, par conséquent,

$$\int \frac{5x^3 + 3x - 1}{(x^3 + 3x + 1)^3} dx = \frac{-x}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

Remarque. — Dans l'application de la méthode de M. Hermite, on a à résoudre le problème suivant : *Étant donnés trois polynomes* A, B, C, *de degrés* m, n, p *respectivement*, A *et* B *étant premiers entre eux, trouver deux autres polynomes* u *et* v *tels que l'on ait identiquement* $Au + Bv = C$.

Pour trouver les polynomes u et v du plus petit degré possible répondant à la question, supposons d'abord que p est au plus égal à $m + n - 1$. On peut alors prendre pour u et v des polynomes de degré $n - 1$ et $m - 1$ respectivement. Les $m + n$ coefficients inconnus sont déterminés par un système de $m + n$ équations linéaires non homogènes, dont le déterminant ne peut être nul; autrement on pourrait trouver deux polynomes u et v de degrés $n - 1$ et $m - 1$ au plus donnant lieu à l'identité $Au + Bv = 0$, ce qui exigerait que A et B eussent un facteur commun.

Si le polynome C est de degré $m + n$ ou de degré supérieur, divisons C par AB de façon à avoir un reste C' de degré $m + n - 1$ au plus; $C = ABQ + C'$. La relation $Au + Bv = C$ devient, en posant $u - BQ = u_1$,

$$Au_1 + Bv = C',$$

et l'on est ramené au cas précédent.

105. Des intégrales $\int R(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})\,dx$. — Après les intégrales des fonctions rationnelles, il est naturel d'étudier les intégrales des fonctions irrationnelles. Nous commencerons par le cas où la fonction à intégrer est une fonction rationnelle de x et de la racine carrée d'un polynome du second degré. Dans ce cas, il suffit d'un simple changement de variable pour faire disparaître le radical, ce qui ramène au cas précédent. Ce changement de variable est évident, si le polynome sous le radical se réduit à un binome du premier degré $ax+b$; il suffira de poser $ax+b=t^2$, ce qui donne

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})\,dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t\right)\frac{2t\,dt}{a},$$

et la nouvelle fonction à intégrer est rationnelle.

Si le polynome sous le radical est du second degré et a deux racines réelles a et b, on peut écrire

$$\sqrt{A(x-a)(x-b)} = (x-b)\sqrt{A\frac{x-a}{x-b}},$$

et il suffira encore de poser $\sqrt{A\dfrac{x-a}{x-b}}=t$, ou $x=\dfrac{Aa-bt^2}{A-t^2}$ pour faire disparaître le radical.

Lorsque le polynome sous le radical a ses racines imaginaires, ce procédé introduirait des symboles imaginaires. Pour serrer la question de plus près, remarquons que, si l'on représente par y le radical $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$, x et y sont les coordonnées d'un point de la courbe qui a pour équation

$$(1) \qquad y^2 = Ax^2+2Bx+C,$$

et le problème revient à exprimer les coordonnées d'un point d'une conique par des fonctions rationnelles d'un paramètre. Il est évident géométriquement que cela est possible; en effet, si, par un point quelconque (α, β) de cette conique, on mène une sécante variable

$$y-\beta = t(x-\alpha),$$

il est clair que les coordonnées du second point d'intersection de cette sécante avec la conique s'obtiennent par des équations du

premier degré, et sont par suite des fonctions rationnelles de t.

Cela posé, lorsque le trinome $Ax^2 + 2Bx + C$ a ses racines imaginaires, le coefficient A doit être positif, car autrement ce trinome serait négatif pour toutes les valeurs réelles de x. La conique (1) est alors une hyperbole, et en coupant cette hyperbole par une droite parallèle à l'une des asymptotes

$$y = x\sqrt{A} + t,$$

on obtient, pour les coordonnées du point d'intersection,

$$x = \frac{C - t^2}{2t\sqrt{A} - 2B}, \qquad y = t + \sqrt{A}\,\frac{C - t^2}{2t\sqrt{A} - 2B}.$$

Lorsque $A < 0$, la conique est une ellipse et le trinome

$$Ax^2 + 2Bx + C$$

doit avoir deux racines réelles a et b, sans quoi ce trinome serait négatif pour toutes les valeurs réelles de x. Le changement de variables indiqué tout à l'heure est précisement celui que l'on obtiendrait en coupant la conique par une sécante mobile

$$y = t(x - a).$$

Soit, par exemple, à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x^2 + k)\sqrt{x^2 + k}}.$$

La conique auxiliaire $y^2 = x^2 + k$ est une hyperbole et, en coupant par une droite parallèle à l'asymptote $x + y = t$, on a, pour les coordonnées du point d'intersection,

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{t}\right), \qquad y = \sqrt{x^2 + k} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{k}{t}\right),$$

et ensuite

$$dx = \frac{dt}{2}\left(\frac{t^2 + k}{t^2}\right), \qquad \int \frac{dx}{y^3} = \int \frac{4t\,dt}{(t^2 + k)^2} = -\frac{2}{t^2 + k}.$$

En revenant à la variable x, il vient

$$\int \frac{dx}{(x^2 + k)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x - \sqrt{x^2 + k}}{k\sqrt{x^2 + k}} = \frac{x}{k\sqrt{x^2 + k}} - \frac{1}{k},$$

le second membre n'étant déterminé qu'à une constante près.

D'une façon générale, si $AC - B^2$ n'est pas nul, on a

$$\int \frac{dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{AC - B^2} \frac{Ax + B}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}.$$

Dans certains cas, il est plus facile de trouver l'intégrale directement, sans faire disparaître l'irrationalité. Nous prendrons pour exemple l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}.$$

Si le coefficient A est positif, on peut l'écrire

$$\int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{A^2x^2 + 2ABx + AC}} = \int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{(Ax + B)^2 + AC - B^2}}$$

et, en posant $Ax + B = t$, elle devient

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + AC - B^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log(t + \sqrt{t^2 + AC - B^2}).$$

En revenant à la variable x, il vient donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log(Ax + B + \sqrt{A}\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}).$$

Lorsque le coefficient de x^2 est négatif, on peut écrire l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-Ax^2 + 2Bx + C}} = \int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{AC + B^2 - (Ax - B)^2}}; \qquad A > 0,$$

la quantité $AC + B^2$ est forcément positive et en posant

$$Ax - B = t\sqrt{AC + B^2},$$

on est conduit à l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin t.$$

Par suite, l'on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin \frac{Ax - B}{\sqrt{AC + B^2}};$$

il est facile de vérifier que, lorsque x varie entre les deux racines du trinome, la fonction sous le signe arc sin varie entre -1 et $+1$.

Dans le cas intermédiaire où $A = 0$, sans que B soit nul, l'intégrale est algébrique

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2Bx+C}} = \frac{1}{B}\sqrt{2Bx+C}.$$

Les intégrales $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$ se ramènent aux précédentes en posant $x = a + \frac{1}{y}$; on trouve, en effet,

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{A_1y^2+2B_1y+C_1}},$$

où

$$A_1 = Aa^2 + 2Ba + C, \qquad B_1 = Aa + B, \qquad C_1 = A.$$

Il convient de remarquer que l'intégrale est algébrique si a est racine du trinome sous le radical, et dans ce cas seulement.

Considérons encore l'intégrale $\int \sqrt{x^2+A}\,dx$. Une intégration par parties donne

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}};$$

d'autre part, on peut écrire

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \sqrt{x^2+A}\,dx - \int \frac{A\,dx}{\sqrt{x^2+A}}$$
$$= \int \sqrt{x^2+A}\,dx - A\log(x+\sqrt{x^2+A}),$$

et l'on tire de ces deux relations

(2) $$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\log(x+\sqrt{x^2+A}),$$

(3) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} - \frac{A}{2}\log(x+\sqrt{x^2+A}).$$

On établirait de même les deux formules

(4) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},$$

(5) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

106. Aire de l'hyperbole. — On rencontre les intégrales qui précè-

dent quand on cherche à évaluer l'aire d'un secteur d'ellipse ou d'hyperbole. Prenons l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et proposons-nous d'évaluer l'aire du segment AMP limité par l'arc AM, l'axe des x et l'ordonnée MP. Cette aire est égale à l'intégrale définie

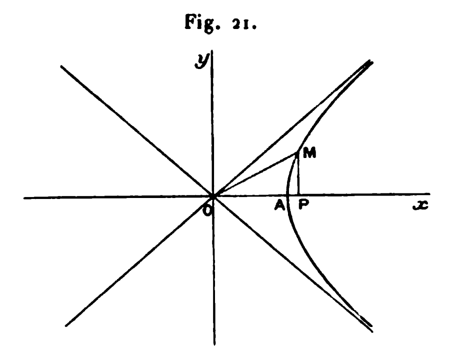
$$\int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx,$$

c'est-à-dire, d'après la formule (2), à

$$\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right].$$

Or on a $MP = y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, et le produit $\frac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{x^2 - a^2}$ représente précisément l'aire du triangle OMP ; on en conclut que l'aire S du

Fig. 21.



secteur OAM compris entre l'arc AM, le rayon OA et le rayon OM a pour expression

$$S = \frac{1}{2}ab \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) = \frac{1}{2}ab \log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Cette formule permet d'exprimer les coordonnées x et y d'un point M de l'hyperbole au moyen de l'aire S. On tire, en effet, de la relation précédente et de l'équation de l'hyperbole

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = e^{\frac{2S}{ab}}, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = e^{-\frac{2S}{ab}},$$

et, par suite,

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2S}{ab}} + e^{-\frac{2S}{ab}}\right), \qquad y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{2S}{ab}} - e^{-\frac{2S}{ab}}\right).$$

Les fonctions qui figurent au second membre ont été appelées *cosinus* et *sinus hyperboliques*

$$\cos\text{hyp}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sin\text{hyp}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

et nous pouvons écrire

$$x = a \cos\text{hyp}\, \frac{2S}{ab}, \qquad y = b \sin\text{hyp}\, \frac{2S}{ab}.$$

Les fonctions hyperboliques jouissent de propriétés analogues à celles des fonctions trigonométriques (¹); ainsi l'on a

$$\cos^2\text{hyp}\, x - \sin^2\text{hyp}\, x = 1,$$

$$\cos\text{hyp}(x+y) = \cos\text{hyp}\, x \cos\text{hyp}\, y + \sin\text{hyp}\, x \sin\text{hyp}\, y,$$
$$\sin\text{hyp}(x+y) = \sin\text{hyp}\, x \cos\text{hyp}\, y + \sin\text{hyp}\, y \cos\text{hyp}\, x.$$

On trouverait de même que les coordonnées d'un point d'une ellipse, exprimées au moyen de l'aire du secteur, sont données par les formules

$$x = a \cos\frac{2S}{ab}, \qquad y = b \sin\frac{2S}{ab}.$$

Dans le cas du cercle de rayon un et dans le cas de l'hyperbole équilatère, de demi-axe égal à un, ces formules deviennent respectivement

$$x = \cos 2S, \qquad y = \sin 2S;$$
$$x = \cos\text{hyp}\, 2S, \qquad y = \sin\text{hyp}\, 2S;$$

les fonctions hyperboliques jouent le même rôle pour l'hyperbole équilatère que les fonctions trigonométriques pour le cercle.

107. Rectification de la parabole. — Proposons-nous de trouver la longueur de l'arc de la parabole $2py = x^2$, compris entre le sommet O et un point M; on a

$$\text{arc OM} = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^x \frac{\sqrt{x^2+p^2}}{p}\, dx,$$

ou, en appliquant la formule (2),

$$\text{arc OM} = \frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2} \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2+p^2}}{p}\right).$$

Le terme algébrique du second membre représente précisément la lon-

(¹) On trouvera, dans le *Recueil des formules numériques* de Houël, une Table donnant les logarithmes de ces fonctions pour des valeurs positives de l'argument.

gueur MT de la tangente ; on sait en effet que $OT = \frac{x}{2}$; on a donc

$$MT^2 = y^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{4p^2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2(x^2+p^2)}{4p^2}.$$

Joignons le point T au foyer F; l'angle MTF est droit et l'on a

$$FT = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+x^2}.$$

On déduit de là une propriété curieuse de la parabole.

Imaginons que la parabole roule sans glisser sur l'axe Ox et cherchons le lieu décrit par le foyer, supposé invariablement lié à la parabole.

Fig. 22.

Quand la parabole est tangente en M' à l'axe Ox, on a OM' = arc OM; le point T est venu au point T', tel que M'T' = MT et le foyer F est venu au point F' obtenu en portant une longueur T'F' = TF sur la parallèle à Oy. Les coordonnées X, Y du point F' ont les valeurs suivantes :

$$X = \text{arc}\,OM - MT = \frac{p}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\right),$$
$$Y = TF = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+x^2},$$

et l'on obtiendra l'équation du lieu décrit par le foyer en éliminant x entre ces deux relations. De la première on tire

$$x + \sqrt{x^2+p^2} = pe^{\frac{2X}{p}},$$

et l'on peut joindre à cette équation

$$x - \sqrt{x^2+p^2} = -pe^{-\frac{2X}{p}},$$

car le produit des premiers membres est égal à $-p^2$. En les retranchant,

il vient

$$\sqrt{x^2+p^2} = \frac{p}{2}\left(e^{\frac{2X}{p}} + e^{-\frac{2X}{p}}\right),$$

et l'équation cherchée est

$$Y = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2X}{p}} + e^{-\frac{2X}{p}}\right) = \frac{p}{2}\cos\text{hyp}\,\frac{2X}{p}.$$

Il est facile de construire cette courbe, qui porte le nom de *chaînette;* elle a une forme analogue à celle de la parabole.

108. Courbes unicursales. — Considérons maintenant d'une façon générale les intégrales de fonctions algébriques. Soient

$$(6) \qquad F(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique, et $R(x, y)$ une fonction rationnelle de x et de y; imaginons que dans $R(x, y)$ on remplace y par une des racines de l'équation (6); le résultat est fonction de la seule variable x et l'intégrale

$$\int R(x, y)\,dx$$

est une *intégrale abélienne* attachée à la courbe (6). Lorsque la courbe donnée et la fonction $R(x, y)$ sont quelconques, ces intégrales sont des fonctions transcendantes. Mais, dans le cas particulier où la courbe est unicursale, c'est-à-dire où les coordonnées x et y d'un point de cette courbe peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles d'un paramètre variable t, les intégrales abéliennes attachées à cette courbe se ramènent immédiatement à des intégrales de fonctions rationnelles. Soient en effet

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

les expressions des coordonnées x et y en fonction de t; en prenant t pour nouvelle variable indépendante, on a

$$\int R(x, y)\,dx = \int R[f(t), \varphi(t)]f'(t)\,dt,$$

et la nouvelle fonction à intégrer est évidemment rationnelle.

On démontre dans les Cours de Géométrie analytique [1] que

---

[1] *Voir* par exemple NIEWENGLOWSKI, *Cours de Géométrie analytique,* t. II, p. 99-114.

toute courbe unicursale de degré n possède $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles, et que réciproquement toute courbe de degré n possédant ce nombre de points doubles est unicursale. Je rappellerai seulement comment on peut obtenir les expressions des coordonnées en fonction du paramètre auxiliaire. Étant donnée une courbe C_n de degré n, possédant $\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles, par ces δ points doubles et $n-3$ points simples de C_n faisons passer un faisceau de courbes de degré $n-2$; ces points déterminent bien un faisceau de courbes de degré $n-2$, car

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 3 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1$$

et il faut $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ points pour déterminer une courbe de degré $n-2$. Soit $P(x, y) + tQ(x, y) = 0$ l'équation des courbes de ce faisceau, t désignant un paramètre arbitraire; chaque courbe du faisceau rencontre la courbe C_n en $n(n-2)$ points, dont un certain nombre sont indépendants de t, les $n-3$ points simples choisis et les δ points doubles dont chacun compte pour deux points d'intersection. Mais on a

$$n - 3 + 2\delta = n - 3 + (n-1)(n-2) = n(n-2) - 1;$$

il reste donc un seul point d'intersection variable avec t. Les coordonnées de ce point sont données par des équations du premier degré dont les coefficients sont des polynomes entiers en t; ces coordonnées sont donc elles-mêmes des fonctions rationnelles de t. On pourrait aussi employer un faisceau de courbes de degré $n-1$ passant par les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles et $2n-3$ points simples pris à volonté sur C_n.

Si $n = 2$, on a $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0$; toute courbe du second degré est donc unicursale, comme on l'a déjà observé. Si $n = 3$, on a $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 1$; les courbes unicursales du troisième degré sont donc celles qui ont un point double. Le point double étant pris pour origine, l'équation de la cubique est de la forme

$$\varphi_3(x, y) + \varphi_2(x, y) = 0,$$

φ_2 et φ_3 étant des polynomes homogènes d'un degré marqué par leur indice. Une sécante $y = tx$ passant par le point double rencontre la cubique en un seul point variable avec t, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)}, \qquad y = -\frac{t\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)}.$$

Une courbe unicursale du quatrième degré possède trois points doubles. Pour avoir les coordonnées d'un point, on formera l'équation d'un faisceau de coniques passant par les trois points doubles et par un autre point simple pris à volonté sur la courbe. Chaque conique de ce faisceau rencontre la quartique en un seul point variable avec le paramètre; si l'on forme, par exemple, l'équation aux abscisses des points d'intersection, cette équation, débarrassée des facteurs qui correspondent aux racines connues, se réduira au premier degré et donnera x en fonction rationnelle du paramètre. On opérera de même pour y.

Prenons par exemple la lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),$$

qui a un point double à l'origine et qui admet en outre pour points doubles les points circulaires à l'infini. Un cercle passant par l'origine et tangent en ce point à une des branches de la lemniscate

$$x^2+y^2 = t(x-y)$$

rencontre cette courbe en un seul point variable avec t. Une combinaison facile de ces deux équations donne

$$t^2(x-y)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

et, en divisant par $x-y$, il reste

$$t^2(x-y) = a^2(y+x);$$

cette dernière équation représente une droite passant par l'origine, qui coupe le cercle en un point différent de l'origine, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{a^2t(t^2+a^2)}{t^4+a^4}, \qquad y = \frac{a^2t(t^2-a^2)}{t^4+a^4}.$$

On arrive encore plus vite à ces formules par la méthode suivante qui est applicable à toute courbe unicursale du quatrième ordre dont on connaît un point double. Coupons la lemniscate par la sécante $y = \lambda x$; elle rencontre la courbe en deux points de coordonnées

$$x = \frac{\pm a\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2}, \qquad y = \lambda x.$$

Le polynome sous le radical est du second degré et, pour faire disparaître l'irrationalité, il suffira (n° 105) de poser $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \left(\frac{a}{t}\right)^2$, ce qui conduit bien aux formules précédentes.

Remarque. — Lorsqu'une courbe plane admet des points singuliers d'espèce supérieure, on démontre que chacun d'eux est équivalent à un certain nombre de points doubles distincts. Pour qu'une courbe soit unicursale, il suffit que ses points singuliers soient équivalents à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles. Par exemple, une courbe de degré n ayant un point multiple d'ordre $n-1$ est unicursale, car une sécante issue du point multiple la rencontre en un seul point variable.

109. Intégrales de différentielles binomes. — Parmi les autres intégrales d'où l'on peut faire disparaître l'irrationalité facilement, citons encore les suivantes

$$\int R\left[x, (ax+b)^{\frac{1}{q}}\right] dx, \quad \int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\, dx,$$

$$\int R(x^{\alpha}, x^{\alpha'}, x^{\alpha''}, \ldots)\, dx,$$

R étant une fonction rationnelle et les exposants α, α', α'', ... étant commensurables. Dans la première intégrale, il suffit de poser $ax + b = t^q$; si l'on pose de même, dans la seconde,

$$ax + b = t^2,$$

on n'aura plus qu'un radical carré portant sur un polynome du second degré, et un nouveau changement de variable fera disparaître ce radical. Enfin, dans la troisième intégrale, on peut poser

$x = t^D$, le nombre entier D étant choisi de façon que les produits $D\alpha$, $D\alpha'$, $D\alpha''$, ... soient entiers.

A ce dernier exemple on peut rattacher une catégorie de différentielles de la forme

$$x^m(ax^n + b)^p\,dx,$$

appelées *différentielles binomes*. Supposons les trois exposants m, n, p *commensurables;* si p est entier, d'après ce qu'on vient de voir à l'instant, on peut rendre cette différentielle rationnelle par un changement de variable tel que $x = t^D$. Pour trouver de nouveaux cas d'intégrabilité, essayons du changement de variable

$$ax^n + b = t;$$

il vient

$$x = \left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad dx = \frac{1}{na}\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

$$\int x^m(ax^n + b)^p\,dx = \frac{1}{na}\int t^p\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dt;$$

la nouvelle intégrale est de même forme que la première, et l'exposant qui remplace p est ici $\frac{m+1}{n} - 1$; on pourra donc achever l'intégration si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier.

D'autre part, l'intégrale peut s'écrire

$$\int x^{m+np}(a + bx^{-n})^p\,dx,$$

et l'on voit qu'on a un nouveau cas d'intégrabilité lorsque $\frac{m+np+1}{n} = \frac{m+1}{n} + p$ est un nombre entier. En résumé, on peut effectuer l'intégration *lorsque l'un des trois nombres* p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ *est entier*. Ces trois cas sont les seuls où l'intégrale s'exprime au moyen d'un nombre fini de symboles élémentaires lorsque m, n, p sont commensurables.

Pour effectuer l'intégration lorsqu'elle est possible, il est commode de ramener d'abord l'intégrale à une forme plus simple où ne figurent que deux exposants. Posons pour cela $ax^n = bt$; il

vient

$$x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

$$\int x^m (ax^n + b)^p \, dx = \frac{b^p}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} \int t^{\frac{m+1}{n}-1}(1+t)^p \, dt.$$

En faisant abstraction du facteur constant et posant

$$q = \frac{m+1}{n} - 1,$$

on est conduit à l'intégrale

$$\int t^q (1+t)^p \, dt,$$

et les cas d'intégrabilité sont les suivants : *l'un des trois nombres* p, q, $p+q$ *doit être un nombre entier.*

Si p est entier et $q = \frac{r}{s}$, on posera $t = u^s$; si q est entier et $p = \frac{r}{s}$, on posera de même $1 + t = u^s$. Enfin, si $p + q$ est entier, on peut écrire l'intégrale

$$\int t^{p+q}\left(\frac{1+t}{t}\right)^p dt$$

et l'on n'a qu'à poser $1 + t = tu^s$, en supposant $p = \frac{r}{s}$, pour faire disparaître l'irrationalité.

Prenons par exemple l'intégrale

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3} \, dx;$$

on a $m = 1$, $n = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} + p = 1$. On est donc dans un cas d'intégrabilité. En posant d'abord $x^3 = t$, on est conduit à la nouvelle intégrale

$$\frac{1}{3}\int \sqrt[3]{\frac{1+t}{t}} \, dt,$$

et il suffira du nouveau changement de variable $1 + t = tu^3$, pour faire disparaître le radical.

II. — INTÉGRALES ELLIPTIQUES ET ULTRA-ELLIPTIQUES.

110. Réduction des intégrales. — Soit $P(x)$ un polynome entier de degré p, premier avec sa dérivée. Une intégrale

$$\int R[x, \sqrt{P(x)}]\,dx,$$

où R désigne une fonction rationnelle de x et du radical $y = \sqrt{P(x)}$, ne peut pas en général s'exprimer au moyen des fonctions élémentaires, lorsque le degré de $P(x)$ est supérieur à 2. Ces intégrales, qui sont des cas particuliers des intégrales abéliennes les plus générales, se décomposent en une partie algébrique et logarithmique, et en un certain nombre d'intégrales spéciales qui constituent des transcendantes nouvelles qu'on ne peut exprimer au moyen d'un nombre fini de symboles élémentaires. Nous allons exposer cette réduction.

La fonction rationnelle $R(x, y)$ est le quotient de deux polynomes entiers en x et en y; en remplaçant une puissance paire de y, telle que y^{2q}, par $[P(x)]^q$, et une puissance impaire, telle que y^{2q+1}, par $y[P(x)]^q$, on voit qu'on peut supposer les deux termes de la fraction du premier degré en y,

$$R(x, y) = \frac{A + By}{C + Dy},$$

A, B, C, D étant des polynomes entiers en x. En multipliant les deux termes par $C - Dy$ et remplaçant de nouveau y^2 par $P(x)$, on peut encore écrire

$$R(x, y) = \frac{F + Gy}{K},$$

et l'intégrale considérée se partage en deux autres, dont l'une $\int \frac{F\,dx}{K}$ est l'intégrale d'une fonction rationnelle et dont la seconde $\int \frac{Gy}{K}\,dx$, qui peut aussi s'écrire

$$\int \frac{M\,dx}{N\sqrt{P(x)}},$$

M et N étant deux polynomes entiers en x, doit seule nous

occuper. La fraction rationnelle $\frac{M}{N}$ peut être décomposée en une partie entière $E(x)$ et en une somme de termes fractionnaires

$$\frac{M}{N} = E(x) + \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} + \ldots + \frac{A_p}{X_p^p},$$

chaque polynome X_i étant premier avec sa dérivée. On n'a donc à considérer que deux sortes d'intégrales

$$Y_m = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{P(x)}}, \qquad Z_n = \int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}}.$$

Les intégrales Y_m *s'expriment toutes au moyen des* $p-1$ *premières* $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-2}$, *et de quantités algébriques, si* $R(x)$ *est de degré* p.

Soit, en effet,

$$P(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots.$$

On a

$$\frac{d}{dx}\left(x^m\sqrt{P(x)}\right) = mx^{m-1}\sqrt{P(x)} + \frac{x^m P'(x)}{2\sqrt{P(x)}}$$
$$= \frac{2mx^{m-1}P(x) + x^m P'(x)}{2\sqrt{P(x)}};$$

le numérateur est un polynome de degré $m+p-1$ dont le terme de degré le plus élevé est $(2m+p)a_0x^{m+p-1}$. Il vient, en intégrant les deux membres de l'égalité précédente,

$$2x^m\sqrt{P(x)} = (2m+p)a_0 Y_{m+p-1} + \ldots$$

les termes non écrits contenant les intégrales Y d'indice inférieur à $m+p-1$. Faisons successivement dans cette formule $m = 0, 1, 2, \ldots$, nous pourrons calculer de proche en proche $Y_{p-1}, Y_p, \ldots$, au moyen d'un terme algébrique et des $p-1$ intégrales $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-2}$.

Relativement aux intégrales de la seconde forme, il y a deux cas à distinguer, suivant que X est premier ou non avec $P(x)$.

1° *Si* X *est premier avec* $P(x)$, *l'intégrale* Z_n *se ramène à un terme algébrique, à une somme d'intégrales* Y_k, *et à une nouvelle intégrale*

$$\int \frac{B\,dx}{X\sqrt{P(x)}},$$

où B *est un polynome d'un degré inférieur à celui de* X.

Puisque X est premier avec sa dérivée X′ et avec $P(x)$, X^n est premier avec le produit PX′. On peut donc trouver deux polynomes λ et μ tels que l'on ait identiquement $\lambda X^n + \mu X' P = A$ et l'intégrale se partage en deux autres

$$\int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}} = \int \frac{\lambda\,dx}{\sqrt{P(x)}} + \int \frac{\mu\sqrt{P}X'}{X^n}\,dx.$$

La première partie est une somme d'intégrales Y; si $n > 1$, on peut intégrer par parties la seconde intégrale en posant

$$\mu\sqrt{P} = u, \qquad v = \frac{-1}{(n-1)X^{n-1}},$$

ce qui donne

$$\int \frac{\mu\sqrt{P}X'\,dx}{X^n} = \frac{-\mu\sqrt{P}}{(n-1)X^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{2\mu' P + \mu P'}{2X^{n-1}\sqrt{P(x)}}\,dx.$$

La nouvelle intégrale est de même forme que la première, sauf que l'exposant de X est diminué d'une unité. En continuant la réduction autant de fois que possible, c'est-à-dire tant que l'exposant de X est supérieur à un, on arrivera à un résultat de la forme

$$\int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}} = \int \frac{B\,dx}{X\sqrt{P}} + \int \frac{C\,dx}{\sqrt{P}} + \frac{D\sqrt{P}}{X^{n-1}},$$

B, C, D étant trois polynomes, et l'on peut toujours supposer le premier B de degré inférieur à celui de X.

2° Supposons que X et P aient un diviseur commun D, de façon que $X = YD$, $P = SD$, les polynomes D, S, Y étant premiers entre eux deux à deux. On peut trouver deux polynomes λ, μ, tels que $A = \lambda D^n + \mu Y^n$ et, par suite, on peut écrire

$$\int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P}} = \int \frac{\lambda\,dx}{Y^n\sqrt{P}} + \int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}}.$$

La première intégrale est de la forme de celles dont on vient de s'occuper; *quant à l'intégrale*

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}},$$

où D *est un diviseur de* P, *elle se ramène à un terme algébrique et aux intégrales* Y.

En effet, D'' étant premier avec le produit $D'S$, soient λ_1 et μ_1 deux polynomes tels que l'on ait $\lambda_1 D'' + \mu_1 D'S = \mu$: l'intégrale considérée peut s'écrire

$$\int \frac{\mu\, dx}{D^n \sqrt{P}} = \int \frac{\lambda_1\, dx}{\sqrt{P}} + \int \frac{\mu_1 S D'}{D'' \sqrt{P}}\, dx.$$

Écrivons la seconde de ces deux intégrales, en remplaçant P par SD,

$$\int \mu_1 \sqrt{S} \cdot \frac{D'}{D^{n+\frac{1}{2}}}\, dx,$$

et intégrons par parties en posant

$$u = \mu_1 \sqrt{S}, \qquad v = \frac{-1}{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{D^{n-\frac{1}{2}}},$$

il vient

$$\int \frac{\mu\, dx}{D^n \sqrt{P}} = \int \frac{\lambda_1\, dx}{\sqrt{P}} - \frac{\mu_1 \sqrt{S}}{\left(n-\frac{1}{2}\right) D^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2n-1} \int \frac{2\mu_1' S + \mu_1 S'}{D^{n-1}\sqrt{P}}\, dx.$$

C'est encore une formule de réduction, mais ici, à cause de l'exposant fractionnaire $n - \frac{1}{2}$, on peut pousser la réduction jusqu'au terme où D ne figure plus qu'à la première puissance au dénominateur, et l'on arrive à un résultat de la forme

$$\int \frac{\mu\, dx}{D^n \sqrt{P}} = \frac{K\sqrt{P}}{D^n} + \int \frac{H\, dx}{\sqrt{P}},$$

H et K étant deux polynomes.

En définitive, toute intégrale $\int \frac{M\, dx}{N\sqrt{P}}$ se ramène à une partie algébrique et à une somme d'intégrales de la forme

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{P}}, \quad \int \frac{X_1\, dx}{X\sqrt{P}},$$

où m est au plus égal à $p - 2$, où X est premier avec sa dérivée X' et avec P et où X_1 est d'un degré inférieur à celui de X. *Cette réduction n'exige que des additions, multiplications et divisions de polynomes.*

Si l'on connaît les racines de l'équation $X = 0$, on peut décomposer chacune des fractions rationnelles $\frac{X_1}{X}$ en une somme de fractions simples de la forme

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

A, B, C étant des constantes, de sorte qu'on est conduit à deux nouveaux types d'intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}, \quad \int \frac{(Bx+C)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]\sqrt{P(x)}},$$

qu'on peut ramener à un seul, le premier des deux, en convenant d'admettre pour le paramètre a des valeurs imaginaires. Les intégrales de cette forme sont appelées intégrales de *troisième espèce*. On appelle intégrales de *première espèce* les intégrales Y_m, où m est inférieur à $\frac{p}{2}-1$; les intégrales Y_m, où m est égal ou supérieur à $\frac{p}{2}-1$, sont les intégrales de *deuxième espèce*. Les intégrales de première espèce possèdent une propriété caractéristique : elles conservent une valeur finie lorsque la limite supérieure de l'intégrale croît indéfiniment ou devient égale à une racine de $P(x)$ (nos 89-90). Mais la distinction actuelle entre les intégrales de deuxième et de troisième espèce ne doit être acceptée qu'à titre provisoire. La véritable distinction sera faite plus tard.

Remarque. — Nous n'avons rien supposé jusqu'ici sur le degré p du polynome $P(x)$. Si ce polynome est de degré impair, on peut toujours augmenter le degré d'une unité. Soit en effet $P(x)$ un polynome de degré $2q-1$

$$P(x) = A_0 x^{2q-1} + A_1 x^{2q-2} + \ldots + A_{2q-1};$$

posons $x = a + \frac{1}{y}$, a n'étant pas racine de $P(x)$. Il vient

$$P(x) = P(a) + P'(a)\frac{1}{y} + \ldots + \frac{P^{(2q-1)}(a)}{(2q-1)!}\frac{1}{y^{2q-1}} = \frac{P_1(y)}{y^{2q}},$$

$P_1(y)$ désignant un polynome de degré $2q$. On a par suite

$$\sqrt{P(x)} = \frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q}$$

et toute intégrale qui contient rationnellement x et $\sqrt{P(x)}$ se change en une intégrale d'une fonction rationnelle de y et de $\sqrt{P_1(y)}$.

Inversement, si l'on a sous le radical un polynome $P(x)$ de degré pair $2q$, on peut abaisser d'une unité le degré de ce polynome, *pourvu qu'on en connaisse une racine*. Soit en effet a une racine de l'équation $P(x) = 0$; en posant $x = a + \frac{1}{y}$, il vient

$$P(x) = P'(a)\frac{1}{y} + \ldots + \frac{P^{2q}(a)}{(2q)!}\frac{1}{y^{2q}} = \frac{P_1(y)}{y^{2q}},$$

$P_1(y)$ étant de degré $2q-1$, et on a par suite

$$\sqrt{P(x)} = \frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q}.$$

La nouvelle intégrale ne contiendra d'autre irrationalité que $\sqrt{P_1(y)}$ sous le signe d'intégration.

111. Cas d'intégration algébrique. — Étant donnée une intégrale de la forme

$$\int R[x, \sqrt{P(x)}]\,dx,$$

nous venons de voir qu'on peut toujours, par des calculs élémentaires, la ramener à l'intégrale d'une fraction rationnelle, à un terme algébrique de la forme $\frac{G\sqrt{P(x)}}{L}$ et à une somme d'intégrales de première, de deuxième et de troisième espèce. Comme on peut aussi trouver, par des opérations élémentaires, la partie rationnelle de l'intégrale d'une fraction rationnelle, on voit qu'on peut toujours mettre l'intégrale proposée sous la forme

$$\int R[x, \sqrt{P(x)}]\,dx = F[x, \sqrt{P(x)}] + T,$$

F étant une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{P(x)}$, et T étant égal à une somme d'intégrales des trois espèces et d'une intégrale $\int\frac{X_1}{X}\,dx$, où X est premier avec sa dérivée et où X_1 est d'un degré inférieur à celui de X. Liouville a démontré que, si l'intégrale proposée est algébrique, elle est égale à $F[x, \sqrt{P(x)}]$, de sorte qu'on doit avoir identiquement

$$R[x, \sqrt{P(x)}] = \frac{d}{dx}\{F[x, \sqrt{P(x)}]\},$$

et par suite $T = 0$.

On peut donc reconnaître, par des multiplications et divisions de

polynomes, si l'intégrale proposée est algébrique et trouver, dans ce cas, la valeur de cette intégrale.

112. Intégrales elliptiques. — Lorsque le polynome $P(x)$ est du second degré, la méthode de réduction générale qui vient d'être exposée permet de ramener l'intégration d'une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{P(x)}$ au calcul des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}},$$

que l'on a appris à calculer directement (n° 105).

Le cas le plus simple après celui-là est celui des intégrales elliptiques, où $P(x)$ est du troisième ou du quatrième degré; les deux cas se ramènent d'ailleurs l'un à l'autre, comme nous venons de le voir. Soit donc $P(x)$ un polynome du quatrième degré, n'ayant que des facteurs linéaires simples, et à coefficients réels; nous allons d'abord montrer qu'on peut toujours, par une substitution linéaire *réelle*, le ramener à un polynome n'ayant que des termes de degré pair.

Soient a, b, c, d les quatre racines de $P(x) = 0$. Il existe une relation d'involution

$$Lx'x'' + M(x' + x'') + N = 0, \tag{7}$$

qui est vérifiée par $x' = a$, $x'' = b$ et par $x' = c$, $x'' = d$. On a, pour déterminer les coefficients L, M, N, les deux relations

$$\begin{aligned} Lab + M(a+b) + N &= 0, \\ Lcd + M(c+d) + N &= 0, \end{aligned}$$

et l'on voit qu'on peut prendre

$$L = a + b - c - d, \qquad M = cd - ab, \qquad N = ab(c+d) - cd(a+b).$$

Appelons α et β les points doubles de l'involution précédente, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$Lu^2 + 2Mu + N = 0;$$

la condition de réalité de ces racines

$$(cd - ab)^2 - (a + b - c - d)[ab(c+d) - cd(a+b)] > 0$$



peut s'écrire, comme le prouve un calcul facile,

$$(8)\qquad (a-c)(a-d)(b-c)(b-d) > 0.$$

On peut toujours s'arranger de façon que cette condition soit vérifiée. Si les quatre racines a, b, c, d sont réelles, il suffira de prendre pour a et b les deux plus grandes; les quatre facteurs de (8) sont alors positifs. Si l'équation $P(x)=0$ a deux racines réelles seulement, on prendra pour a et b ces deux racines réelles et pour c et d les deux racines imaginaires conjuguées; les facteurs $a-c$ et $a-d$ sont alors des imaginaires conjuguées, ainsi que $b-c$ et $b-d$. Enfin, si les quatre racines sont imaginaires, on prendra pour a et b deux racines conjuguées, et pour c et d les deux autres racines conjuguées. Les quatre facteurs de (8) sont encore conjugués deux à deux. D'ailleurs les valeurs correspondantes de L, M, N sont réelles.

Cela posé, observons que la relation (7) peut s'écrire

$$(9)\qquad \frac{x'-\alpha}{x'-\beta}+\frac{x''-\alpha}{x''-\beta}=0;$$

si nous posons $\frac{x-\alpha}{x-\beta}=y$, ou $x=\frac{\beta y-\alpha}{y-1}$, il vient

$$P(x)=\frac{P_1(y)}{(y-1)^4},$$

$P_1(y)$ étant un nouveau polynome du quatrième degré à coefficients réels dont les racines sont

$$\frac{a-\alpha}{a-\beta},\quad \frac{b-\alpha}{b-\beta},\quad \frac{c-\alpha}{c-\beta},\quad \frac{d-\alpha}{d-\beta}.$$

D'après la formule (9), ces quatre racines vérifient par couples la relation $y'+y''=0$; le polynome $P_1(y)$ n'a donc que des termes de degré pair.

Si les quatre racines a, b, c, d vérifient la relation $a+b=c+d$, on a $L=0$, et l'un des points doubles de l'involution s'en va à l'infini. En posant $\alpha=-\frac{N}{2M}$, l'équation (7) peut s'écrire

$$x'-\alpha+x''-\alpha=0,$$

et il suffira de poser $x=\alpha+y$, pour obtenir un polynome n'ayant que des termes de degré pair.

Nous pouvons donc supposer $P(x)$ ramené à la forme canonique

$$P(x) = A_0x^4 + A_1x^2 + A_2;$$

toute intégrale elliptique se ramène alors, abstraction faite d'un terme algébrique et de l'intégrale d'une fonction rationnelle, aux intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}},$$

et à des intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}.$$

L'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}$$

est l'intégrale elliptique de première espèce; si l'on considère inversement x comme fonction de u, on a une *fonction elliptique*. La seconde intégrale se ramène à une intégrale élémentaire en posant $x^2 = u$. La troisième intégrale

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}$$

est l'intégrale de seconde espèce de Legendre. Enfin on peut écrire

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}} = \int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}} + a\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}};$$

l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x^2+h)\sqrt{A_0x^4 + A_1x^2 + A_2}}$$

est l'intégrale de troisième espèce de Legendre.

Les intégrales elliptiques ont été appelées ainsi, parce qu'on les a d'abord rencontrées dans le problème de la rectification de l'ellipse. Soient

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi$$

les coordonnées d'un point d'une ellipse; on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\,d\varphi^2,$$

ce qu'on peut encore écrire, en posant $a^2 - b^2 = e^2 a^2$,

$$ds = a\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi}\, d\varphi,$$

et l'intégrale qui représente un arc d'ellipse devient, en posant $\cos\varphi = t$,

$$s = a\int \frac{\sqrt{1-e^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = a\int \frac{1-e^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)}}\,dt;$$

un arc d'ellipse s'exprime, comme l'on voit, par la somme d'une intégrale de première espèce et d'une intégrale de seconde espèce.

Prenons encore la lemniscate représentée par les équations

$$x = a^2\frac{t(t^2+a^2)}{t^4+a^4}, \qquad y = a^2\frac{t(t^2-a^2)}{t^4+a^4};$$

on trouve, en faisant le calcul, que l'on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{2a^4}{t^4+a^4}\,dt^2.$$

L'arc de la lemniscate s'exprime donc par une intégrale elliptique de première espèce [1].

113. Intégrales pseudo-elliptiques. — Il arrive quelquefois qu'une intégrale $\int F[x, \sqrt{P(x)}]\,dx$, où $P(x)$ est un polynome du troisième ou du quatrième degré, peut s'exprimer au moyen d'une fonction algébrique et d'une somme de logarithmes de fonctions algébriques, en nombre fini; de pareilles intégrales sont dites *pseudo-elliptiques*. Voici un cas assez étendu où il en est ainsi : *Soit*

$$(10) \qquad Lx'x'' + M(x'+x'') + N = 0$$

une relation d'involution faisant correspondre deux à deux les quatre racines de l'équation du quatrième degré $P(x) = 0$; *si la fonction rationnelle* $f(x)$ *est telle que l'on ait identiquement*

$$(11) \qquad f(x) + f\left(-\frac{Mx+N}{Lx+M}\right) = 0,$$

l'intégrale $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ *est pseudo-elliptique.*

Soient α, β les points doubles de l'involution; la relation (10) peut

---

[1] Cette propriété appartient à toute une classe de courbes découvertes par Serret (*Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 264).

s'écrire, comme on l'a déjà remarqué,

$$(12) \qquad \frac{x'-\alpha}{x'-\beta}+\frac{x''-\alpha}{x''-\beta}=0.$$

Cela étant, faisons dans l'intégrale la substitution $\frac{x-\alpha}{x-\beta}=y$: il vient

$$dx=\frac{(\alpha-\beta)\,dy}{(1-y)^2}, \qquad P(x)=\frac{P_1(y)}{(1-y)^4},$$

et par suite

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}=\frac{(\alpha-\beta)\,dy}{\sqrt{P_1(y)}},$$

$P_1(y)$ étant un polynome du quatrième degré qui ne renferme que les puissances paires de y (n° **112**). Quant à la fraction rationnelle $f(x)$, elle se change en une fraction rationnelle $\varphi(y)$, telle que l'on ait identiquement $\varphi(y)+\varphi(-y)=0$; car, si deux valeurs de x sont liées par la relation (12), les valeurs correspondantes y', y'' de y vérifient la relation $y'+y''=0$. On voit donc que la fonction $\varphi(y)$ est de la forme $y\psi(y^2)$, ψ étant une fonction rationnelle de y^2; l'intégrale proposée devient par conséquent

$$\int\frac{y\psi(y^2)\,dy}{\sqrt{A_0y^4+A_1y^2+A_2}},$$

et il suffit de poser $y^2=z$ pour être ramené à une intégrale élémentaire. La proposition est donc établie, et l'on a de plus le moyen d'effectuer la réduction.

Le théorème est encore vrai, si le polynome $P(x)$ est du troisième degré, pourvu qu'on regarde une des racines de ce polynome comme infinie. La démonstration est tout à fait semblable à la précédente.

Par exemple, si l'équation $P(x)=0$ est une équation réciproque, une des relations d'involution qui permutent les racines deux à deux est $x'x''=1$. Par suite, si une fonction rationnelle $f(x)$ est telle que l'on ait identiquement $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, l'intégrale $\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ est pseudo-elliptique, et il suffit de poser successivement $\frac{x-1}{x+1}=y$, puis $y^2=z$, pour être ramené à une intégrale élémentaire.

Supposons encore que $P(x)$ soit un polynome du troisième degré

$$P(x)=x(x-1)\left(x-\frac{1}{k^2}\right);$$

nous poserons $a=\infty$, $b=0$, $c=1$, $d=\frac{1}{k^2}$. Il existe trois relations d'involution permutant ces racines deux à deux

$$x'=\frac{1}{k^2x''}, \qquad x'=\frac{1-k^2x''}{k^2(1-x'')}, \qquad x'=\frac{1-x''}{1-k^2x''};$$

si donc une fonction rationnelle $f(x)$ satisfait à l'une des relations

$$f(x)+f\left(\frac{1}{k^2x}\right)=0, \qquad f(x)+f\left(\frac{1-k^2x}{k^2(1-x)}\right)=0,$$

$$f(x)+f\left(\frac{1-x}{1-k^2x}\right)=0,$$

l'intégrale

$$\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

est pseudo-elliptique. De celles-là on peut en déduire de nouvelles. Par exemple, en posant $x=z^2$, l'intégrale précédente devient

$$\int\frac{2f(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

et l'on en conclut que cette nouvelle intégrale est aussi pseudo-elliptique, si $f(z^2)$ satisfait à l'une des relations

$$f(z^2)+f\left(\frac{1}{k^2z^2}\right)=0, \qquad f(z^2)+f\left[\frac{1-k^2z^2}{k^2(1-z^2)}\right]=0,$$

$$f(z^2)+f\left(\frac{1-z^2}{1-k^2z^2}\right)=0;$$

le premier cas avait déjà été remarqué par Euler [1].

III. — INTÉGRATION DES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

114. Intégration des fonctions rationnelles de $\sin x$ et de $\cos x$. — On sait que $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment rationnellement au moyen de $\tang\frac{x}{2}=t$ et ce changement de variable permet de ramener le calcul d'une intégrale de la forme

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

à l'intégration d'une fonction rationnelle de t. On a en effet

$$x=2\,\text{arc tang}\,t, \qquad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}, \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

(1) *Voir* le *Cours* lithographié de M. Hermite, 4e édition, pages 25-28.

et l'intégrale proposée devient

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \Phi(t)\,dt,$$

$\Phi(t)$ désignant une fonction rationnelle. On a, par exemple,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log t;$$

et par suite

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left(\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right).$$

L'intégrale $\int \frac{dx}{\cos x}$ se ramène à la précédente en posant $x = \frac{\pi}{2} - y$, ce qui donne

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\log\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] = \log\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right].$$

La méthode précédente a l'avantage d'être générale, mais on peut souvent trouver des changements de variable conduisant plus rapidement au but. Ainsi, lorsque la fonction $f(\sin x, \cos x)$ admet la période π, elle est égale à une fonction rationnelle de $\operatorname{tang} x$, $F(\operatorname{tang} x)$, et, en prenant $\operatorname{tang} x = t$ pour nouvelle variable, il vient

$$\int F(\operatorname{tang} x)\,dx = \int \frac{F(t)\,dt}{1+t^2}.$$

Par exemple, soit à calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{A\cos^2 x + B\sin x\cos x + C\sin^2 x + D},$$

A, B, C, D étant des constantes quelconques. La fonction sous le signe d'intégration admet bien la période π; on a, en posant $\operatorname{tang} x = t$,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin x\cos x = \frac{t}{1+t^2}, \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

et l'intégrale proposée devient

$$\int \frac{dt}{A + Bt + Ct^2 + D(1+t^2)}.$$

La forme de l'intégrale dépendra de la nature des racines du

dénominateur. Si l'on suppose nuls trois des coefficients, on trouve les formules

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x, \qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log(\operatorname{tang} x),$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotang} x.$$

Lorsque la fonction à intégrer est de la forme $R(\sin x)\cos x$, ou de la forme $R(\cos x)\sin x$, le changement de variable est tout indiqué; on posera $\sin x = t$ dans le premier cas et $\cos x = t$ dans le second cas.

Il est quelquefois avantageux de faire un premier changement de variable pour simplifier la fonction sous le signe d'intégration, avant d'appliquer la méthode générale. Soit, par exemple, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c},$$

a, b, c étant trois constantes quelconques. Déterminons un nombre positif ρ et un angle φ par les relations

$$a = \rho\cos\varphi, \qquad b = \rho\sin\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

l'intégrale proposée peut s'écrire

$$\int \frac{dx}{\rho\cos(x - \varphi) + c} = \int \frac{dy}{\rho\cos y + c},$$

en posant $x - \varphi = y$. Si l'on applique maintenant la méthode générale en posant $\operatorname{tang}\frac{y}{2} = t$, l'intégrale devient

$$\int \frac{2\,dt}{\rho + c + (c - \rho)t^2};$$

le calcul s'achève sans difficulté et l'on obtient deux formes différentes pour l'intégrale, suivant le signe de

$$\rho^2 - c^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

On ramène à la précédente l'intégrale

$$\int \frac{m \cos x + n \sin x + p}{a \cos x + b \sin x + c}\, dx.$$

Soit, pour abréger, $u = a \cos x + b \sin x + c$; déterminons trois constantes λ, μ, ν, de façon que l'on ait identiquement

$$m \cos x + n \sin x + p = \lambda u + \mu \frac{du}{dx} + \nu.$$

Nous avons pour cela à résoudre les trois équations

$$m = \lambda a + \mu b, \qquad n = \lambda b - \mu a, \qquad p = \lambda c + \nu,$$

dont les deux premières donnent λ et μ; ces constantes étant choisies de cette façon, l'intégrale proposée peut s'écrire

$$\int \frac{\lambda u + \mu \frac{du}{dx} + \nu}{u}\, dx = \lambda x + \mu \log u + \nu \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}.$$

Exemple. — Soit à calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + e \cos x}, \qquad \text{où} \qquad |e| < 1.$$

Considérons d'abord l'intégrale indéfinie; on trouve successivement

$$\int \frac{dx}{1 + e \cos x} = 2 \int \frac{dt}{1 + e + (1 - e) t^2} = \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \int \frac{du}{1 + u^2},$$

en posant d'abord $\operatorname{tang} \frac{x}{2} = t$, puis $t = u \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$. L'intégrale indéfinie est donc égale à

$$\frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arc\,tang} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tang} \frac{x}{2} \right).$$

Lorsque x varie de 0 à π, $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \frac{x}{2}$ croît de 0 à $+\infty$, et l'arc tang varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. L'intégrale définie cherchée est donc égale à $\frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}}$.

115. Formules de réduction. — Pour certaines catégories d'intégrales, on peut appliquer aussi des formules de réduction. Par exemple, la formule qui donne la dérivée de $\operatorname{tang}^{n-1} x$ peut

s'écrire

$$\frac{d}{dx}(\text{tang}^{n-1}x) = (n-1)\,\text{tang}^{n-2}x\,(1+\text{tang}^2 x)$$

et l'on en déduit

$$\int \text{tang}^n x\,dx = \frac{\text{tang}^{n-1}x}{n-1} - \int \text{tang}^{n-2}x\,dx.$$

L'exposant de $\text{tang}\,x$ sous le signe d'intégration est diminué de deux unités. En continuant de la sorte, on sera ramené à l'une des deux intégrales

$$\int dx = x, \qquad \int \text{tang}\,x\,dx = -\log(\cos x).$$

Il existe une formule de réduction analogue pour les intégrales $\int \cot^n x\,dx$,

$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int \cot^{n-2}x\,dx.$$

D'une façon plus générale, considérons l'intégrale

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

où m et n sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Lorsque l'un de ces nombres est impair, il y a avantage à employer un des changements de variable indiqués plus haut. Si, par exemple, $n = 2p+1$, on posera $\sin x = t$ et l'on sera ramené au calcul de l'intégrale $\int t^m(1-t^2)^p\,dt$.

Bornons-nous au cas où m et n sont pairs tous les deux, c'est-à-dire aux intégrales

$$I_{m,n} = \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx.$$

On peut écrire cette intégrale

$$I_{m,n} = \int \sin^{2m-1} x \cos^{2n} x \sin x\,dx$$

et intégrer par parties, en considérant $\cos^{2n}x \sin x\,dx$ comme la

différentielle de $\frac{-1}{2n-1}\cos^{2n+1}x$, ce qui donne

$$I_{m,n} = -\sin^{2m-1}x\,\frac{\cos^{2n+1}x}{2n+1} + \frac{2m-1}{2n+1}\int \sin^{2m-2}x\cos^{2n}x(1-\sin^2x)\,dx,$$

formule que l'on peut encore écrire

$$\text{(A)}\qquad I_{m,n} = -\frac{\sin^{2m-1}x\cos^{2n+1}x}{2(m+n)} + \frac{2m-1}{2(m+n)}\,I_{m-1,n};$$

cette formule permet de diminuer l'exposant m, sans changer le second exposant. Si m est négatif, on aura une formule analogue obtenue en résolvant la relation (A) par rapport à $I_{m-1,n}$ et remplaçant m par $1-m$,

$$\text{(B)}\qquad I_{-m,n} = \frac{\sin^{1-2m}x\cos^{2n+1}x}{1-2m} + \frac{2(n-m+1)}{1-2m}\,I_{1-m,n}.$$

On a des formules toutes pareilles pour réduire l'exposant de $\cos x$.

$$\text{(C)}\qquad I_{m,n} = \frac{\sin^{2m+1}x\cos^{2n-1}x}{2(m+n)} + \frac{2n-1}{2(m+n)}\,I_{m,n-1},$$

$$\text{(D)}\qquad I_{m,-n} = -\frac{\sin^{2m+1}x\cos^{1-2n}x}{1-2n} + \frac{2(m+1-n)}{1-2n}\,I_{m,-n+1}.$$

En appliquant ces formules de réduction autant de fois qu'il est nécessaire, on ramènera chacun des nombres m et n à être nul. On ne pourrait être arrêté dans le courant du calcul que si l'on arrivait à une intégrale $I_{m,n}$ où $m+n=0$, c'est-à-dire à une des intégrales pour lesquelles on a établi une formule de réduction au début de ce paragraphe.

116. Formule de Wallis. — Il existe aussi des formules de réduction, quelle que soit la parité des exposants m et n.

Proposons-nous, par exemple, de calculer l'intégrale définie

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx,$$

où m est un nombre entier positif. Nous pouvons écrire, en intégrant par

parties

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}x \sin x\, dx = -[\cos x \sin^{m-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\cos^2 x\, dx,$$

ou encore, en remarquant que $\cos x \sin^{m-1} x$ s'annule aux deux limites,

$$I_m = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x(1-\sin^2 x)dx = (m-1)(I_{m-2} - I_m),$$

ce qui conduit à la formule de récurrence

$$(13) \qquad I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

En continuant de la sorte, on sera ramené soit à l'intégrale $I_0 = \frac{\pi}{2}$, si m est pair, soit à l'intégrale $I_1 = 1$, si m est impair. Prenons le premier cas, $m = 2p$; en remplaçant successivement m par 2, 4, 6, ... $2p$ dans la formule (13), il vient

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0, \qquad I_4 = \frac{3}{4} I_2, \qquad \ldots, \qquad I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2},$$

et, en multipliant membre à membre toutes ces égalités, il reste

$$I_{2p} = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots2p}\frac{\pi}{2}.$$

On trouve de même

$$I_{2p+1} = \frac{2.4.6\ldots2p}{1.3.5\ldots(2p+1)}.$$

On peut déduire de là une formule curieuse due à Wallis. Il est clair que l'intégrale I_m diminue quand m augmente, car $\sin^{m+1}x$ est plus petit que $\sin^m x$, et nous pouvons écrire

$$I_{2p+1} < I_{2p} < I_{2p-1};$$

remplaçons I_{2p+1}, I_{2p}, I_{2p-1} par les valeurs précédentes, nous trouvons les deux nouvelles inégalités

$$H_p > \frac{\pi}{2} > H_p \frac{2p}{2p+1},$$

en posant, pour abréger,

$$H_p = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2p-2}{2p-1}\cdot\frac{2p}{2p-1}.$$

Le rapport $\frac{\pi}{2H_p}$ a donc pour limite l'unité lorsque p augmente indéfiniment, c'est-à-dire que $\frac{\pi}{2}$ est la limite du produit H_p lorsque le nombre

des facteurs augmente indéfiniment. La loi de succession des facteurs de ce produit est d'ailleurs évidente.

117. Des intégrales $\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\ldots dx$. — Considérons un produit d'un nombre quelconque de facteurs de la forme $\cos(ax+b)$, a et b étant des constantes, et un même facteur pouvant figurer plusieurs fois dans le produit. La formule

$$\cos u \cos v = \frac{\cos(u+v)}{2} + \frac{\cos(u-v)}{2}$$

remplace un produit de deux facteurs de cette espèce par une somme de deux cosinus de fonctions linéaires de x, et un produit de n facteurs par la somme de deux produits de $(n-1)$ facteurs. En appliquant la même formule autant de fois qu'il est nécessaire, on arrivera à remplacer le produit considéré par une somme telle que $\Sigma H \cos(Ax+B)$, dont chaque terme s'intègre immédiatement; si A n'est pas nul, on a

$$\int \cos(Ax+B)\,dx = \frac{\sin(Ax+B)}{A} + C,$$

et, dans le cas particulier où $A=0$, $\int \cos B\,dx = x\cos B + C$.

Cette transformation s'applique en particulier aux produits

$$\cos^m x \sin^n x,$$

que l'on peut écrire

$$\cos^m x \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

lorsque m et n sont deux nombres entiers positifs; en appliquant le procédé précédent, on remplace ce produit par une somme de sinus et de cosinus de multiples de l'arc, et l'intégration est immédiate.

Soit, par exemple, à calculer l'aire de la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

nous pouvons poser $x = a\cos^3\theta$, $y = b\sin^3\theta$, et nous obtiendrons toute la courbe en faisant varier θ de 0 à 2π.

La formule qui donne l'aire d'une courbe fermée

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{(C)} x\,dy - y\,dx,$$

devient ici

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \frac{3ab}{2} \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta;$$

mais on a

$$(\sin\theta\cos\theta)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta),$$

et l'aire cherchée a pour valeur

$$\mathcal{A} = \frac{3ab}{16}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi ab}{8}.$$

Citons encore les intégrales

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C,$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\,dx = -\frac{3\cos x}{4} + \frac{\cos 3x}{12} + C,$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8}\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C,$$

. . . .

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C,$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\,dx = \frac{3\sin x}{4} + \frac{\sin 3x}{12} + C,$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8}\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C,$$

. . . .

On peut remarquer sur ces formules une loi qui est générale. Les intégrales $F(x) = \int_0^x \sin^n x\,dx$ et $\Phi(x) = \int_0^x \cos^n x\,dx$ sont périodiques et admettent la période 2π lorsque n est impair, tandis que, si n est pair, ces intégrales augmentent d'une quantité constante positive lorsque x augmente de 2π. Cette propriété était évidente *a priori;* on a en effet

$$F(x + 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx + \int_{2\pi}^{2\pi+x} \sin^n x\,dx,$$

ou encore, à cause de la périodicité de $\sin x$,

$$F(x+2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx + \int_0^x \sin^n x\,dx = F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx.$$

Lorsque n est pair, il est évident que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx$ est une quantité positive, tandis que cette intégrale est nulle, si n est impair, comme il résulte de la relation $\sin(x+\pi) = -\sin x$.

Remarque. — A cause de la grande variété de transformations auxquelles se prêtent les fonctions circulaires, il est souvent commode de les introduire pour le calcul de certaines intégrales. Ainsi reprenons l'intégrale $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; si l'on y pose $x = \operatorname{tang}\varphi$, elle se change en $\int \cos\varphi\,d\varphi = \sin\varphi + C$, et l'on en déduit, en revenant à la variable x,

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C,$$

comme on l'a déjà obtenu directement (n° 105).

118. Les intégrales $\int R(x)e^{\omega x}\,dx$. — Considérons maintenant les intégrales de la forme $\int R(x)e^{\omega x}\,dx$, où $R(x)$ est une fonction rationnelle de x. Supposons que l'on décompose la fonction $R(x)$, comme on l'a déjà fait plusieurs fois,

$$R(x) = E(x) + \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} + \ldots + \frac{A_p}{X_p^p},$$

$E(x)$, A_1, A_2, ..., A_p, X_1, ..., X_p étant des polynomes, et le polynome X_i étant premier avec sa dérivée. L'intégrale proposée est alors égale à l'intégrale $\int E(x)e^{\omega x}\,dx$, que l'on a appris à calculer (n° 85) par une suite d'intégrations par parties, augmentée d'une somme d'intégrales de la forme

$$\int \frac{A\,e^{\omega x}\,dx}{X^n}.$$

Si n est plus grand que l'unité, on peut appliquer une formule

de réduction. En effet, le polynome X étant premier avec sa dérivée, déterminons deux polynomes λ et μ tels que l'on ait identiquement $A = \lambda X + \mu X'$; il vient alors

$$\int \frac{A e^{\omega x}\,dx}{X^n} = \int \frac{\lambda e^{\omega x}\,dx}{X^{n-1}} + \int \frac{\mu X' e^{\omega x}}{X^n}\,dx.$$

Une intégration par parties donne ensuite

$$\int \mu e^{\omega x} \frac{X'\,dx}{X^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{\mu e^{\omega x}}{X^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^{\omega x}(\mu' + \mu\omega)}{X^{n-1}}\,dx,$$

et, en réunissant les deux formules, on voit que le calcul de l'intégrale considérée est ramené au calcul d'une intégrale de même espèce où l'exposant n est diminué d'une unité. En continuant de la sorte on est conduit à une intégrale

$$\int \frac{B e^{\omega x}}{X}\,dx,$$

où l'on peut toujours supposer le polynome B premier avec X et de degré inférieur à celui de X. On ne peut plus appliquer à cette intégrale le procédé de réduction; mais, si l'on connaît les racines de $X = 0$, on peut ramener cette intégrale à une seule transcendante nouvelle. Supposons, pour fixer les idées, toutes les racines réelles; l'intégrale se décompose en plusieurs intégrales de la forme

$$\int \frac{\alpha e^{\omega x}}{x - a}\,dx,$$

que l'on peut ramener à l'une ou l'autre des formes suivantes, en posant $x = a + \frac{y}{\omega}$, $u = e^y$, et faisant abstraction d'un facteur constant,

$$\int \frac{e^y\,dy}{y}, \qquad \int \frac{du}{\log u}.$$

Cette dernière intégrale $\int \frac{du}{\log u}$ est une fonction transcendante qu'on appelle *logarithme intégral*.

119. Intégrales diverses. — Considérons encore les intégrales

$$\int e^{ax} f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

où f est une fonction *entière* de $\sin x$ et de $\cos x$. Un terme quel-

conque de cette intégrale est de la forme

$$\int e^{ax} \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

m et n étant des nombres entiers et positifs. D'après une remarque déjà faite, le produit $\sin^m x \cos^n x$ peut être remplacé par une somme de sinus ou de cosinus de multiples de x, et l'on n'a en définitive que deux types d'intégrales à étudier

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \qquad \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

En intégrant par parties chacune de ces intégrales, il vient

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx,$$

et l'on tire de ces relations

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2},$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}.$$

Parmi les intégrales que l'on peut ramener aux précédentes, citons encore les types suivants :

$$\int f(\log x) x^m \, dx, \qquad \int f(\text{arc} \sin x) \, dx,$$

$$\int f(x) \, \text{arc} \sin x \, dx, \qquad \int f(x) \, \text{arc tang} x \, dx,$$

où f désigne une fonction entière. Dans les deux premières, on prendra pour nouvelle variable $\log x$ ou $\text{arc} \sin x$; dans les deux dernières, on appliquera d'abord une intégration par parties en considérant $f(x) dx$ comme la différentielle d'un polynome $F(x)$, ce qui conduira à des types déjà étudiés.

EXERCICES.

1. Calculer les intégrales indéfinies des fonctions suivantes

$$\frac{1}{(x^4+1)^2}, \quad \frac{1}{x(x^2+1)^3}, \quad \frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}, \quad \frac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}},$$

$$\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{1+\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[3]{1-x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x(x+1)}}, \quad \frac{x}{\cos^2 x},$$

$$xe^x \cos x, \quad \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a+x^{n+2}}}, \quad x^\mu \operatorname{tang} x,$$

où μ est un nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$.

2. Trouver l'aire de la boucle du folium de Descartes

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

3. Calculer l'intégrale $\int y\,dx$, x et y étant liés par l'une des relations

$$(x^2-a^2)^2-ay^2(2y+3a)=0, \qquad y^2(a-x)=x^3,$$

$$y(x^2+y^2)=a(y^2-x^2).$$

4. Établir les formules

$$\int \sin^{n-1}x \cos(n+1)x\,dx = \frac{\sin^n x \cos nx}{n}+C,$$

$$\int \sin^{n-1}x \sin(n+1)x\,dx = \frac{\sin^n x \sin nx}{n}+C,$$

$$\int \cos^{n-1}x \cos(n+1)x\,dx = \frac{\cos^n x \sin nx}{n}+C,$$

$$\int \cos^{n-1}x \sin(n+1)x\,dx = -\frac{\cos^n x \cos nx}{n}+C.$$

(Euler.)

5. Calculer les intégrales pseudo-elliptiques

$$\int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}, \quad \int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

6. Ramener aux intégrales elliptiques les intégrales

$$\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^6)+bx(1+x^4)+cx^2(1+x^2)+dx^3}},$$

$$\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^8)+bx^2(1+x^4)+cx^4}},$$

où $R(x)$ désigne une fonction rationnelle.

*7. Soient a, b, c, d les racines d'une équation du quatrième degré $P(x)=0$. Il existe trois relations d'involution

$$x' = -\frac{M_i x'' + N_i}{L_i x'' + M_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

permutant ces racines deux à deux. Si une fonction rationnelle $f(x)$ est telle que l'on ait identiquement

$$f(x) + \sum_{i=1}^{3} f\left(-\frac{M_i x + N_i}{L_i x + M_i}\right) = 0,$$

l'intégrale $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ est pseudo-elliptique (voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. XV, p. 106).

8. La rectification des courbes $y = Ax^{\mu}$ conduit à des intégrales de différentielles binomes. Cas d'intégrabilité.

9. On a, en supposant $a > 1$,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

En déduire les intégrales définies

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\pi.$$

10. On a, en supposant $AC - B^2 > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,\pi\,\frac{A^{n-1}}{(AC-B^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

On applique la formule de réduction du n° 104.

11. Calculer l'intégrale définie $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{1+2a\cos x+a^2}$.

12. Établir les formules

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \log\left(\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}\right) \qquad (\alpha\beta > 0),$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)\,dx}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}.$$

***13.** On a, en désignant par m et n deux entiers positifs ($m < n$),

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}}.$$

On emploie la décomposition en fractions rationnelles.

14. Déduire de la formule qui précède la relation

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1).$$

15. On a, en posant $I_{p,q} = \int t^q (t+1)^p\,dt$, les formules de réduction

$$(p+q+1)I_{p,q} = t^{q+1}(t+1)^p + p\,I_{p-1,q},$$
$$(p-1)I_{-p,q} = t^{q+1}(t+1)^{1-p} - (2+q-p)I_{-p+1,q},$$

et deux formules analogues pour réduire l'exposant q.

16. Établir des formules de réduction pour le calcul des intégrales

$$I_n = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}, \qquad Z_m = \int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

***17.** Établir une formule de réduction pour les intégrales définies $\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. En déduire une formule analogue à celle de Wallis pour l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

18. L'intégrale définie $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$ a-t-elle une valeur finie?

19. L'aire d'un secteur elliptique compris entre l'axe focal et un rayon vecteur issu du foyer a pour expression

$$\mathcal{A} = \frac{p^2}{2}\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{(1+e\cos\omega)^2},$$

p désignant le paramètre $\frac{b^2}{a}$ et e l'excentricité. En posant suivant la méthode générale $\tang\frac{\omega}{2} = t$, puis, $t = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,u$, on trouve

$$\mathcal{A} = ab\left(\text{arc tang}\, u - e\,\frac{u}{1+u^2}\right).$$

Démontrer que cette expression peut aussi s'écrire

$$\mathcal{A} = \frac{ab}{2}(\varphi - e\sin\varphi),$$

φ désignant l'anomalie excentrique.

20. Trouver les courbes telles que la longueur NT ou l'aire du triangle MNT soit constante (voir *fig.* 3, p. 36). On construira les deux branches de la courbe.

[*Licence :* Paris, 1880; Toulouse, 1882.]

*21. Soit $A_n = \frac{x^{2n+1}}{2.4.6\ldots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz\, dz$.

Démontrer la loi de récurrence

$$A_{n+1} = (2n+1)A_n - x\frac{dA_n}{dx}.$$

On déduit de là les formules

$$A_{2p} = U_{2p}\sin x + V_{2p}\cos x,$$
$$A_{2p+1} = U_{2p+1}\sin x + V_{2p+1}\cos x,$$

où U_{2p}, V_{2p}, U_{2p+1}, V_{2p+1} sont des polynomes à coefficients entiers, U_{2p}, U_{2p+1} ne renfermant que les puissances paires de x. On vérifie que la loi est vraie pour $n=1$, et l'on en déduit qu'elle est générale au moyen de la formule de récurrence.

Cette expression de A_{2p} permet de démontrer que π^2 est incommensurable. Si l'on avait $\frac{\pi^2}{4} = \frac{b}{a}$, en remplaçant x par $\frac{\pi}{2}$ dans A_{2p}, on aurait une relation de la forme

$$H_1 = a^p\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{2p}}{2.4.6\ldots 4p}\int_0^1 (1-z^2)^{2p}\cos\frac{\pi z}{2}\,dz,$$

H_1 étant un nombre entier. Une telle égalité est impossible, car le second membre tend vers zéro lorsque p augmente indéfiniment.

CHAPITRE VI.

INTÉGRALES DOUBLES.

I. — INTÉGRALES DOUBLES. — PROCÉDÉS DE CALCUL. FORMULE DE GREEN.

120. **Fonctions continues de deux variables.** — Soit $z = f(x, y)$ une fonction continue des deux variables indépendantes x et y, à l'intérieur d'une portion du plan A limitée par un contour fermé C, et sur ce contour lui-même. On peut établir pour cette fonction une série de propositions analogues à celles qui ont été démontrées pour les fonctions continues d'une seule variable (n° 70). Ainsi, *étant donné un nombre positif* ε, *on peut décomposer la portion* A *du plan en parties plus petites de telle façon que la différence des valeurs de* z *pour deux points* (x, y), (x', y') *d'une même partie soit toujours moindre que* ε.

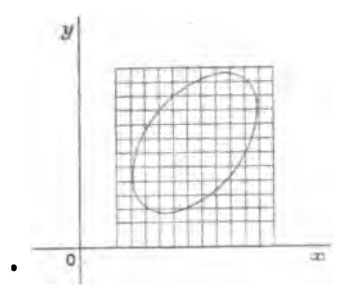
Nous procéderons toujours par subdivisions successives, de la façon suivante. Imaginons la portion A du plan décomposée par des parallèles à l'axe des x et à l'axe des y, la distance de deux parallèles voisines étant égale à δ; de ces portions de A, les unes sont des carrés de côté δ situés tout entiers à l'intérieur de C, les autres des portions de carrés limitées en partie par des arcs du contour C. Cela posé, si la proposition énoncée n'était pas exacte pour la portion A, il en serait de même pour une au moins des nouvelles portions du plan A_1; en subdivisant de la même façon la portion A_1 et ainsi de suite, on formerait une suite de carrés ou de portions de carrés

$$A, A_1, \ldots, A_n, \ldots,$$

pour lesquels la proposition énoncée serait inexacte. La portion A_n est tout entière comprise entre deux parallèles $x = a_n$, $x = b_n$ à l'axe des y et entre deux parallèles $y = c_n$, $y = d_n$ à

l'axe des x. Lorsque n augmente indéfiniment, a_n et b_n ont une limite commune λ; c_n et d_n ont de même une limite commune μ. Car les a_n, par exemple, ne vont jamais en décroissant et sont

Fig. 23.



tous plus petits qu'un nombre fixe. Tous les points de A_n tendent vers un point limite M, de coordonnées (λ, μ), situé à l'intérieur du contour C ou sur ce contour lui-même. Le raisonnement s'achève comme plus haut (n° 70); si le théorème énoncé était inexact, la fonction $f(x, y)$ ne pourrait être continue pour $x = \lambda$, $y = \mu$, contrairement à l'hypothèse.

Corollaire. — Supposons qu'on ait pris les parallèles assez rapprochées pour que la différence des valeurs de z pour deux points appartenant à une même partie soit moindre en valeur absolue que $\frac{\varepsilon}{2}$, et soit η la distance de deux parallèles voisines. Soient (x, y), (x', y') deux points pris à l'intérieur ou sur le contour C, dont la distance est inférieure à η. Ces deux points appartiennent à une même portion de A ou à deux portions ayant un sommet commun; dans les deux cas, la différence

$$f(x, y) - f(x', y')$$

ne peut être supérieure en valeur absolue à $2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc, *à tout nombre positif* ε *on peut faire correspondre un autre nombre positif* η *tel que l'on ait*

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon,$$

pourvu que la distance des deux points $M(x, y)$ *et* $M'(x', y')$, *pris dans* A *ou sur le contour* C, *soit moindre que* η. En d'autres

termes, toute fonction continue dans A est *uniformément continue.*

De la proposition précédente on déduit, comme plus haut (n° 70), que toute fonction continue dans A est nécessairement *finie* dans A. Soit M la limite supérieure et m la limite inférieure; la différence $\Delta = M - m$ s'appelle encore l'*oscillation.* La méthode des subdivisions successives permet de démontrer que la fonction z atteint au moins une fois chacune des valeurs M et m pour des points à l'intérieur de C ou sur ce contour lui-même. Soient a un point pour lequel on a $z = m$, et b un point pour lequel $z = M$. Joignons a et b par une ligne polygonale tout entière intérieure à C. Lorsque le point (x, y) décrit cette ligne, z est une fonction continue de la distance du point (x, y) au point a; elle passe donc au moins une fois par toute valeur μ comprise entre m et M (n° 70). Comme on peut joindre a et b par une infinité de lignes polygonales, on voit que la fonction $f(x, y)$ prend une valeur μ comprise entre m et M pour une infinité de points intérieurs au contour C.

Nous dirons, pour abréger, qu'une portion finie du plan A est inférieure à l dans toutes ses dimensions, s'il est possible de trouver un cercle de diamètre l renfermant A à l'intérieur. Une portion variable du plan sera dite *infiniment petite* dans toutes ses dimensions, s'il est possible de trouver un cercle de rayon aussi petit qu'on le voudra renfermant cette portion du plan à l'intérieur. Par exemple, un carré dont le côté tend vers zéro ou une ellipse dont les deux axes tendent vers zéro sont infiniment petits dans toutes leurs dimensions. Au contraire, un rectangle dont un seul côté tend vers zéro, ou une ellipse dont un seul axe tend vers zéro, ne sont pas infiniment petits dans toutes leurs dimensions.

121. Intégrales doubles. — La portion A du plan étant divisée en parties plus petites $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'une façon arbitraire, soient ω_i l'aire de la portion a_i, M_i et m_i les limites de $f(x, y)$ dans cette portion a_i. Considérons les deux sommes

$$S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i M_i, \qquad s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i m_i;$$

à chaque subdivision de A correspond ainsi une somme supérieure S et une somme inférieure s. Toutes les sommes S sont évidemment supérieures à $m\Omega$, en désignant par Ω l'aire de la portion du plan A; elles ont donc une limite inférieure I. De même, toutes les sommes s sont inférieures à $M\Omega$; elles ont donc une limite supérieure I′. D'ailleurs, une somme supérieure quelconque est plus grande qu'une autre somme inférieure également quelconque (on le démontre comme au n° 71). On a donc

$$I \geqq I'.$$

Si la fonction $f(x, y)$ est continue, les sommes S et s ont une limite commune lorsque les aires partielles diminuent indéfiniment dans toutes leurs dimensions. Supposons en effet que l'on ait pris un nombre positif η tel que l'oscillation de la fonction soit moindre que ε dans toute portion de A dont toutes les dimensions sont inférieures à η. Si toutes les portions $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont de dimensions inférieures à η, chacune des différences $M_i - m_i$ sera inférieure à ε et la différence $S - s$ sera elle-même moindre que $\varepsilon\Omega$, en désignant par Ω l'aire totale de la portion A du plan. Mais on a

$$S - s = S - I + I - I' + I' - s,$$

et aucun des nombres $S - I$, $I - I'$, $I' - s$ ne peut être négatif. On a donc en particulier $I - I' < \varepsilon\Omega$; et, comme ε est un nombre positif arbitraire, il faut que l'on ait $I' = I$. Les différences $S - I$, $I - s$ peuvent elles-mêmes être rendues plus petites que tout nombre donné à l'avance, en prenant ε assez petit. Les sommes S et s ont donc une limite commune I, que l'on appelle l'*intégrale double* de la fonction $f(x, y)$ étendue à l'aire A. On la représente par la notation

$$I = \iint_{(A)} f(x, y)\, dx\, dy,$$

et la portion A du plan est le *champ d'intégration*.

Soit (ξ_i, η_i) un point quelconque à l'intérieur ou sur le contour de la portion a_i; il est clair que la somme $\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\omega_i$ est comprise entre les deux sommes S et s; elle a donc aussi pour limite l'intégrale double, quelle que soit la façon dont on choisit le point (ξ_i, η_i).

Le premier théorème de la moyenne s'étend sans difficulté aux intégrales doubles. Soient $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ deux fonctions continues dont l'une $\varphi(x, y)$ garde un signe constant dans A; nous supposerons, par exemple, $\varphi(x, y) > 0$. Si M et m sont les limites de $f(x, y)$ dans A, il est clair que l'on a

$$M\varphi(\xi_i, \eta_i)\omega_i > f(\xi_i, \eta_i)\varphi(\xi_i, \eta_i)\omega_i > m\varphi(\xi_i, \eta_i)\omega_i;$$

en ajoutant toutes ces inégalités, et passant à la limite, on en conclut que l'on a

$$\int\int_{(A)} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx\,dy = \mu\int\int_{(A)} \varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

μ étant compris entre M et m. La fonction $f(x, y)$ étant continue prend la valeur μ pour un point (ξ, η) *intérieur* au contour C et l'on peut encore écrire

$$(1)\qquad \int\int_{(A)} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta)\int\int_{(A)} \varphi(x, y)\,dx\,dy;$$

c'est la formule de la moyenne pour les intégrales doubles. Si par exemple $\varphi(x, y) = 1$, l'intégrale $\int\int dx\,dy$, étendue à la portion du plan A, est évidemment égale à l'aire Ω de cette portion du plan, et la formule (1) devient

$$(2)\qquad \int\int_{(A)} f(x, y)\,dx\,dy = \Omega f(\xi, \eta).$$

122. Volumes. — A la notion analytique de l'intégrale double se rattache une notion géométrique importante, celle du volume. Soit $f(x, y)$ une fonction continue à l'intérieur d'un contour fermé C, et sur ce contour lui-même; nous supposerons de plus, pour fixer les idées, cette fonction constamment positive. Soit S la surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$, et limitée par une courbe Γ qui se projette orthogonalement suivant le contour C sur le plan des xy; nous appellerons E la portion de l'espace limitée par le plan des xy, la surface S et le cylindre qui a C pour section droite. La portion A du plan des xy, intérieure au contour C, étant divisée en portions plus petites d'une façon arbitraire, soit a_i l'une de ces portions limitée par un contour c_i et ω_i l'aire de cette portion. Le cylindre qui a pour section droite

la courbe c_i découpe sur S une portion de surface s_i limitée par une courbe γ_i. Soient p_i et P_i les points de s_i dont la distance au plan $z = 0$ est minimum ou maximum ; si par ces points on mène deux plans parallèles au plan $z = 0$, on forme deux cylindres droits ayant même base ω_i et pour hauteurs respectives les limites m_i et M_i de $f(x, y)$ à l'intérieur du contour c_i. Les volumes V_i et v_i de ces deux cylindres sont respectivement ([1]) $\omega_i M_i$ et $\omega_i m_i$. Les sommes S et s considérées précédemment représentent donc respectivement les sommes ΣV_i et Σv_i de ces deux espèces de cylindres. Nous appellerons *volume* de la portion E de l'espace la limite commune vers laquelle tendent ces deux sommes. On peut remarquer, comme on l'a déjà fait à propos de l'aire (n° 78), que cette définition est bien d'accord avec l'idée commune que l'on a d'un volume.

Si la surface S était en partie au-dessous du plan des xy, l'intégrale double représenterait encore un volume, à la condition d'affecter du signe — les volumes des portions de l'espace situées au-dessous du plan des xy. On voit que toute intégrale double représente une somme algébrique de volumes, comme une intégrale simple représente une somme algébrique d'aires. Les limites de l'intégrale simple sont remplacées par le contour qui limite le champ d'intégration.

123. Calcul d'une intégrale double. — Le calcul d'une intégrale double se ramène au calcul de deux intégrales simples prises successivement. Prenons d'abord le cas où le champ d'intégration est un rectangle R, limité par les droites $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$, où $x_0 < X$, $y_0 < Y$. Imaginons ce rectangle décomposé en rectangles plus petits par des parallèles aux deux axes de coordonnées $x = x_i$, $y = y_k$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$). L'aire du rectangle élémentaire R_{ik}, limité par les droites $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = y_{k-1}$, $y = y_k$ a pour expression

$$(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}),$$

([1]) Nous appelons *volume d'un cylindre droit* la limite vers laquelle tend le volume d'un prisme droit de même hauteur ayant pour base un polygone inscrit dans la section droite de ce cylindre, lorsque le nombre des côtés du polygone augmente indéfiniment.

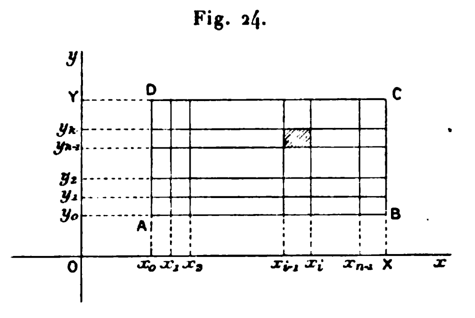
et l'intégrale double cherchée est la limite de la somme

$$(3)\qquad S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_{ik}, \eta_{ik})(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}),$$

où (ξ_{ik}, η_{ik}) sont les coordonnées d'un point quelconque pris à l'intérieur ou sur les côtés du rectangle R_{ik}.

Nous allons profiter de l'indétermination de ces points (ξ_{ik}, η_{ik})

Fig. 24.



pour simplifier le calcul. Remarquons pour cela que, si une fonction $f(x)$ est continue dans un intervalle (a, b), et si l'on subdivise (a, b) en intervalles partiels d'une façon arbitraire par des points de division $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, on peut choisir dans chaque intervalle (x_{i-1}, x_i) une valeur ξ_i de telle façon que l'on ait

$$(4)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(b - x_{n-1});$$

il suffit, en effet, d'appliquer la formule de la moyenne à chacun des intervalles (a, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{n-1}, b).

Cela étant, la portion de la somme S qui provient de la file de rectangles comprise entre les deux droites $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, a pour expression

$$(x_i - x_{i-1})[f(\xi_{i1}, \eta_{i1})(y_1 - y_0) + f(\xi_{i2}, \eta_{i2})(y_2 - y_1) + \ldots \\ + f(\xi_{ik}, \eta_{ik})(y_k - y_{k-1}) + \ldots].$$

Nous prendrons $\xi_{i1} = \xi_{i2} = \ldots = \xi_{im} = x_{i-1}$, et nous choisirons η_{i1}, η_{i2}, $\ldots$, de telle façon que la somme

$$f(x_{i-1}, \eta_{i1})(y_1 - y_0) + f(x_{i-1}, \eta_{i2})(y_2 - y_1) + \ldots$$

soit égale à l'intégrale $\int_{y_0}^{Y} f(x_{i-1}, y)\,dy$, l'intégrale étant prise en regardant x_{i-1} comme constant. Si nous opérons de même avec toutes les files de rectangles comprises entre deux parallèles voisines à Oy, nous pouvons écrire

$$(5)\quad S = \Phi(x_0)(x_1 - x_0) + \Phi(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \Phi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \ldots,$$

en posant, pour abréger,

$$\Phi(x) = \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy.$$

Cette fonction $\Phi(x)$, représentée par une intégrale définie, où x est considéré comme un paramètre, est une fonction continue de x; lorsque tous les intervalles $x_i - x_{i-1}$ tendent vers zéro, la formule (5) montre que S a pour limite l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} \Phi(x)\,dx.$$

On a donc pour l'intégrale double cherchée

$$(6)\qquad \iint_{(R)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy;$$

pour avoir la valeur de l'intégrale double, *on doit d'abord intégrer $f(x, y)$ entre les limites y_0 et Y, en y regardant x comme constant et y comme variable : le résultat est une fonction de la seule variable x, que l'on doit intégrer de nouveau entre les limites x_0 et X.*

En opérant dans l'ordre inverse, c'est-à-dire en évaluant d'abord la portion de S provenant d'une file de rectangles comprise entre deux parallèles à Ox, on trouverait de même

$$\iint_{(R)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx,$$

et le rapprochement de ces deux formules permet d'écrire

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx;$$

le théorème exprimé par cette formule s'appelle le *théorème d'intégration sous le signe $\int$*. La démonstration suppose essen-

tiellement que les limites x_0, X, y_0, Y sont des constantes et que la fonction $f(x, y)$ est continue dans le champ d'intégration.

Exemple. — Soit $z = \frac{xy}{a}$. La formule générale nous donne

$$\iint_{(R)} \frac{xy}{a}\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \frac{xy}{a}\,dy$$
$$= \int_{x_0}^{X} \frac{x}{2a}(Y^2 - y_0^2)\,dx = \frac{1}{4a}(X^2 - x_0^2)(Y^2 - y_0^2).$$

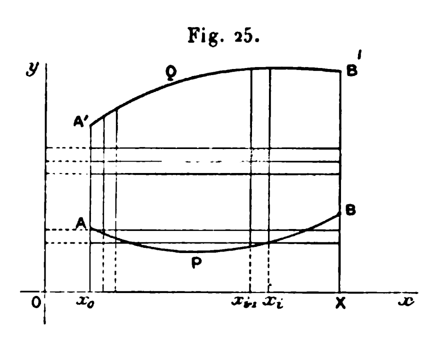
D'une façon générale, lorsque la fonction $f(x, y)$ est le produit d'une fonction de la seule variable x par une fonction de la seule variable y, on a

$$\iint_{(R)} \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx \times \int_{y_0}^{Y} \psi(y)\,dy;$$

les deux intégrales du second membre sont absolument indépendantes l'une de l'autre.

124. Passons maintenant au cas où le champ d'intégration est limité par un contour de forme quelconque. Nous supposerons d'abord que ce contour n'est rencontré qu'en deux points par une

Fig. 25.



parallèle à Oy. On peut alors le supposer formé par deux droites $x = a$, $x = b (a < b)$, deux arcs de courbe APB, A'QB' représentés par les deux équations $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, les fonctions φ_1 et φ_2 étant continues entre a et b; il pourrait d'ailleurs se faire que les points A et A' se confondent, ainsi que B et B'; c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si le contour était une courbe

convexe, analogue à une ellipse. Décomposons encore le champ d'intégration R en parties plus petites par des parallèles aux axes; nous aurons d'abord des parties *régulières*, qui seront des rectangles intérieurs au contour, et en outre des parties *irrégulières*, c'est-à-dire des portions de rectangle, limitées en partie par des arcs du contour. Nous avons encore à chercher la limite de la somme

$$S = \Sigma f(\xi, \eta)\omega,$$

ω étant l'aire d'un quelconque de ces éléments, et (ξ, η) un point pris dans cet élément.

Évaluons d'abord la portion de S provenant d'une file d'éléments compris entre les deux parallèles voisines $x = x_{i-1}$, $x = x_i$. On a d'abord entre ces droites des rectangles allant du sommet d'ordonnée $y'_1 \geqq y_1$ au sommet d'ordonnée $y'_2 \leqq y_2$, puis des parties irrégulières. En prenant convenablement le point (ξ, η) dans chaque rectangle, on verra comme tout à l'heure que la portion de S provenant de ces rectangles peut s'écrire

$$(x_i - x_{i-1}) \int_{y'_1}^{y'_2} f(x_{i-1}, y)\, dy.$$

Supposons que l'oscillation des deux fonctions φ_1 et φ_2 dans chacun des intervalles (x_{i-1}, x_i) soit moindre que δ, ainsi que toutes les différences $(y_k - y_{k-1})$. L'aire des parties irrégulières comprises entre $x = x_{i-1}$ et $x = x_i$ est alors, comme on le voit aisément, inférieure à $4\delta(x_i - x_{i-1})$, et la portion de S provenant de ces parties est moindre en valeur absolue que $4H\delta(x_i - x_{i-1})$, H étant la limite supérieure de la valeur absolue de $f(x, y)$ dans le champ d'intégration. D'autre part, on peut écrire

$$\int_{y'_1}^{y'_2} f(x_{i-1}, y)\, dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x_{i-1}, y)\, dy + \int_{y'_1}^{y_1} + \int_{y_2}^{y'_2},$$

et comme $|y_1 - y'_1|$ et $|y_2 - y'_2|$ sont inférieurs à 2δ, on a

$$\int_{y'_1}^{y'_2} f(x_{i-1}, y)\, dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x_{i-1}, y)\, dy + 4H\lambda\delta, \qquad -1 < \lambda < +1.$$

La portion de S qui provient de la file d'éléments considérée peut

donc s'écrire

$$(x_i - x_{i-1})\left[\int_{y_1}^{y_2} f(x_{i-1}, y)\, dy + 8\mathrm{H}\theta_i\delta\right],$$

θ_i étant compris entre -1 et $+1$. La somme $8\mathrm{H}\delta\Sigma\theta_i(x_i - x_{i-1})$ est moindre en valeur absolue que $8\mathrm{H}\delta(b-a)$ et tend vers zéro puisque l'on peut supposer δ aussi petit qu'on le veut. L'intégrale double est donc la limite de la somme

$$\Phi(a)(x_1 - a) + \ldots + \Phi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \ldots$$

en posant

$$\Phi(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy;$$

on a, par conséquent,

$$(7) \qquad \iint_{(\mathrm{R})} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

La première intégration doit encore être effectuée en regardant x comme constant, mais les limites y_1 et y_2 sont elles-mêmes des fonctions de x, et non des constantes.

Exemple. — Soit à calculer l'intégrale double de la fonction $\frac{xy}{a}$ à l'intérieur d'un quart de cercle limité par les axes et la circonférence

$$x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2 = 0.$$

Les limites pour x sont 0 et R, et, x restant constant, y peut varier de 0 à $\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}$. L'intégrale a donc pour expression

$$\int_0^{\mathrm{R}} dx \int_0^{\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}} \frac{xy}{a}\, dy = \int_0^{\mathrm{R}} \frac{x}{2a}\,[y^2]_0^{\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2}}\, dx = \int_0^{\mathrm{R}} \frac{x(\mathrm{R}^2 - x^2)}{2a}\, dx;$$

cette intégrale s'obtient aisément et a pour valeur $\frac{\mathrm{R}^4}{8a}$.

Lorsque le champ d'intégration est limité par un contour de forme quelconque, on le décomposera en plusieurs parties, de façon que le contour de chacune d'elles ne soit rencontré qu'en deux points par une parallèle à l'axe Oy. On pourrait aussi le décomposer en parties telles que le contour de chacune d'elles ne soit rencontré qu'en deux points par une parallèle à Ox, et commencer par une intégration relative à la variable x. Prenons, par exemple, une courbe fermée convexe comprise à l'intérieur du

rectangle $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, dont les côtés passent par les quatre points A, B, C, D pour lesquels x ou y est maximum ou minimum. Soient [1] $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$ les équations des deux arcs de courbe ACB, ADB; soient de même $x_1 = \psi_1(y)$, $x_2 = \psi_2(y)$ les équations des deux arcs de courbe CAD, CBD; $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont continues entre a et b, $\psi_1(y)$ et $\psi_2(y)$ sont continues lorsque y varie de c à d. On peut calculer l'intégrale double d'une fonction $f(x, y)$, continue à l'intérieur de ce contour, de deux façons différentes et, en égalant les deux expressions obtenues, il vient

$$(8) \qquad \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx;$$

on voit que les limites sont tout à fait différentes dans les deux intégrales. Tout contour convexe fournit une formule de cette nature. Par exemple, si l'on prend pour champ d'intégration le triangle limité par les droites $y = 0$, $x = a$, $y = x$, on parvient à une formule donnée par Lejeune-Dirichlet,

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\,dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\,dx.$$

123. Analogies avec les intégrales simples. — L'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$, considérée comme fonction de x, a pour dérivée $f(x)$. Il existe un théorème analogue pour les intégrales doubles. Soit $f(x, y)$ une fonction continue à l'intérieur d'un rectangle limité par les droites $x = a$, $x = A$, $y = b$, $y = B$, $(a < A,\ b < B)$. L'intégrale double de $f(x, y)$, étendue à l'aire du rectangle limité par les droites $x = a$, $x = X$, $y = b$, $y = Y$, $(a < X < A,\ b < Y < B)$, est une fonction des coordonnées X, Y du sommet variable, que l'on peut écrire

$$F(X, Y) = \int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\,dy.$$

Soit $\Phi(x) = \int_b^Y f(x, y)\,dy$; une première différentiation par rapport à X nous donne

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \Phi(X) = \int_b^Y f(X, y)\,dy,$$

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

et, en différentiant de nouveau par rapport à Y, il vient

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Y} = f(X, Y).$$

La fonction la plus générale $u(X, Y)$ satisfaisant à la relation précédente (9) s'obtiendra évidemment en ajoutant à $F(X, Y)$ une fonction z dont la dérivée seconde $\frac{\partial^2 z}{\partial X\,\partial Y}$ sera nulle. Elle est donc de la forme (n° 38)

$$(10)\qquad u(X, Y) = \int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\,dy + \varphi(X) + \psi(Y),$$

$\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ étant deux fonctions arbitraires. On peut disposer de ces deux fonctions arbitraires de façon que, pour $X = a$, $u(X, Y)$ se réduise à une fonction donnée $V(Y)$ et, pour $Y = b$, à une autre fonction donnée $U(X)$; ces deux fonctions étant liées nécessairement par la relation $U(a) = V(b)$. En faisant successivement $X = a$, $Y = b$ dans la relation précédente, on a les deux conditions

$$V(Y) = \varphi(a) + \psi(Y), \qquad U(X) = \varphi(X) + \psi(b);$$

on en tire

$$\psi(Y) = V(Y) - \varphi(a), \qquad \psi(b) = V(b) - \varphi(a),$$
$$\varphi(X) = U(X) - V(b) + \varphi(a)$$

et la formule (10) devient

$$(11)\qquad u(X, Y) = \int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\,dy + U(X) + V(Y) - V(b).$$

Réciproquement, si, par un moyen quelconque, on a obtenu une fonction $u(X, Y)$ vérifiant la relation (9) on trouve, par un calcul tout pareil au précédent, que l'on a, pour valeur de l'intégrale double

$$(12)\qquad \int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\,dy = u(X, Y) - u(X, b) - u(a, Y) + u(a, b).$$

Cette formule est analogue à la formule fondamentale (6) (*voir* p. 173).

La formule suivante offre aussi une certaine analogie avec la formule d'intégration par parties.

Soit A une région finie du plan, limitée par une ou plusieurs courbes de forme quelconque. Une fonction $f(x, y)$, continue dans A, varie entre un minimum v_0 et un maximum V. Imaginons qu'on ait tracé les *courbes de niveau* $f(x, y) = v$, où v est compris entre v_0 et V, et supposons que l'on puisse trouver l'aire de la portion de A pour laquelle $f(x, y)$ est compris entre v_0 et v. Cette aire est une fonction $F(v)$ qui croît avec v, et l'aire comprise entre deux courbes de niveau infiniment voisines est égale à $F(v + \Delta v) - F(v) = \Delta v\, F'(v + \theta\,\Delta v)$. Si l'on décompose cette aire en

parties infiniment petites par des lignes joignant les deux courbes de niveau voisines, on peut prendre dans chacune de ces parties un point (ξ, η), tel que l'on ait $f(\xi, \eta) = v + \theta\,\Delta v$ et la somme des éléments de l'intégrale double $\int\int f\,dx\,dy$, provenant de cette région, a pour expression

$$(v + \theta\,\Delta v)F'(v + \theta\,\Delta v)\,\Delta v.$$

L'intégrale double est donc égale à la limite de

$$\Sigma(v + \theta\,\Delta v)F'(v + \theta\,\Delta v)\,\Delta v,$$

c'est-à-dire à l'intégrale simple

$$\int_{v_0}^{V} vF'(v)\,dv = VF(V) - \int_{v_0}^{V} F(v)\,dv.$$

Cette méthode est surtout commode lorsque le champ d'intégration est limité par deux courbes de niveau

$$f(x, y) = v_0, \qquad f(x, y) = V.$$

Soit, par exemple, à évaluer l'intégrale double $\int\int \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy$ étendue à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$. Si nous posons $v = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, le champ d'intégration est limité par les deux courbes de niveau $v = 1$, $v = \sqrt{2}$, et la fonction $F(v)$, qui est l'aire d'un cercle de rayon $\sqrt{v^2 - 1}$, est égale à $\pi(v^2 - 1)$. L'intégrale double est donc égale à

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2\pi v^2\,dv = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \text{ (}^1\text{)}.$$

La formule précédente s'étend aisément aux intégrales doubles

$$\int\int f(x, y)\varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

en désignant par $F(v)$ l'intégrale double $\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy$, étendue à la portion du champ d'intégration limitée par la courbe de niveau $v = f(x, y)$.

126. Formule de Green. — Si la fonction $f(x, y)$ est la dérivée partielle d'une fonction connue par rapport à x ou à y, une des intégrations s'effectue immédiatement et l'on est ramené à une seule quadrature. Cette remarque bien simple conduit à une formule importante, appelée *formule de Green*.

---

(1) On trouvera de nombreuses applications de cette méthode dans un Mémoire de M. Catalan (*Journal de Liouville*, 1re série, t. IV, p. 233).

Considérons d'abord une intégrale double $\int\int \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$, étendue à la portion du plan, limitée par un contour C qui n'est rencontré qu'en deux points par une parallèle à l'axe des y (*fig.* 15, p. 211).

Soient A et B les points pour lesquels x est maximum ou minimum. Une parallèle à Ox comprise entre Aa et Bb rencontre C en deux points m_1 et m_2 d'ordonnées y_1 et y_2. L'intégrale double a pour expression, en intégrant d'abord par rapport à y,

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\, dx.$$

Mais les deux intégrales $\int_a^b P(x, y_1)\, dx$, $\int_a^b P(x, y_2)\, dx$ sont précisément des intégrales curvilignes prises respectivement le long des arcs Am_1B et Am_2B, et nous pouvons écrire la formule précédente

$$(13)\qquad \int\int \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int_{(C)} P\, dx,$$

l'intégrale curviligne étant prise le long du contour C dans le sens indiqué par les flèches, c'est-à-dire dans le sens direct, si les axes ont la disposition de la *figure*. Pour étendre la formule à une aire limitée par un contour de forme quelconque, on procède comme plus haut (n° 94) en partageant cette aire en plusieurs autres par des transversales, de façon que le contour de chacune des aires partielles satisfasse à la condition précédente, et appliquant la formule à chacune d'elles. On établit de même la formule

$$(14)\qquad \int\int \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int_{(C)} Q\, dy,$$

l'intégrale curviligne étant toujours prise dans le même sens. En retranchant les égalités (13) et (14), il vient

$$(15)\qquad \int_{(C)} P\, dx + Q\, dy = \int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire limitée par C. C'est la formule de Green, qui a d'importantes applications. Nous ferons remarquer seulement qu'en posant $Q = x$, $P = -y$, on retrouve la formule obtenue plus haut (n° 94) qui exprime l'aire d'une courbe fermée par une intégrale curviligne.

II. — CHANGEMENTS DE VARIABLES. — AIRE D'UNE SURFACE COURBE.

Pour évaluer une intégrale double, nous avons supposé jusqu'ici qu'on décomposait le champ d'intégration en rectangles infiniment petits par des parallèles aux axes de coordonnées. Nous allons maintenant supposer qu'on décompose le champ d'intégration par deux familles de courbes absolument quelconques.

127. Formule préliminaire. — Soient u et v les coordonnées d'un point par rapport à un système d'axes rectangulaires dans un plan, x et y les coordonnées d'un autre point par rapport à un autre système d'axes rectangulaires de même disposition que les premiers, dans le même plan ou dans un plan différent. Les formules

$$x = f(u, v) \qquad y = \varphi(u, v) \tag{16}$$

définissent une certaine correspondance entre les points de ces deux plans. Nous supposerons : 1° que ces fonctions $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ sont continues et admettent des dérivées partielles continues, lorsque le point (u, v) décrit une portion A_1 du plan (u, v) limitée par un contour C_1; 2° que les formules (16) font correspondre à la portion A_1 du plan (u, v) une portion A du plan (x, y), limitée par un contour C, et qu'il y a correspondance *univoque* entre les points des deux aires et des deux contours, de façon qu'à un point de A ne correspond qu'un point de A_1; 3° que le déterminant fonctionnel $\Delta = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ ne change pas de signe à l'intérieur de C_1 (il peut d'ailleurs s'annuler en certains points de A_1).

Il peut encore se présenter deux cas. Lorsque le point (u, v) décrit le contour C_1 dans le sens direct, le point (x, y) décrit le contour C en marchant toujours dans le même sens, qui peut être le sens direct ou le sens inverse. Nous dirons, suivant les cas, que la correspondance est directe ou inverse.

Cela posé, l'aire Ω de la portion A du plan a pour expression

$$\Omega = \int_{(C)} x\, dy,$$

l'intégrale étant prise le long du contour C dans le sens direct. Si l'on emploie le changement de variables défini par les formules (16), on a encore

$$\Omega = \pm \int_{(C_1)} f(u, v)\, d\varphi(u, v),$$

la nouvelle intégrale étant prise le long de C_1 dans le sens direct; on doit prendre le signe + ou le signe —, suivant que la correspondance est directe ou inverse. Appliquons à cette nouvelle intégrale la formule de Green, en posant $u = x$, $v = y$, $P = f\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $Q = f\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, ce qui nous donne

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \Delta = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)},$$

et il vient

$$\Omega = \pm \int\int_{(A_1)} \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\, du\, dv,$$

ou encore, en appliquant à l'intégrale double le théorème de la moyenne,

$$\Omega = \pm \Omega_1 \frac{D(f, \varphi)}{D(\xi, \eta)}, \tag{17}$$

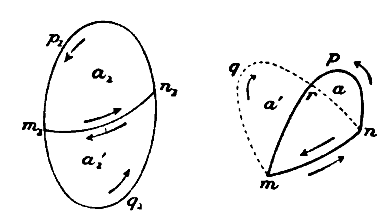
(ξ, η) étant les coordonnées d'un point intérieur à C_1, et Ω_1 l'aire de la portion A_1 du plan (u, v). On voit d'abord que l'on doit prendre le signe + ou le signe — devant le second membre, suivant que Δ est lui-même positif ou négatif. Par suite, *la correspondance est directe ou inverse, suivant que Δ est positif ou négatif.*

La formule (17) établit une analogie de plus entre les déterminants fonctionnels et les dérivées. Imaginons en effet que la portion A_1 du plan diminue indéfiniment dans tous les sens, tous les points tendant vers un point limite (u, v). Il en sera de même de A, et le rapport des aires Ω, Ω_1 a pour limite la valeur absolue du déterminant Δ; de même que la dérivée est la limite du rapport de deux éléments linéaires, Δ est la limite du rapport de deux éléments superficiels. La formule (17) est, à ce point de vue-là, l'analogue de la formule des accroissements finis.

Remarques. — Les hypothèses que nous avons faites sur la correspon-

dance entre A et A_1 ne sont pas toutes indépendantes. Ainsi, pour que la correspondance soit univoque, il est *nécessaire* que Δ ne change pas de signe dans la portion A_1 du plan (u, v). Supposons en effet que Δ soit nul tout le long d'une courbe γ_1, séparant la région de A_1 où Δ est positif de la région où Δ est négatif. Prenons un petit arc $m_1 n_1$ de γ_1 et une région très petite de A_1 renfermant l'arc $m_1 n_1$; elle se décompose en deux régions a_1 et a'_1 ayant $m_1 n_1$ pour ligne de séparation (*fig.* 26).

Fig. 26.



Lorsque le point (u, v) décrit l'aire a_1, où Δ est positif, le point (x, y) décrit une aire a, de contour $mnpm$, et les deux contours $m_1 n_1 p_1 m_1$, $mnpm$ sont parcourus en même temps dans le sens direct. Lorsque le point (u, v) décrit l'aire a'_1, où Δ est négatif, le point (x, y) décrit une aire a', dont le contour $nmqr$ doit être décrit dans le sens inverse, lorsque $n_1 m_1 q_1 n_1$ est décrit dans le sens direct. Cette aire a' doit donc recouvrir en partie l'aire précédente a; à tout point (x, y) de la partie commune nrm correspondent deux points (u, v) de part et d'autre de la ligne $m_1 n_1$.

Posons, par exemple, $X = x$, $Y = y^2$; on a $\Delta = 2y$. Si le point (x, y) décrit une aire fermée renfermant un segment ab de l'axe des x, on voit sans peine que le point (X, Y) décrit deux aires situées au-dessus de l'axe des X, et terminées l'une et l'autre à un même segment AB de cet axe. Une feuille de papier repliée sur elle-même suivant une ligne droite tracée dans cette feuille donne une idée nette de la surface décrite par le point (X, Y).

Il ne suffit pas que Δ conserve le même signe dans A_1 pour que la correspondance soit univoque. Prenons par exemple $X = x^2 - y^2$, $Y = 2xy$; le jacobien $\Delta = 4(x^2 + y^2)$ est toujours positif. Or les formules précédentes peuvent s'écrire, en désignant par (r, θ), (R, ω) les coordonnées polaires des deux points (x, y), (X, Y) respectivement, $R = r^2$, $\omega = 2\theta$. Cela posé, faisons varier r de a à b $(a < b)$ et θ de 0 à $\pi + \alpha$ $\left(\alpha\right.$ étant compris entre o et $\left.\frac{\pi}{2}\right)\cdot$ Le point (R, ω) décrit la couronne circulaire comprise entre les deux cercles de rayons a^2 et b^2. Mais à toute valeur de l'angle ω comprise entre 0 et 2α correspondent deux valeurs de θ, l'une θ_1

comprise entre o et α, l'autre entre π et $\pi + \alpha$. On peut encore se représenter l'aire décrite par le point (X, Y) au moyen d'une couronne circulaire en papier qui se recouvrirait partiellement.

128. Changement de variables. Première méthode. — Conservons les hypothèses faites plus haut sur les régions A et A_1, et les formules (16), et soit $F(x, y)$ une fonction continue dans la région A. Décomposons la région A_1 en régions plus petites α_1, α_2, ..., α_n d'une façon arbitraire; il y correspond une division de la région A en régions plus petites a_1, a_2, ..., a_n. Soient ω_i et σ_i les aires des deux régions correspondantes a_i et α_i; on a, d'après la formule (17),

$$\omega_i = \sigma_i \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)} \right|,$$

u_i, v_i étant les coordonnées d'un point de la région α_i. A ce point (u_i, v_i) correspond un point $x_i = f(u_i, v_i)$, $y_i = \varphi(u_i, v_i)$ de la région a_i. En posant $\Phi(u, v) = F[f(u, v), \varphi(u, v)]$, nous pouvons donc écrire

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\omega_i = \sum_{i=1}^{n} \Phi(u_i, v_i) \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)} \right| \sigma_i;$$

en passant à la limite, nous obtenons l'égalité

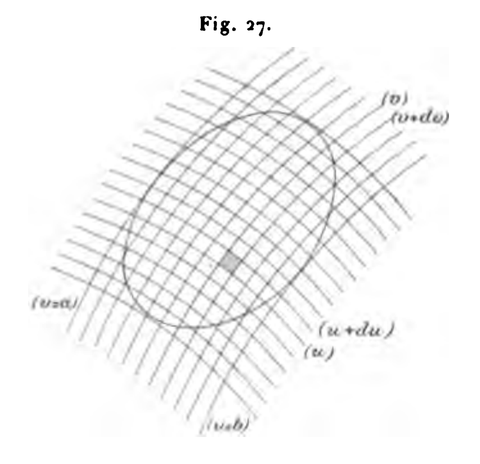
$$(18) \quad \iint_{(A)} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(A_1)} F[f(u, v), \varphi(u, v)] \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right| du\, dv.$$

Donc, *pour effectuer un changement de variables dans une intégrale double, on doit remplacer x et y par leurs valeurs en fonction des nouvelles variables u, v, et le produit dx dy par* $|\Delta|$ *du dv*. Quant au nouveau champ d'intégration, nous avons expliqué comment on le détermine.

Pour trouver entre quelles limites doivent être effectuées les intégrations qui donnent la valeur de la nouvelle intégrale double, il est en général inutile de tracer le contour C_1 du nouveau champ d'intégration A_1. Considérons, en effet, u et v comme un système de coordonnées curvilignes; lorsque, dans les formules (16), on attribue à l'une des variables u, v, une valeur constante, et qu'on fait varier l'autre, on obtient deux familles de courbes $u =$ const., $v =$ const. D'après les hypothèses faites sur les formules (16), par

chaque point de la région A il passe une courbe et une seule de chacune des deux familles. Supposons, pour fixer les idées, qu'une courbe $v =$ const. rencontre le contour C en deux points seulement M_1, M_2, correspondant aux valeurs u_1, u_2 de $u (u_1 < u_2)$ et que toutes les courbes (v) rencontrant le contour C sont comprises entre les deux courbes $v = a$, $v = b$ $(a < b)$. Alors, si l'on intègre d'abord par rapport à u, v restant constant, on doit faire varier u de u_1 à u_2 (u_1 et u_2 sont en général des fonctions de v) et intégrer ensuite le résultat entre les limites a et b.

Fig. 27.



L'intégrale double cherchée a donc pour expression

$$\int_a^b dv \int_{u_1}^{u_2} F[f(u, v), \varphi(u, v)] |\Delta| \, du \, dv.$$

Un changement de variables revient au fond à décomposer le champ d'intégration en régions infiniment petites par les deux systèmes de courbes (u) et (v). Soit ω l'aire du quadrilatère curviligne limité par les courbes (u), $(u + du)$, (v), $(v + dv)$, où du et dv sont positifs; à ce quadrilatère correspond, sur le plan (u, v), un rectangle de côtés du et dv. On a donc, d'après la formule (17), $\omega = |\Delta(\xi, \eta)| \, du \, dv$, ξ étant compris entre u et $u + du$, η entre v et $v + dv$. L'expression $|\Delta(u, v)| \, du \, dv$ s'appelle l'*élément d'aire* dans le système de coordonnées (u, v). La valeur exacte de ω est $\omega = \{ |\Delta(u, v)| + \varepsilon \} \, du \, dv$, ε étant infiniment petit en même temps que du et dv. Mais, quand on cherche la limite

de la somme $\Sigma F(x, y)\omega$, on peut négliger ε; en effet, $\Delta(u, v)$ étant une fonction continue, on peut supposer les courbes (u) et (v) assez rapprochées pour que tous les ε soient moindres en valeur absolue que tout nombre positif donné et, par conséquent, pour que la somme $\Sigma F(x, y)\varepsilon\, du\, dv$ soit elle-même plus petite en valeur absolue que tout nombre positif.

129. Exemples : 1° *Coordonnées polaires.* — Supposons que l'on passe des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires. On a $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, et l'on obtient tous les points du plan en faisant varier ρ de zéro à $+\infty$, et ω de zéro à 2π. On trouve $\Delta = \rho$, de sorte que l'élément d'aire est $\rho\, d\omega\, d\rho$, comme la Géométrie le montre sans peine. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'évaluer une intégrale double dans la portion du plan limitée par un arc AB qui n'est rencontré qu'en un point par une demi-droite issue de l'origine, et par les deux droites OA, OB faisant avec Ox des angles ω_1, ω_2 (*fig.* 17, p. 213). Soit $R = f(\omega)$ l'équation de l'arc AB; ω étant compris entre ω_1 et ω_2, ρ peut varier de zéro à R, et l'intégrale double de $f(x, y)$ a pour valeur

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_0^R f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\rho\, d\rho.$$

Si l'arc AB forme une courbe fermée comprenant l'origine à son intérieur, on prendra $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2\pi$. Tout champ d'intégration peut être décomposé en plusieurs régions telles que la précédente. Supposons, par exemple, que le contour C soit une courbe fermée convexe laissant l'origine à l'extérieur. Soient OA et OB les tangentes menées par l'origine à ce contour, $R_1 = f_1(\omega)$, $R_2 = f_2(\omega)$ les équations des deux arcs de courbe ANB, AMB. Pour une valeur donnée de ω, comprise entre ω_1 et ω_2, ρ peut varier de R_1 à R_2, et l'on a pour valeur de l'intégrale double

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_{R_1}^{R_2} f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\rho\, d\rho.$$

2° *Coordonnées elliptiques.* — Considérons une famille de coniques homofocales

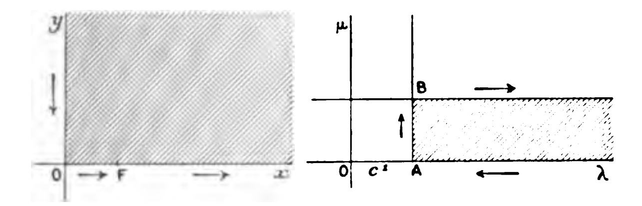
$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1, \tag{19}$$

où λ désigne un paramètre arbitraire. Par tout point du plan passent deux coniques de cette espèce, une ellipse et une hyperbole, car l'équation (19) a, quels que soient x et y, une racine λ supérieure à c^2, et une racine positive μ, inférieure à c^2. De la relation (19) et de la relation analogue, où λ est remplacé par μ, on tire

$$(20) \qquad x = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{c}, \qquad y = \frac{\sqrt{(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}{c}, \qquad (0 \leqq \mu \leqq c^2 \leqq \lambda).$$

pour éviter toute ambiguïté, nous ne considérons que la région du plan

Fig. 28.



des xy située dans l'angle xOy. Cette région correspond, point par point, d'une façon univoque, à la région du plan (λ, μ) limitée par les droites

$$\lambda = c^2, \ \mu = 0, \ \mu = c^2.$$

Lorsque le point (λ, μ) décrit le contour de cette région dans le sens indiqué par les flèches, les formules (20) montrent que le point (x, y) décrit les deux axes Ox, Oy dans le sens indiqué par les flèches. La correspondance est donc inverse; c'est ce que l'on vérifie en calculant Δ,

$$\Delta = \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = -\frac{1}{4}\,\frac{\lambda - \mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}.$$

130. Changement de variables: deuxième méthode. — Nous allons établir la formule générale (18) par une autre méthode, qui s'appuie uniquement sur la façon même dont on calcule une intégrale double. Nous conservons, bien entendu, les hypothèses faites au début sur la correspondance entre les points des deux régions A, A_1. Observons d'abord que, si la formule est vraie pour deux transformations particulières,

$$x = f(u, v), \qquad u = f_1(u', v'),$$
$$y = \varphi(u, v), \qquad v = \varphi_1(u', v'),$$

elle est vraie pour la transformation obtenue en les effectuant

successivement; cela résulte de la propriété connue des détermi nants fonctionnels (n° 30)

$$\frac{D(x, y)}{D(u', v')} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(u', v')}.$$

De même, si la formule est vraie pour plusieurs régions, A, B, C, ..., L, auxquelles correspondent des régions A_1, B_1, C_1, ..., L_1, elle est vraie aussi pour la région A + B + C + ... + L. Enfin, la formule est vraie si le changement de variables se réduit à une transformation de coordonnées

$$x = x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y = y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha;$$

on a $\Delta = 1$, et les deux intégrales sont égales

$$\int\!\!\int_{(A)} F(x, y)\,dx\,dy = \int\!\!\int_{(A')} F(x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,\ y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)\,dx'\,dy',$$

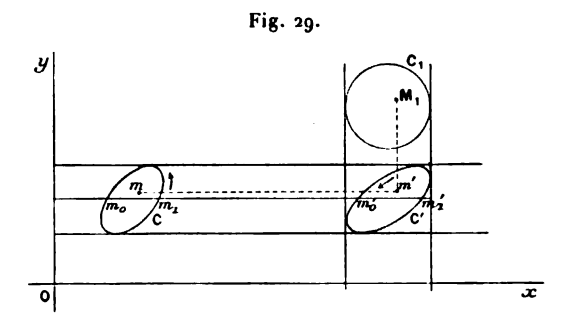
car elles représentent un même volume.

Cela posé, nous allons d'abord démontrer la formule pour la transformation particulière

$$(21) \qquad x = \varphi(x', y'), \qquad y = y',$$

qui fait correspondre à la région A une région A′ comprise entre les mêmes parallèles à Ox, $y = y_0$, $y = y_1$. Nous supposons

Fig. 29.



qu'à tout point de A ne correspond qu'un point de A′ et inversement. Si une parallèle à Ox ne rencontre le contour C de A qu'en deux points, il en sera de même du contour C′ de A′. Aux deux points m_0 et m_1 d'ordonnée y du contour C, correspondent deux

points m'_0 et m'_1 du contour C'. Mais il peut se présenter deux cas suivant que la correspondance est directe ou inverse. Pour distinguer les deux cas, remarquons que, si $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ est positif, x croît avec x', les points m_0 et m_1, m'_0 et m'_1 sont disposés comme la *fig.* 29 l'indique, et la correspondance est directe. Au contraire, si $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ était négatif, la correspondance serait inverse.

Prenons le premier cas, et soient x_0, x_1, x'_0, x'_1 les abscisses des points m_0, m_1, m'_0, m'_1. On a, en appliquant la formule du changement de variable dans une intégrale simple,

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x, y)\, dx = \int_{x'_0}^{x'_1} \mathrm{F}[\varphi(x', y'), y']\, \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\, dx',$$

y et y' étant considérés comme constants et, par suite,

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x, y\;\; dx = \int_{y_0}^{y_1} dy' \int_{x'_0}^{x'_1} \mathrm{F}[\varphi(x', y'), y']\, \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\, dx'.$$

Mais le jacobien Δ se réduit ici à $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ et la formule précédente peut s'écrire

$$\iint_{(\mathrm{A})} \mathrm{F}(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(\mathrm{A}')} \mathrm{F}[\varphi(x', y'), y']\, |\Delta|\, dx'\, dy'.$$

La formule se démontre de la même façon si $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ est négatif et s'étend évidemment à une région limitée par un contour de forme quelconque.

On établira tout pareillement qu'en posant

$$(22) \qquad x = x', \qquad y = \psi(x', y'),$$

on a la formule

$$\iint_{(\mathrm{A})} \mathrm{F}(x, y\;\; dx\, ay = \iint_{(\mathrm{A}')} \mathrm{F}[x', \psi(x', y')]\, |\Delta|\, dx'\, dy',$$

le nouveau champ d'intégration A' correspondant point par point à la région A.

Considérons maintenant les formules générales de transformation

$$(23) \qquad x = f(x_1, y_1), \qquad y = f_1(x_1, y_1),$$

et, pour plus de clarté, désignons par (x, y), (x_1, y_1) les coordonnées de deux points correspondants m, M_1, par rapport à un même système d'axes. Soient A, A_1 les régions correspondantes limitées par les contours C, C_1. Si, aux deux points m, M_1, on associe un point m' de coordonnées $x' = x_1$, $y' = y$, ce point m' décrit une région auxiliaire A', et nous supposerons d'abord qu'elle correspond point par point à chacune des régions A, A_1. Entre les six coordonnées x, y, x_1, y_1, x', y', on a les quatre relations

$$x = f(x_1, y_1), \qquad y = f_1(x_1, y_1), \qquad x' = x_1, \qquad y' = y;$$

on en tire d'abord

$$(24) \qquad x' = x_1, \qquad y' = f_1(x_1, y_1),$$

ce qui définit une transformation de la forme (22). De la relation $y' = f_1(x', y_1)$ on tire ensuite $y_1 = \pi(x', y')$, et par suite

$$(25) \qquad x = f(x', y_1) = \varphi(x', y'), \qquad y = y'.$$

La transformation considérée (23) résulte donc des deux transformations particulières (24) et (25), auxquelles s'applique la formule générale. Elle s'applique donc aussi à la transformation (23) elle-même.

Remarque. — Nous avons supposé que la région décrite par le point m' correspondait point par point à chacune des aires A, A_1. On peut toujours supposer qu'il en est ainsi. En effet, considérons les courbes de la région A_1 qui correspondent aux droites de A parallèles à Ox. Si ces courbes ne sont rencontrées qu'en un point par une parallèle à Oy il est clair qu'à un point m de A ne correspondra qu'un point m' de A'. Il suffira donc de partager l'aire A_1 en régions assez petites pour que, dans chacune d'elles, la condition soit satisfaite. Si ces courbes étaient des parallèles à Oy, on commencerait par effectuer sur (x_1, y_1) une transformation de coordonnées.

131. Aire d'une surface courbe. — Soit S une portion de surface courbe, sans points singuliers, limitée par un contour Γ. Imaginons qu'on décompose S en portions plus petites d'une façon arbitraire. Soit s_i une de ces portions, limitée par un contour γ_i, et m_i un point de s_i. Menons le plan tangent en m_i à la surface S,

et supposons la portion s_i assez petite pour qu'une perpendiculaire à ce plan ne la rencontre qu'en un point. La courbe γ_i se projette sur ce plan suivant une courbe γ'_i et nous désignerons par σ_i l'aire de la portion du plan tangent intérieure à γ'_i, région qui est la projection de s_i. La somme $\Sigma\sigma_i$ tend vers une limite lorsque le nombre des portions s_i augmente indéfiniment, chacune de ces régions devenant infiniment petite dans toutes ses dimensions. C'est cette limite qu'on appelle l'*aire de la portion de surface* S.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point de S; nous supposerons ces coordonnées exprimées en fonction de deux paramètres variables u et v,

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v), \tag{26}$$

de telle façon que la portion de surface S corresponde point par point à la région R du plan (u, v) limitée par un contour fermé C. Nous admettrons que les fonctions f, φ, ψ, ainsi que leurs dérivées partielles, sont continues dans cette région; R étant décomposée en parties plus petites, soit r_i une de ces parties, limitée par un contour c_i, et ω_i l'aire de r_i. A la région r_i correspond sur S une portion s_i limitée par un contour γ_i; soit σ_i l'aire plane correspondante que nous venons de définir. Nous allons chercher une expression du rapport $\frac{\sigma_i}{\omega_i}$.

Désignons par α_i, β_i, γ_i les cosinus directeurs de la normale à la surface S en un point $m_i\,(x_i, y_i, z_i)$ de s_i, qui correspond à un point (u_i, v_i) de r_i; le plan tangent en ce point a pour équation

$$\alpha_i(X - x_i) + \beta_i(Y - y_i) + \gamma_i(Z - z_i) = 0.$$

La perpendiculaire à ce plan menée par un point $M(x, y, z)$ du contour γ_i a de même pour équations

$$\frac{X - x}{\alpha_i} = \frac{Y - y}{\beta_i} = \frac{Z - z}{\gamma_i},$$

et la projection M′ du point M sur le plan tangent en m_i a pour coordonnées

$$\left\{\begin{aligned} X &= \quad x(\beta_i^2 + \gamma_i^2) - \alpha_i\beta_i y - \alpha_i\gamma_i z + \alpha_i(\alpha_i x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i),\\ Y &= -\alpha_i\beta_i x + (\alpha_i^2 + \gamma_i^2)y - \beta_i\gamma_i z + \beta_i(\alpha_i x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i),\\ Z &= -\alpha_i\gamma_i x - \beta_i\gamma_i y + (\alpha_i^2 + \beta_i^2)\, z - \gamma_i(\alpha_i x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i). \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Supposons, pour fixer les idées, que le plan tangent en m_i ne soit pas parallèle à l'axe des z. L'aire plane σ_i se projette sur le plan des xy suivant une aire plane σ'_i, et l'on a la relation $\sigma'_i = \sigma_i|\gamma_i|$. Quand le point (u, v) décrit le contour fermé c_i, le point (X, Y) décrit, dans le plan xOy, le contour de l'aire plane σ'_i, et l'on a, comme le montre un calcul facile,

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \gamma_i \left[\alpha_i \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \beta_i \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \gamma_i \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right].$$

En appliquant la formule générale (17), on parvient donc à la relation

$$\sigma_i = \omega_i \left| \alpha_i \frac{D(y, z)}{D(u'_i, v'_i)} + \beta_i \frac{D(z, x)}{D(u'_i, v'_i)} + \gamma_i \frac{D(x, y)}{D(u'_i, v'_i)} \right|,$$

u'_i, v'_i étant les coordonnées d'un point du plan (u, v) de la région r_i. Si cette région est très petite, ce point (u'_i, v'_i) est très voisin du point (u_i, v_i) et l'on peut écrire

$$\frac{D(y, z)}{D(u'_i, v'_i)} = \frac{D(y, z)}{D(u_i, v_i)} + \varepsilon_i, \qquad \frac{D(z, x)}{D(u'_i, v'_i)} = \frac{D(z, x)}{D(u_i, v_i)} + \varepsilon'_i, \qquad \ldots,$$

$$\Sigma\sigma_i = \Sigma\omega_i \left| \alpha_i \frac{D(y, z)}{D(u_i, v_i)} + \beta_i \frac{D(z, x)}{D(u_i, v_i)} + \gamma_i \frac{D(x, y)}{D(u_i, v_i)} \right| + \theta\Sigma\omega_i |\alpha_i\varepsilon_i + \beta_i\varepsilon'_i + \gamma_i\varepsilon''_i|,$$

θ étant au plus égal à un en valeur absolue. Puisque les dérivées des fonctions f, φ, ψ sont continues dans la région R, on peut supposer les régions r_i assez petites pour que toutes les quantités ε_i, ε'_i, ε''_i soient moindres qu'un nombre positif arbitraire η. Le terme complémentaire sera certainement moindre en valeur absolue que $3\eta\Omega$, en désignant par Ω l'aire de la région R. Ce terme tend donc vers zéro, et la somme $\Sigma\sigma_i$ a pour limite l'intégrale double

$$\iint_{(R)} \left| \alpha \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \beta \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \gamma \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du\, dv,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale à la surface S au point (u, v).

Calculons ces cosinus. L'équation du plan tangent est (n° 39)

$$(X - x)\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + (Y - y)\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + (Z - z)\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0;$$

on a donc

$$\frac{\alpha}{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}} = \frac{\beta}{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}} = \frac{\gamma}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \ldots}}.$$

Si l'on prend le signe + dans le dernier rapport, il vient

$$\alpha\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + \beta\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + \gamma\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2};$$

une identité célèbre employée par Lagrange

$$(ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$

permet encore d'écrire la quantité sous le radical $EG - F^2$, en posant

$$E = S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad F = S\,\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad G = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

où le signe S indique qu'il faut remplacer x par y, puis par z, et faire la somme. L'aire de la surface S est donc représentée par l'intégrale double

$$A = \int\int_{(R)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{28}$$

Les fonctions E, F, G jouent un rôle important dans l'étude des surfaces. Si l'on élève au carré les expressions de dx, dy, dz et qu'on les ajoute, il vient

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{29}$$

Il est clair que les coefficients E, F, G ne dépendent pas du choix des axes de coordonnées, mais seulement de la surface S et des variables indépendantes u et v que l'on a prises. Si les variables u, v, et la surface S sont réelles, $EG - F^2$ est nécessairement positif.

132. Élément de surface. — L'expression $\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$ est l'élément d'aire de la surface S dans le système de coordonnées (u, v). L'aire de la petite portion de surface comprise entre les courbes (u), $(u + du)$, (v), $(v + dv)$ a pour valeur exacte

$(\sqrt{EG-F^2}+\varepsilon)\,du\,dv$, ε étant infiniment petit en même temps que du et dv, et l'on voit comme plus haut qu'on peut négliger le terme $\varepsilon\,du\,dv$. Quelques considérations de Géométrie infinitésimale permettent de retrouver aisément la valeur de l'élément d'aire. En effet, si nous assimilons la portion de surface considérée à un parallélogramme situé dans le plan tangent à S au point (u, v), l'aire sera égale au produit des longueurs des deux côtés par le sinus de l'angle des deux courbes (u) et (v). Si l'on confond de même l'accroissement de l'arc avec la différentielle ds, les longueurs des côtés seront, d'après la formule (29), $\sqrt{E}\,du$, $\sqrt{G}\,dv$, en supposant du et dv positifs. Quant à l'angle α des deux courbes, les paramètres directeurs des tangentes à ces courbes sont respectivement $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, et $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$; on a donc

$$\cos\alpha = \frac{S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

et, par suite, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$. En faisant le produit, on retrouve bien l'expression de l'élément d'aire. On peut remarquer, sur la formule qui donne $\cos\alpha$, que le coefficient $F=0$ lorsque les deux familles de courbes u et (v) forment un réseau orthogonal, et dans ce cas seulement.

Lorsque la surface S se réduit à un plan, on retrouve *la valeur obtenue plus haut* (n° 128). En effet, si l'on suppose $\psi(u, v)=0$, on a

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2, \qquad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,$$

et la règle pour former le carré d'un déterminant donne

$$\Delta^2=\left\{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right\}^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG-F^2;$$

$\sqrt{EG-F^2}$ se réduit donc à $|\Delta|$.

Exemples. — 1° Soit à trouver l'aire d'une portion de surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$, qui se projette sur le plan xOy suivant une région R où la fonction $f(x, y)$ et ses dérivées $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues. En prenant x et y pour variables indépendantes, on a $E = 1 + p^2$, $F = pq$, $G = 1 + q^2$, et l'aire cherchée est représentée par l'intégrale double

$$(30) \qquad \mathcal{A} = \int\int_{(R)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \int\int_{(R)} \frac{dx\, dy}{\cos\gamma},$$

γ désignant l'angle aigu que fait avec Oz la normale à la surface.

2° Soit à calculer l'aire d'une portion de surface de révolution comprise entre deux parallèles. Prenons pour axe des z l'axe de la surface, et soit $z = f(x)$ l'équation de la méridienne dans le plan des xz. Les coordonnées d'un point de la surface sont

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega, \qquad z = f(\rho),$$

en prenant pour variables indépendantes les coordonnées polaires ρ et ω de la projection sur le plan xOy. On a ici

$$ds^2 = d\rho^2[1 + f'^2(\rho)] + \rho^2 d\omega^2,$$

$$E = 1 + f'^2(\rho), \qquad F = 0, \qquad G = \rho^2.$$

Pour obtenir la portion de surface comprise entre les deux parallèles de rayon ρ_1 et $\rho_2 (\rho_1 < \rho_2)$, il faut évidemment faire varier ρ de ρ_1 à ρ_2 et ω de zéro à 2π. On a donc, pour l'aire cherchée,

$$\mathcal{A} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \int_0^{2\pi} \rho\sqrt{1 + f'^2(\rho)}\, d\omega = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\sqrt{1 + f'^2(\rho)}\, d\rho,$$

et l'on a une seule quadrature à effectuer. En désignant par s l'arc de la méridienne, on a

$$ds^2 = d\rho^2 + dz^2 = d\rho^2[1 + f'^2(\rho)],$$

et la formule précédente peut s'écrire

$$\mathcal{A} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} 2\pi\rho\, ds.$$

L'interprétation géométrique est immédiate; $2\pi\rho\, ds$ est la sur-

face latérale d'un tronc de cône dont le côté serait ds et dont la circonférence moyenne aurait pour rayon ρ. En assimilant l'aire comprise entre deux parallèles infiniment voisins à l'aire latérale d'un tronc de cône, on retrouve précisément la formule qui donne $\mathcal{A}$.

Par exemple, l'aire de la calotte d'un paraboloïde de révolution, engendré par la rotation de la parabole $x^2 = 2pz$, comprise entre le sommet et le parallèle de rayon r, a pour valeur

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_0^r \frac{\rho}{p} \sqrt{\rho^2 + p^2}\, d\rho = \frac{2\pi}{3p} \left[(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3 \right].$$

III. — EXTENSION DE LA NOTION D'INTÉGRALE DOUBLE. INTÉGRALES DE SURFACE.

133. Intégrales où le champ est infini ou la fonction discontinue. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans toute la portion du plan extérieure à une courbe fermée Γ. L'intégrale double de $f(x, y)$, prise dans la région comprise entre Γ et une autre courbe fermée C extérieure à Γ, a une valeur finie. Si cette intégrale tend vers une limite lorsque la courbe C s'éloigne indéfiniment dans tous les sens, cette limite est, par définition, l'intégrale double de $f(x, y)$ étendue à la région du plan extérieure à Γ.

Supposons d'abord que la fonction $f(x, y)$ conserve un signe constant à l'extérieur de Γ, par exemple soit positive. Dans ce cas, la limite de l'intégrale double est indépendante de la forme de la courbe limite C. Soient en effet $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, une suite de courbes fermées s'enveloppant mutuellement, de telle façon que C_n s'éloigne indéfiniment lorsque n croît indéfiniment. Si l'intégrale double I_n étendue à la région comprise entre Γ et C_n tend vers une limite I, il en sera de même pour toute autre suite de courbes $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m, \ldots$, satisfaisant aux mêmes conditions. Soit I'_m l'intégrale double étendue à la région comprise entre Γ et C'_m; on peut choisir n assez grand pour que la courbe C_n soit tout entière extérieure à C'_m. On aura donc $I'_m < I_n < I$. D'ailleurs I'_m augmente avec m; elle a donc une limite $I' \leq I$. On démontrerait de même que l'on a $I \leq I'$. Par conséquent, les deux limites sont égales $I' = I$.

Par exemple, soit $f(x, y)$ une fonction qui, à l'extérieur d'un cercle de rayon r ayant pour centre l'origine, est de la forme

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{(x^2+y^2)^\alpha},$$

le numérateur $\psi(x, y)$ restant compris entre deux nombres positifs m et M. Prenons pour les courbes C des circonférences concentriques à la première. L'intégrale double, étendue à la couronne circulaire comprise entre les deux cercles de rayon r et R a pour expression

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_r^R \frac{\psi(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\rho\, d\rho}{\rho^{2\alpha}};$$

elle est donc comprise entre les deux intégrales

$$2\pi m \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}, \qquad 2\pi M \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}.$$

Cette intégrale a une limite lorsque R augmente indéfiniment, pourvu que l'on ait $2\alpha - 1 > 1$, ou $\alpha > 1$ (n° 90). Elle augmente indéfiniment avec R, si α est $\leqq 1$.

Lorsqu'on ne peut trouver aucune courbe fermée à l'extérieur de laquelle la fonction $f(x, y)$ conserve un signe constant, on démontre comme plus haut (n° 89) que l'intégrale $\int\int f(x,y)\,dx\,dy$ a une limite lorsque l'intégrale $\int\int |f(x, y)|\,dx\,dy$ a elle-même une limite. Mais, lorsque cette dernière intégrale augmente indéfiniment, la première intégrale est indéterminée. En voici un exemple intéressant, dû à Cayley. Soit $f(x, y) = \sin(x^2+y^2)$; si nous intégrons d'abord à l'intérieur d'un carré de côté a, nous trouvons pour l'intégrale double

$$\int_0^a dx \int_0^a \sin(x^2+y^2)\,dy$$
$$= \int_0^a \sin x^2\,dx \times \int_0^a \cos y^2\,dy + \int_0^a \cos x^2\,dx \times \int_0^a \sin y^2\,dy.$$

Lorsque a augmente indéfiniment, les intégrales qui figurent au second membre ont une limite (n° 91). On démontre que cette limite est égale à $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et le second membre a pour limite π. Au

contraire, si l'on intègre à l'intérieur d'un cercle de rayon R, on a pour l'intégrale double

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^R \rho \sin\rho^2 d\rho = -\frac{\pi}{4}[\cos\rho^2]_0^R = \frac{\pi}{4}[1-\cos R^2],$$

et le second membre est indéterminé lorsque R croît indéfiniment.

On définira de la même façon l'intégrale double d'une fonction $f(x, y)$ qui deviendrait infinie en un point ou tout le long d'une ligne. Pour cela, on commencera par enlever le point ou la ligne du champ d'intégration en les entourant d'un contour très petit, ou très voisin de la ligne de discontinuité, que l'on fera ensuite diminuer indéfiniment. Par exemple, lorsque, dans le voisinage d'un point (a, b), la fonction $f(x, y)$ peut s'écrire

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha},$$

où la valeur absolue de $\psi(x, y)$ est comprise entre deux nombres positifs m et M, l'intégrale double de $f(x, y)$, dans une région qui ne contient pas d'autre discontinuité que le point (a, b), a une valeur finie pourvu que α soit inférieur à un, et dans ce cas seulement.

134. La fonction B(p, q). — On a supposé plus haut que le contour C_n s'éloignait indéfiniment dans toutes les directions; mais il est évident que l'on peut aussi supposer qu'une portion seulement de ce contour s'éloigne à l'infini. C'est ce qui a lieu dans l'exemple cité de Cayley, et aussi dans le suivant. Soit

$$f(x, y) = 4x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2},$$

où l'on suppose $p > 0$, $q > 0$; cette fonction est continue et positive dans l'angle xOy. Si nous intégrons d'abord à l'intérieur du carré de côté a, formé par les axes et les droites $x = a$, $y = a$, on a pour valeur de l'intégrale double

$$\int_0^a 2x^{2p-1}e^{-x^2}dx \times \int_0^a 2y^{2q-1}e^{-y^2}dy;$$

chacune des intégrales du second membre a une limite lorsque a augmente indéfiniment. En effet, si, dans l'intégrale qui définit la fonction $\Gamma(p)$ (n° 92)

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt,$$

on pose $t = x^2$, il vient

$$(31) \qquad \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} 2x^{2p-1} e^{-x^2}\, dx.$$

L'intégrale double a donc pour limite le produit $\Gamma(p)\Gamma(q)$.

Intégrons maintenant à l'intérieur d'un quart de cercle limité par les axes et le cercle $x^2 + y^2 = R^2$; nous avons pour l'intégrale double, en coordonnées polaires,

$$\int_0^R 2\rho^{2(p+q)-1} e^{-\rho^2}\, d\rho \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi\, d\varphi.$$

Lorsque R augmente indéfiniment, l'intégrale double a donc pour limite

$$\Gamma(p+q) B(p, q)$$

en posant

$$(32) \qquad B(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi\, d\varphi;$$

en écrivant que ces deux limites sont les mêmes, on a la relation

$$(33) \qquad \Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) B(p, q).$$

L'intégrale $B(p, q)$ est l'intégrale eulérienne *de première espèce;* on peut encore l'écrire, en posant $\sin^2\varphi = t$,

$$(34) \qquad B(p, q) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\, dt.$$

La formule (33) ramène le calcul de la fonction $B(p, q)$ à celui de la fonction Γ. Si l'on y fait, par exemple, $p = q = \frac{1}{2}$, il vient

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \Gamma(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, d\varphi = \pi,$$

et par suite $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. La formule (31) donne alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'une façon générale, en faisant $q = 1 - p$ et supposant p compris entre 0 et 1, on a

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p, 1-p) = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1} \frac{dt}{t};$$

on verra plus tard que cette intégrale a pour valeur $\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

135. Intégrales de surface. — La définition des *intégrales de surface* est analogue à celle des intégrales curvilignes. Soit S une portion de surface limitée par une ou plusieurs courbes limites C. Nous supposerons que cette surface présente *deux côtés* distincts, que si l'on peint, par exemple, un des côtés en rouge, l'autre en bleu, il est impossible de passer du côté rouge au côté bleu par un chemin continu situé sur la surface sans franchir une des courbes limites ([1]). Regardons la surface S comme une surface matérielle ayant une certaine épaisseur et soient m, m' deux points infiniment voisins, pris sur deux côtés différents. Menons au point m la normale mn qui ne traverse pas la surface; on dira, pour abréger, que la direction ainsi définie sur la normale correspond à ce côté de la surface. La direction de la normale à l'autre côté de la surface au point m' sera opposée à la première.

Cela posé, soit $z = \varphi(x, y)$ l'équation d'une portion de surface S, limitée par un contour Γ, qui n'est rencontrée qu'en un point au plus par une parallèle à Oz; la fonction $\varphi(x, y)$ est continue à l'intérieur d'une région A limitée par un contour C qui est la projection de Γ. Il est évident que cette surface S présente deux côtés; les directions correspondantes de la normale font respectivement avec Oz un angle aigu ou un angle obtus; nous appellerons *côté supérieur* celui pour lequel la normale fait un angle aigu avec Oz. Soit, d'autre part, $P(x, y, z)$ une fonction continue des trois variables x, y, z dans une certaine région de l'espace renfermant la surface S. Si l'on y remplace z par la fonction $\varphi(x, y)$, le résultat est une certaine fonction des deux variables x et y seulement et il est naturel, par analogie avec les intégrales curvilignes, d'appeler *intégrale de surface* l'intégrale double

$$(35) \qquad \iint_{(A)} P[x, y, \varphi(x, y)]\, dx\, dy,$$

étendue à la région (A) du plan. Imaginons les coordonnées (x, y, z) d'un point de S exprimées au moyen de deux variables auxiliaires u et v de façon que cette surface corresponde point par point d'une façon univoque à une portion R du plan (u, v). Soient $d\sigma$ l'élément de surface S et γ l'angle aigu que fait avec Oz la normale au côté supérieur de S; l'intégrale double précédente est égale (*voir* n°s 131, 132) à l'intégrale double

$$(36) \qquad \iint_{(R)} P(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma,$$

où l'on suppose x, y, z exprimées en fonction de u et de v. Cette nouvelle expression est plus générale que la première, car $\cos\gamma$ est susceptible de

---

([1]) Il est très facile de former une surface ne satisfaisant pas à cette condition. Il n'y a qu'à déformer une feuille de papier rectangulaire, telle que ABCD, de façon à coller le côté BC sur le côté AD, le point C venant en A et le point B en D.

prendre deux valeurs, suivant le côté de la surface que l'on considère. Dans le cas considéré jusqu'ici, où l'angle γ est aigu, nous dirons que l'intégrale double (35) ou (36) est l'intégrale de surface

$$\iint P(x, y, z)\, dx\, dy, \tag{37}$$

étendue au côté supérieur de la surface S. Mais si l'on prend pour γ l'angle obtus, tous les éléments de l'intégrale double seront changés de signe et l'on dira que la nouvelle intégrale double représente l'intégrale de surface $\iint P\, dx\, dy$ étendue au côté inférieur de S. En résumé, l'intégrale de surface $\iint P\, dx\, dy$ est égale à $\pm$ l'intégrale double (35), suivant le côté de la surface S sur lequel on la prend.

Cette définition permet de compléter l'analogie entre les intégrales simples et les intégrales doubles. Ainsi, dans une intégrale simple, on change le signe en renversant les limites, tandis que jusqu'ici nous n'avons rien vu d'analogue pour les intégrales doubles. Avec la définition généralisée d'intégrale double, on peut dire que l'intégrale $\iint f(x, y)\, dx\, dy$, que nous avons étudiée jusqu'ici, est l'intégrale de surface étendue au côté supérieur du plan des xy, tandis que la même intégrale changée de signe représente l'intégrale double prise sur le côté inférieur. Aux deux sens de parcours pour une intégrale simple correspondent les deux côtés du plan des xy pour une intégrale double.

L'expression (36) d'une intégrale de surface n'exige pas évidemment que la surface ne soit rencontrée qu'en un point au plus par une parallèle à Oz. On définira de la même façon les intégrales de surface

$$\iint Q(x, y, z)\, dy\, dz, \qquad \iint R(x, y, z)\, dx\, dz,$$

et l'intégrale plus générale

$$\iint P(x, y, z)\, dx\, dy + Q(x, y, z)\, dy\, dz + R(x, y, z)\, dz\, dx;$$

cette dernière peut encore s'écrire

$$\iint [P \cos\gamma + Q \cos\alpha + R \cos\beta]\, d\sigma,$$

α, β, γ désignant les angles que fait avec les axes la direction de la normale qui correspond au côté choisi sur la surface.

Les intégrales de surface sont surtout utiles en Physique mathématique.

136. Formule de Stokes. — Soit L une courbe gauche, le long de laquelle les fonctions $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ sont continues.



L'intégrale curviligne

$$\int_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

prise le long de L, se définit comme une intégrale curviligne prise le long d'une courbe plane (n° 93), et nous n'y reviendrons pas. Si la courbe L est fermée, elle se décompose évidemment en trois intégrales curvilignes prises le long de courbes planes fermées. En appliquant à chacune d'elles la formule de Green, on voit qu'on peut remplacer cette intégrale curviligne par la somme de trois intégrales doubles. L'introduction des intégrales de surface permet d'énoncer très simplement le résultat.

Étant donnée une portion de surface S ayant deux côtés, que nous supposerons, pour fixer les idées, limitée par une seule courbe Γ, à chaque côté de la surface correspond un sens de parcours direct sur le contour Γ. Nous ferons la convention suivante : En un point M du contour menons la direction Mn de la normale qui correspond au côté considéré, et imaginons un observateur ayant les pieds en M et la tête en n. Nous appellerons *sens direct* le sens dans lequel cet observateur doit décrire Γ pour avoir à sa gauche la surface S. Aux deux côtés de la surface S correspondent deux sens directs opposés sur le contour Γ.

Cela posé, considérons d'abord une portion de surface S qui n'est rencontrée qu'en un point au plus par une parallèle à Oz et supposons le trièdre Oxyz ayant la disposition indiquée par la *fig.* 30.

Fig. 30.

Au contour Γ de S correspond un contour fermé C sur le plan des xy, et ces deux contours sont décrits en même temps dans le sens indiqué par les flèches. Désignons par $P(x, y, z)$ une fonction continue dans une portion de l'espace renfermant S et par $z = \varphi(x, y)$ l'équation de cette surface. L'intégrale curviligne $\int_{(\Gamma)} P(x, y, z)\,dx$ est identique à l'inté-

grale curviligne

$$\int_{(C)} P[x, y, \varphi(x, y)]\, dx,$$

prise le long de la courbe plane C. Appliquons à cette dernière la formule de Green (n° 126) en posant, pour plus de précision,

$$\overline{P(x, y)} = P[x, y, \varphi(x, y)].$$

On a

$$\frac{\partial \overline{P(x, y)}}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

en appelant α, β, γ les angles que fait avec les axes la direction de la normale correspondant au côté supérieur de S, et la formule de Green donne

$$\int_{(C)} \overline{P(x, y)}\, dx = \int\int_{(A)} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\frac{dx\, dy}{\cos\gamma},$$

l'intégrale double étant étendue à la région A du plan intérieure au contour C. Le second membre n'est autre chose que l'intégrale de surface

$$\int\int \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma,$$

prise sur le côté supérieur de S, et nous pouvons écrire

$$\int_{(\Gamma)} P(x, y, z)\, dx = \int\int_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy.$$

La formule subsiste évidemment quand on change le côté de la surface, pourvu qu'on change en même temps le sens du parcours de Γ, et elle s'étend comme la formule de Green à une surface de forme quelconque. En permutant circulairement x, y, z, on a deux formules toutes pareilles

$$\int_{(\Gamma)} Q(x, y, z)\, dy = \int\int_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dy\, dz,$$

$$\int_{(\Gamma)} R(x, y, z)\, dz = \int\int_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y}\, dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x}\, dx\, dz;$$

en les ajoutant, on parvient à la formule générale de Stokes

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{(\Gamma)} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz \\ &= \int\int_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\, dz. \end{aligned}\right.$$

Le sens de parcours du contour (Γ) et le côté de la surface auquel on étend l'intégrale double se correspondent, comme nous l'avons indiqué.

IV. — APPLICATIONS ANALYTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES.

137. Calcul des volumes. — Considérons, comme plus haut, une portion de l'espace limitée par une surface S située au-dessus du plan xOy, ce plan lui-même et un cylindre ayant les génératrices parallèles à Oz; nous supposerons que la section par le plan $z = 0$ est un contour tel que celui de la *fig.* 25 formé de deux parallèles à l'axe Oy et de deux arcs de courbe APB, A'QB'. Si $z = f(x, y)$ est l'équation de la surface S, le volume ainsi limité a pour expression (n° **124**)

$$V = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

Mais l'intégrale $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$ représente l'aire $\mathcal{A}$ de la section faite dans ce volume par un plan parallèle au plan des yz, et la formule précédente peut s'écrire

$$V = \int_a^b \mathcal{A}\, dx. \tag{39}$$

Or un volume limité d'une façon quelconque est égal à la somme algébrique d'un certain nombre de volumes limités comme le précédent. Par exemple, pour évaluer le volume limité par une surface fermée convexe, on peut circonscrire à cette surface un cylindre ayant ses génératrices parallèles à Oz, et l'on aura à calculer la différence de deux volumes tels que le premier. La formule (39) s'applique donc à tout volume compris entre deux plans parallèles $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ et une surface de forme quelconque, $\mathcal{A}$ désignant l'aire de la section faite dans ce volume par un plan parallèle aux premiers. Supposons l'intervalle (a, b) décomposé en intervalles plus petits $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$, et soient $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_i, \ldots$, les aires des sections correspondant aux plans $x = a$, $x = x_1$, ... L'intégrale définie $\int_a^b \mathcal{A}\, dx$ est la limite de la somme

$$\mathcal{A}_0(x_1 - a) + \mathcal{A}_1(x_2 - x_1) + \ldots + \mathcal{A}_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \ldots,$$

dont la signification géométrique est évidente, car $\mathcal{A}_{i-1}(x_i - x_{i-1})$, par exemple, représente le volume d'une tranche cylindrique ayant pour base la section faite par le plan $x = x_{i-1}$, et pour hauteur la distance des deux plans voisins. Le volume cherché est donc la limite d'une somme de tranches cylindriques infiniment minces, définies comme la précédente ; ce qui est bien conforme à la notion vulgaire du volume.

Si l'on connaît l'expression de l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de x, le volume cherché s'obtient par une seule quadrature. Supposons, par exemple, qu'on veuille avoir le volume compris entre une surface de révolution et deux plans perpendiculaires à l'axe. Cet axe étant pris pour axe des x, soit $z = f(x)$ l'équation de la méridienne dans le plan des xz, la section par un plan parallèle au plan des yz est un cercle de rayon $f(x)$ et le volume cherché a pour expression $\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$.

Cherchons encore le volume de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

compris entre les deux plans $x = x_0$, $x = X$. La section par un plan parallèle à $x = 0$ est une ellipse dont les demi-axes sont égaux à $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$; on a donc pour le volume cherché

$$V = \int_{x_0}^{X} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(X - x_0 - \frac{X^3 - x_0^3}{3a^2}\right).$$

Pour avoir le volume total, il suffira de prendre $x_0 = -a$, $X = a$, ce qui donne $\frac{4}{3}\pi abc$.

138. Volume limité par une surface réglée. — Lorsque l'aire $\mathcal{A}$ est une fonction entière et du second degré de x, le volume s'exprime très simplement au moyen des aires B, B′, b des deux sections extrêmes et de la section moyenne, et de la distance h des deux sections extrêmes. Si l'on prend le plan de la section moyenne pour plan des yz, on a

$$V = \int_{-a}^{+a} (lx^2 + 2mx + n)\, dx = 2l\frac{a^3}{3} + 2na;$$

d'autre part, on a,

$$h = 2a, \qquad b = n, \qquad B = la^2 + 2ma + n, \qquad B' = la^2 - 2ma + n,$$

et l'on en tire $n = b$, $a = \frac{h}{2}$, $2la^2 = B + B' - 2b$, ce qui conduit à la formule

$$(40) \qquad V = \frac{h}{6}[B + B' + 4b].$$

Cette formule s'applique en particulier au volume limité par deux plans parallèles et une surface réglée quelconque. Soient, en effet, $y = ax + p$, $z = bx + q$ les équations d'une droite mobile où a, b, p, q sont des fonctions continues d'un paramètre variable, qui reviennent à leurs valeurs initiales lorsque t croît de t_0 à T. Cette droite décrit une surface réglée et l'aire de la section faite dans cette surface par un plan parallèle au plan $x = 0$ a pour expression (n° 94)

$$\mathcal{A} = \int_{t_0}^{T} (ax + p)(b'x + q')\,dt,$$

a', b', p', q' étant les dérivées de a, b, p, q par rapport à t; ces dérivées peuvent être discontinues pour un nombre fini de valeurs de t entre t_0 et T, ce qui arrivera si la surface réglée se compose de plusieurs morceaux de surfaces distinctes. Nous pouvons encore écrire

$$\mathcal{A} = x^2 \int_{t_0}^{T} ab'\,dt + x \int_{t_0}^{T} (aq' + pb')\,dt + \int_{t_0}^{T} pq'\,dt,$$

et les intégrales qui figurent dans le second membre sont évidemment indépendantes de x. La formule (40) est donc applicable au volume cherché; on peut remarquer qu'elle donne la plupart des volumes que l'on calcule en géométrie élémentaire.

139. **Problème de Viviani.** — Sur un rayon OA d'une sphère de rayon R comme diamètre décrivons un cercle C, et proposons-nous de trouver le volume de la portion de sphère intérieure au cylindre de révolution ayant pour section droite le cercle C. Le centre de la sphère étant pris pour origine, le quart du volume cherché est égal à l'intégrale double

$$\frac{V}{4} = \iint \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

étendue au demi-cercle décrit sur OA comme diamètre. Si nous passons aux coordonnées polaires ρ, ω, l'angle ω pourra varier de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et ρ de 0

à R cos ω, et l'on a encore

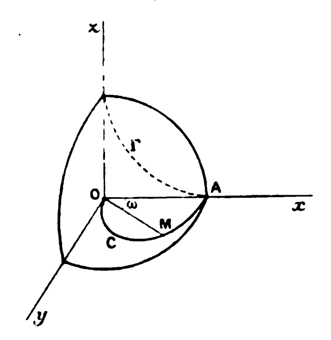
$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\left[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\omega} d\omega$$

ou

$$\frac{V}{4} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^3 - R^3\sin^3\omega)\,d\omega = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Si l'on retranche de la sphère la portion intérieure au cylindre considéré

Fig. 31.



et au cylindre symétrique par rapport à Oz, le volume de la portion restante est égal à

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9}R^3.$$

L'aire Ω de la surface de la sphère intérieure au cylindre précédent est donnée de même par la formule

$$\Omega = 4\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy;$$

remplaçons p et q par leurs valeurs $-\frac{x}{z}$ et $-\frac{y}{z}$, et passons aux coordonnées polaires. Il vient

$$\Omega = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \frac{R\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -R\left(\sqrt{R^2-\rho^2}\right)_0^{R\cos\omega} d\omega,$$

ou encore

$$\Omega = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\omega)\,d\omega = 4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Si l'on retranche de la surface totale de la sphère la portion intérieure aux

deux cylindres, l'aire de la partie restante est égale à

$$4\pi R^2 - 8R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 8R^2.$$

140. Calcul d'intégrales définies particulières. — Les différents théorèmes qui ont été établis, tels que les théorèmes sur la différentiation ou l'intégration sous le signe $\int$, permettent quelquefois de calculer la valeur de certaines intégrales définies, sans que l'on connaisse l'intégrale indéfinie. Nous allons en donner quelques exemples.

Soit

$$A = F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx;$$

la formule de différentiation sous le signe $\int$ donne

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} + \int_0^\alpha \frac{x\,dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)}.$$

Mais on a, en décomposant en fractions simples,

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} = \frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{x+\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)$$

et par suite

$$\int_0^\alpha \frac{x\,dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)} = -\frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arc\,tang}\alpha.$$

Il reste donc

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arc\,tang}\alpha + \frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)},$$

et, en observant que A est nul pour $\alpha = 0$, on peut écrire

$$A = \int_0^\alpha \frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}\,d\alpha + \int_0^\alpha \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arc\,tang}\alpha\,d\alpha;$$

en intégrant par parties la première intégrale, il vient

$$A = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\alpha\log(1+\alpha^2).$$

Considérons encore la fonction x^y; elle est continue lorsque x varie de 0 à 1, et y de a à b, les deux nombres a et b étant positifs. On a donc, d'après la formule générale (nº **123**),

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y \, dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \, dx.$$

Mais $\int_0^1 x^y \, dx = \left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)_0^1 = \frac{1}{y+1}$, et, par conséquent, le second membre a pour valeur

$$\int_a^b \frac{dy}{y+1} = \log\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

D'autre part, on a aussi $\int_a^b x^y \, dy = \left(\frac{x^y}{\log x}\right)_a^b = \frac{x^b - x^a}{\log x}$, et il vient

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} \, dx = \log\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

D'une façon générale, soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ deux fonctions telles que l'on ait $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, et x_0, x_1, y_0, y_1, des constantes. On a, d'après la formule d'intégration sous le signe $\int$,

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y} \, dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx,$$

c'est-à-dire

$$(41) \quad \int_{x_0}^{x_1} [P(x, y_1) - P(x, y_0)] \, dx = \int_{y_0}^{y_1} [Q(x_1, y) - Q(x_0, y)] \, dy.$$

Cauchy a déduit de là un grand nombre d'intégrales définies. La formule (41) se rattache d'ailleurs de la façon la plus simple à la formule de Green, dont elle n'est au fond qu'un cas particulier. Il suffit, en effet, d'appliquer cette formule à l'intégrale curviligne $\int P \, dx + Q \, dy$, prise le long du contour du rectangle formé par les droites $x = x_0$, $x = x_1$, $y = y_0$, $y = y_1$.

Voici encore un exemple d'intégrale définie calculée par un artifice tout particulier. L'intégrale

$$F(\alpha) = \int_0^\pi \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) \, dx$$

a une valeur finie pourvu que $|\alpha|$ soit différent de un. Cette fonction $F(\alpha)$ possède les propriétés suivantes :

1° $F(-\alpha) = F(\alpha)$. En effet, on a

$$F(-\alpha) = \int_0^\pi \log(1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx,$$

ou, en changeant x en $\pi - y$,

$$F(-\alpha) = \int_0^\pi \log(1 - 2\alpha\cos y + \alpha^2)\,dy = F(\alpha).$$

2° $F(\alpha^2) = 2F(\alpha)$. Nous pouvons écrire en effet

$$2F(\alpha) = F(\alpha) + F(-\alpha),$$

ou

$$\begin{aligned} 2F(\alpha) &= \int_0^\pi [\log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) + \log(1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2)]\,dx \\ &= \int_0^\pi \log(1 - 2\alpha^2\cos 2x + \alpha^4)\,dx. \end{aligned}$$

Posons $2x = y$; il vient

$$2F(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \log(1 - 2\alpha^2\cos y + \alpha^4)\,dy + \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} \log(1 - 2\alpha^2\cos y + \alpha^4)\,dy$$

si dans la dernière intégrale on pose encore $y = 2\pi - z$, on trouve

$$\int_\pi^{2\pi} \log(1 - 2\alpha^2\cos y + \alpha^4)\,dy = \int_0^\pi \log(1 - 2\alpha^2\cos z + \alpha^4)\,dz$$

et par suite

$$2F(\alpha) = \frac{1}{2}F(\alpha^2) + \frac{1}{2}F(\alpha^2) = F(\alpha^2).$$

De la formule précédente on déduit successivement

$$F(\alpha) = \frac{1}{2}F(\alpha^2) = \frac{1}{4}F(\alpha^4)\ldots = \frac{1}{2^n}F(\alpha^{2^n}).$$

Remarquons maintenant que si $|\alpha|$ est inférieur à un, α^{2^n} tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; il en est de même de $F(\alpha^{2^n})$, car le logarithme tend vers zéro. On a donc, si $|\alpha| < 1$,

$$F(\alpha) = 0.$$

Lorsque $|\alpha|$ est supérieur à un, on a, en posant $\alpha = \frac{1}{\beta}$,

$$F(\alpha) = \int_0^\pi \log\left(1 - \frac{2\cos x}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right) dx$$
$$= \int_0^\pi \log(1 - 2\beta\cos x + \beta^2)\,dx - \pi\log\beta^2;$$

$|\beta|$ étant inférieur à un, il reste

$$F(\alpha) = -\pi\log\beta^2 = \pi\log\alpha^2.$$

L'intégrale définie $F(\alpha)$ est, comme on voit, une fonction discontinue de α, pour les valeurs $\alpha = \pm 1$.

141. Valeur approchée de $\log\Gamma(n+1)$. — On peut employer aussi des artifices très variés pour avoir, sinon la valeur exacte, du moins une valeur approchée d'une intégrale définie. Nous allons en donner un exemple. On a, par définition

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx;$$

la fonction $x^n e^{-x}$ est maximum pour $x = n$ et sa valeur maximum est $n^n e^{-n}$. Lorsque x croît de 0 à n, $x^n e^{-x}$ croît de 0 à $n^n e^{-n} (n > 0)$, et lorsque x croît de n à $+\infty$, $x^n e^{-x}$ décroît de $n^n e^{-n}$ à 0. La fonction $n^n e^{-n} e^{-t^2}$ croît de même de 0 à $n^n e^{-n}$ lorsque t croît de $-\infty$ à 0, pour décroître ensuite de $n^n e^{-n}$ à 0, lorsque t croît de 0 à $+\infty$. Nous pouvons donc, en faisant le changement de variable

$$(42) \qquad x^n e^{-x} = n^n e^{-n} e^{-t^2},$$

faire correspondre les valeurs de x et de t de telle façon que, t croissant de $-\infty$ à $+\infty$, x croisse de 0 à $+\infty$.

Il nous faut encore calculer $\frac{dx}{dt}$. En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de la formule (42), il vient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{x-n}.$$

D'autre part, on a aussi, d'après la formule (42),

$$t^2 = x - n - n\log\left(\frac{x}{n}\right).$$

Posons, pour faciliter le calcul, $x = n + z$ et développons $\log\left(1 + \frac{z}{n}\right)$

par la formule de Taylor limitée au second terme; nous trouvons

$$t^2 = z - n\left[\frac{z}{n} - \frac{z^2}{2n^2\left(1+\theta\frac{z}{n}\right)^2}\right] = \frac{nz^2}{2(n+\theta z)^2},$$

θ étant compris entre zéro et 1. On en tire successivement

$$\frac{n}{z} + \theta = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

$$\frac{2tx}{x-n} = 2t\left(\frac{n}{z}+1\right) = 2\left[\sqrt{\frac{n}{2}} + (1-\theta)t\right],$$

et la formule du changement de variable donne, par suite,

$$\Gamma(n+1) = 2n^n e^{-n}\sqrt{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt + 2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(1-\theta)t\,dt.$$

La première intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Quant à la seconde intégrale, on ne peut la calculer exactement, puisqu'on ne connaît pas θ, mais il est facile d'en trouver une limite. En effet, entre $-\infty$ et zéro, tous les éléments sont négatifs; ils sont tous positifs de zéro à $+\infty$. D'ailleurs, chacune des intégrales $\int_{-\infty}^{0}$, $\int_0^{+\infty}$ est moindre en valeur absolue que $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}$. Nous pouvons donc écrire

$$(43)\qquad \Gamma(n+1) = \sqrt{2n}\,n^n e^{-n}\left(\sqrt{\pi} + \frac{\omega}{\sqrt{2n}}\right),$$

ω étant compris entre -1 et $+1$.

Si n est un nombre très grand, $\frac{\omega}{\sqrt{2n}}$ est très petit, et, en prenant pour valeur approchée de $\Gamma(n+1)$,

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi},$$

l'erreur relative est très petite, quoique l'erreur absolue puisse être considérable. En prenant les logarithmes des deux membres de la formule (43), on a aussi

$$(44)\qquad \log\Gamma(n+1) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \varepsilon,$$

ε étant très petit, lorsque n est très grand. En négligeant ε, on a ce qu'on

appelle la *valeur asymptotique* de $\log\Gamma(n+1)$. Cette formule est intéressante, parce qu'elle nous fait connaître l'ordre de grandeur d'une factorielle.

142. Théorème de d'Alembert. — La formule d'intégration sous le signe $\int$ s'applique à toute fonction $f(x, y)$ continue dans le rectangle d'intégration. Si, en calculant de deux façons différentes l'intégrale double d'une fonction $f(x, y)$, on obtient deux résultats inégaux, on peut donc affirmer que cette fonction est discontinue en un point au moins du champ d'intégration. Gauss a déduit de cette remarque une élégante démonstration du théorème de d'Alembert.

Soit $F(z)$ un polynome entier en z de degré m, dont nous supposerons, pour fixer les idées, les coefficients réels. En remplaçant z par

$$\rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

et séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on peut écrire

$$F(z) = P + iQ,$$

en posant

$$P = A_0\rho^m \cos m\omega + A_1\rho^{m-1}\cos(m-1)\omega + \ldots,$$
$$Q = A_0\rho^m \sin m\omega + A_1\rho^{m-1}\sin(m-1)\omega + \ldots.$$

Soit V la fonction $\operatorname{arc\,tang}\frac{P}{Q}$; on a

$$\frac{\partial V}{\partial\rho} = \frac{Q\frac{\partial P}{\partial\rho} - P\frac{\partial Q}{\partial\rho}}{P^2+Q^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial\omega} = \frac{Q\frac{\partial P}{\partial\omega} - P\frac{\partial Q}{\partial\omega}}{P^2+Q^2},$$

et, sans qu'il soit nécessaire de développer le calcul, on voit que la dérivée seconde $\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\omega}$ est de la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\omega} = \frac{M}{(P^2+Q^2)^2},$$

M étant une fonction continue de ρ et de ω. Cette dérivée seconde ne peut devenir discontinue que pour les systèmes de valeurs (ρ, ω) qui annulent à la fois P et Q, c'est-à-dire pour les racines de l'équation $F(z) = 0$. Si donc on démontre que les deux intégrales

$$(45) \qquad \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\omega}\,d\rho, \quad \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\omega}\,d\omega$$

sont inégales, pour une valeur donnée de R, on peut en conclure que l'équation $F(z) = 0$ a au moins une racine de module inférieur à R. Or la seconde intégrale est toujours nulle, car on a $\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\omega}\,d\omega = \left[\frac{\partial V}{\partial\rho}\right]_{\omega=0}^{\omega=2\pi}$,

et $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ est une fonction périodique de ω, de période 2π. Calculons de même la première intégrale; on a

$$\int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \omega}\, d\rho = \left[\frac{\partial V}{\partial \omega}\right]_{\rho=0}^{\rho=R},$$

et un calcul facile montre que $\frac{\partial V}{\partial \omega}$ est de la forme

$$\frac{\partial V}{\partial \omega} = \frac{-\, m A_0^2 \rho^{2m} + \ldots}{A_0^2 \rho^{2m} + \ldots},$$

les termes non écrits étant de degré inférieur à $2m$ en ρ, et le numérateur n'ayant pas de terme indépendant de ρ. Lorsque ρ augmente indéfiniment, le second membre a pour limite $-m$; on peut donc choisir R assez grand pour que la valeur de $\frac{\partial V}{\partial \omega}$, pour $\rho = R$, soit égale à $-m+\varepsilon$, ε étant inférieur à m en valeur absolue. L'intégrale $\int_0^{2\pi}(-m+\varepsilon)\,d\omega$ est évidemment négative et, par conséquent, la première des intégrales (45) ne peut être nulle.

EXERCICES.

1. En un point quelconque M de la chaînette définie en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on mène la tangente que l'on prolonge jusqu'à son point de rencontre T avec l'axe Ox, puis on fait tourner la figure autour de cet axe. Exprimer la différence des aires décrites par l'arc de chaînette AM, A étant le sommet de la chaînette, et par la tangente MT : 1° en fonction de l'abscisse du point M; 2° en fonction de l'abscisse du point T.

[Licence : Paris, 1880.]

2. Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires. Une surface réglée est engendrée de la manière suivante : le plan zOA tourne autour de Oz; la génératrice D, située dans ce plan, fait avec Oz un angle constant dont la tangente est λ; elle intercepte sur OA un segment OC égal à $\lambda a \theta$, a désignant une ligne donnée et θ l'angle des deux plans zOx, zOA.

1° Calculer le volume limité par la surface réglée et les plans xOy, zOx, zOA, l'angle θ des deux derniers étant moindre que 2π;

2° Calculer l'aire de la portion de surface limitée par les plans xOy, zOx, zOA.

[LICENCE : Paris, juillet, 1882.]

3. Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires. Calculer le volume limité par la surface du paraboloïde elliptique qui a pour équation

$$\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2},$$

le plan des xy et la surface du cylindre $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

[LICENCE : Paris, 1882.]

4. Évaluer l'aire du quadrilatère curviligne déterminé par les quatre coniques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

qui correspondent aux valeurs $\frac{c^2}{3}$, $\frac{2c^2}{3}$, $\frac{4c^2}{3}$, $\frac{5c^2}{3}$ de λ.

[LICENCE : Besançon, 1885.]

5. Les axes étant rectangulaires, on considère la courbe

$$y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x),$$

x variant de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{4}$. On demande de calculer :

1° L'aire comprise entre cette courbe et l'axe des x;

2° Le volume engendré par cette aire en tournant autour de Ox;

3° La surface qui limite ce volume.

[LICENCE : Montpellier, 1898.]

6. Les axes Ox et Oy étant rectangulaires et A et B étant deux points de l'axe Oy, calculer l'intégrale curviligne

$$\int [\varphi(y)e^x - my]\,dx + [\varphi'(y)e^x - m]\,dy$$

prise le long d'un chemin quelconque AMB, allant du point A au point B, mais limitant avec AB une aire AMBA de grandeur donnée S; m désigne une constante, et $\varphi(y)$ une fonction continue ainsi que sa dérivée $\varphi'(y)$.

[LICENCE : Nancy, 1895.]

7. En évaluant de deux façons différentes l'intégrale double

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin ax\,dy\,dx,$$

démontrer que l'on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2}$, pourvu que a ne soit pas nul.

8. Trouver l'aire de la portion d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde de révolution, comprise entre deux parallèles.

*9. *Aire d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.* — La moitié de l'aire totale $\mathcal{A}$ est égale à l'intégrale double

$$\frac{\mathcal{A}}{2} = \iint \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2-c^2}{a^4}x^2 - \frac{b^2-c^2}{b^4}y^2}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy,$$

étendue à l'intérieur de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Parmi les moyens employés pour ramener cette intégrale double à des intégrales elliptiques, un des plus simples, dû à Catalan, consiste dans la transformation du n° 125. En désignant par v la fonction sous le signe $\iint$, et faisant varier v de 1 à $+\infty$, on trouve que l'intégrale double est égale à la limite, pour l infini, de la différence

$$\frac{\pi abl(l^2-1)}{\sqrt{\left(l^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(l^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}} - \pi ab\int_1^l \frac{(v^2-1)\,dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}};$$

cette expression se présente sous forme indéterminée, mais on peut écrire

$$\int_1^l \frac{v^2\,dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}} = \left[\frac{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}{v}\right]_1^l$$
$$+\int_1^l \frac{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}$$

et l'expression écrite plus haut a pour limite, comme on le voit aisément,

$$\pi ab\left[\frac{c^2}{ab} + \int_1^{+\infty}\frac{dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\int_1^{+\infty}\frac{dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}\right].$$

*10. Si du centre d'un ellipsoïde d'axes $2a$, $2b$, $2c$, on abaisse des perpendiculaires sur les plans tangents à cet ellipsoïde, l'aire de la surface podaire est égale à l'aire d'un ellipsoïde dont les demi-axes seraient $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{ab}{c}$.

[WILLIAM ROBERTS, *Journal de Liouville*, t. XI, 1re série, p. 81.]

11. En évaluant de deux façons différentes l'intégrale double de

$$(x-y)^n f(y)$$

étendue à l'aire du triangle formé par les droites $y = x_0$, $y = x$, $x = X$, démontrer que l'on a

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{x_0}^{x} (x-y)^n f(y)\, dy = \int_{x_0}^{X} \frac{(X-y)^{n+1}}{n+1} f(y)\, dy.$$

En déduire la relation

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-y)^n f(y)\, dy.$$

Établir de même la formule

$$\int_{x_0}^{x} x\, dx \int_{x_0}^{x} x\, dx \ldots \int_{x_0}^{x} x\, dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \int_{x_0}^{x} (x^2-y^2)^n f(y)\, dy,$$

et vérifier ces formules au moyen de la différentiation sous le signe $\int$.



CHAPITRE VII.

INTÉGRALES MULTIPLES.
INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

I. — INTÉGRALES MULTIPLES. — CHANGEMENTS DE VARIABLES.

143. Intégrales triples. — Soit $F(x, y, z)$ une fonction continue lorsque le point M de coordonnées rectangulaires (x, y, z) reste dans une portion finie de l'espace (E), limitée par une ou plusieurs surfaces fermées. Imaginons cette portion de l'espace décomposée en portions plus petites (e_1), (e_2), ... (e_n), de volumes v_1, v_2, ... v_n, et soient (ξ_i, η_i, ζ_i) les coordonnées d'un point quelconque m_i de la région (e_i). La somme

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v_i$$

tend vers une limite lorsque le nombre des régions (e_i) augmente indéfiniment, de façon que les dimensions de chacune d'elles tendent vers zéro. Cette limite est l'intégrale triple de la fonction $F(x, y, z)$, étendue à la portion (E) de l'espace, et on la représente par la notation

$$(2) \qquad \iiint_{(E)} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Nous n'aurions, pour démontrer l'existence de cette limite, qu'à répéter ce qui a été dit à propos des intégrales doubles. Les intégrales triples se présentent dans diverses questions de Mécanique, en particulier quand on cherche la masse ou le centre de gravité d'un corps solide. Supposons la région (E) remplie d'une substance hétérogène et soit $\mu(x, y, z)$ la densité en un point, c'est-à-dire la limite du rapport de la masse renfermée dans une sphère

de rayon infiniment petit, décrite du point (x, y, z) comme centre, au volume de cette sphère. Si μ_1 et μ_2 sont les valeurs maximum et minimum de μ dans la région (e_i), il est clair que la masse renfermée dans cette région est comprise entre $\mu_1 v_i$ et $\mu_2 v_i$; elle est donc égale à $v_i F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, le point (ξ_i, η_i, ζ_i) étant un point convenablement choisi de (e_i). La masse totale est donc égale à l'intégrale triple $\iiint \mu\, dx\, dy\, dz$, prise dans la région (E).

Le calcul d'une intégrale triple se ramène au calcul de trois intégrales simples successivement. Supposons d'abord que la région (E) soit un parallélépipède rectangle limité par les six plans $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$, $z = z_0$, $z = Z$. Nous décomposerons (E) en petits parallélépipèdes par des plans parallèles aux trois plans de coordonnées. Le volume de l'un d'eux a pour expression $(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})(z_l - z_{l-1})$, et nous avons à chercher la limite de la somme

$$(3)\ S = \sum_i \sum_k \sum_l F(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})(z_l - z_{l-1})$$

où le point $(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})$ est un point quelconque du petit parallélépipède correspondant. Évaluons d'abord la portion de S qui provient de la file d'éléments compris entre les quatre plans

$$x = x_{i-1}, \qquad x = x_i, \qquad y = y_{k-1}, \qquad y = y_k,$$

et prenons tous les points $(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})$ sur la droite $x = x_{i-1}$, $y = y_{k-1}$. Cette file de parallélépipèdes donne une somme

$$(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})[F(x_{i-1}, y_{k-1}, \zeta_1)(z_1 - z_0) + \ldots],$$

et nous pouvons comme plus haut (n° 123) choisir les ζ de façon que la somme entre parenthèses soit égale à l'intégrale simple

$$\Phi(x_{i-1}, y_{k-1}) = \int_{z_0}^{Z} F(x_{i-1}, y_{k-1}, z)\, dz.$$

Nous n'avons plus alors qu'à chercher la limite de la somme

$$\sum_i \sum_k (x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})\Phi(x_{i-1}, y_{k-1}),$$

limite qui est précisément l'intégrale double

$$\iint \Phi(x, y)\, dx\, dy,$$

étendue au rectangle formé par les droites $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$. L'intégrale triple est donc égale à

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \Phi(x, y)\, dy,$$

ou, en remplaçant $\Phi(x, y)$ par sa valeur, à

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\, dz.$$

Le sens de ce symbole est bien clair. On effectue la première intégration en regardant x et y comme constants; le résultat est une fonction des deux variables x et y, que l'on intègre ensuite entre les limites y_0 et Y, en regardant x comme constant et y comme variable. Le résultat de cette seconde intégration ne dépend plus que de x, et on l'intègre de nouveau entre les limites x_0 et X.

Il y a évidemment autant de manières d'effectuer le calcul qu'il y a de permutations de 3 lettres, c'est-à-dire 6. On peut, par exemple, écrire l'intégrale triple

$$\int_{z_0}^{Z} dz \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} F(x, y, z)\, dy = \int_{z_0}^{Z} \Psi(z)\, dz,$$

en désignant par $\Psi(z)$ l'intégrale double de $F(x, y, z)$ étendue au rectangle formé par les droites $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$. On serait encore conduit à cette expression en commençant par évaluer la portion de la somme S provenant de la tranche de parallélépipèdes comprise entre les deux plans voisins $z = z_{l-1}$, $z = z_l$; en prenant convenablement les points (ξ, η, ζ), cette tranche donne, dans S, la somme

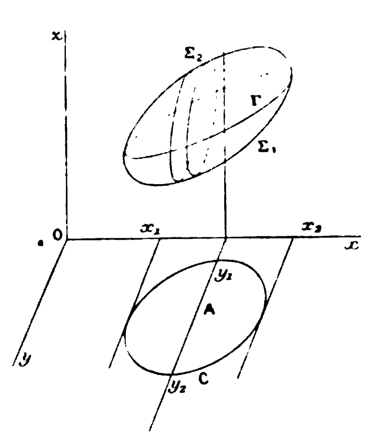
$$\Psi(z_{l-1})(z_l - z_{l-1}),$$

et le raisonnement s'achève comme plus haut.

144. Considérons maintenant une région de l'espace limitée d'une façon quelconque; on commence par la décomposer en régions telles qu'une droite parallèle à une direction fixe conve-

nablement choisie ne rencontre la surface limite qu'en deux points. Nous nous bornerons au cas d'un volume limité par une surface qu'une parallèle à Oz ne peut rencontrer en plus de deux points. Les points de cette surface se projettent sur le plan xOy à l'intérieur d'une aire A limitée par un contour fermé C, et à tout point (x, y) de A correspondent deux points de la surface limitante, de coordonnées $z_1 = \varphi_1(x, y)$ et $z_2 = \varphi_2(x, y)$. Les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues à l'intérieur du contour C, et nous


Fig 32



supposerons $\varphi_1 < \varphi_2$. On décompose encore le volume considéré par des plans parallèles aux plans de coordonnées, mais il y a ici des parties irrégulières qui sont des portions de parallélépipèdes. La somme des éléments provenant de la file comprise entre les 4 plans $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = y_{k-1}$, $y = y_k$ a encore pour expression (nº **124**)

$$(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})\left[\int_{z_1}^{z_2} F(x_{i-1}, y_{k-1}, z)\, dz + \varepsilon_{ik}\right],$$

la valeur absolue de ε_{ik} étant moindre que tout nombre donné à l'avance ε pourvu que la distance des plans parallèles voisins soit suffisamment petite. La somme $\sum_i \sum_k \varepsilon_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})$ a zéro pour limite, et l'intégrale triple cherchée est égale à l'inté-

grale double

$$\iint_{(A)} \Phi(x, y)\, dx\, dy,$$

étendue à la région (A) limitée par le contour C, de la fonction $\Phi(x, y)$ des variables x, y,

$$\Phi(x, y) = \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz.$$

Si une parallèle à l'axe Oy ne rencontre le contour C qu'en deux points de coordonnées $y_1 = \psi_1(x)$, $y_2 = \psi_2(x)$, lorsque x varie de x_1 à x_2, l'intégrale triple a aussi pour valeur

$$(5) \qquad \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz.$$

Les limites z_1 et z_2 dépendent à la fois de x et de y, les limites y_1 et y_2 de x seulement et enfin les limites x_1 et x_2 sont des constantes.

On peut encore intervertir l'ordre des intégrations, mais les limites sont en général tout à fait différentes, suivant l'ordre dans lequel les intégrations sont effectuées.

Remarque. — L'intégrale double

$$\Psi(x) = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz$$

est étendue à la section faite dans le volume considéré par le plan d'abscisse x, parallèle à $x = 0$, et la formule (5) peut s'écrire

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi(x)\, dx.$$

C'est encore le résultat que l'on obtiendrait en évaluant d'abord la somme des éléments provenant de la tranche comprise entre les deux plans $x = x_{i-1}$, $x = x_i$. En prenant convenablement les points (ξ, η, ζ), cette tranche donne pour somme le produit

$$\Psi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Exemple. — Soit à évaluer l'intégrale triple $\iiint z\, dx\, dy\, dz$, étendue

au huitième de la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$, compris dans le trièdre $Oxyz$. Si l'on intègre d'abord par rapport à z, puis par rapport à y et enfin par rapport à x, les limites sont les suivantes : x et y étant donnés, z peut varier de zéro à $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$; x étant donné, y peut varier de zéro à $\sqrt{R^2-x^2}$, et x varie de zéro à R. On a donc

$$\iiint z\,dx\,dy\,dz = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz,$$

et l'on en tire successivement

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2),$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2-x^2-y^2)dy = \left[\frac{1}{2}(R^2-x^2)y-\frac{1}{6}y^3\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} - \frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}},$$

et il reste à calculer l'intégrale définie $\frac{1}{3}\int_0^R (R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$, qui devient, en posant $x = R\cos\varphi$,

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \sin^4\varphi\,d\varphi.$$

L'intégrale triple a donc pour valeur (n° 116) $\frac{\pi R^4}{16}$.

145. Changements de variables. — Soient

$$(6)\qquad \begin{cases} x = f(u, v, w), \\ y = \varphi(u, v, w), \\ z = \psi(u, v, w), \end{cases}$$

des formules de transformations qui font correspondre, point par point, à la région (E) de l'espace une autre région (E_1); on considère u, v, w comme les coordonnées rectangulaires d'un point par rapport à un autre système d'axes rectangulaires, en général différent du premier. Si $F(x, y, z)$ est une fonction continue dans la région (E), on a, d'une manière générale,

$$(7)\qquad \begin{cases} \iiint_{(E)} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ = \iiint_{(E_1)} F[f(u, v, w), \ldots]\left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw, \end{cases}$$

les deux intégrales étant prises respectivement dans les ré-

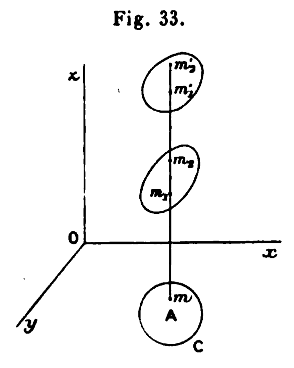
gions (E) et (E_1). C'est la formule du changement de variables dans les intégrales triples.

Pour démontrer que la formule (7) est générale, on commence par remarquer que, si elle est établie pour deux ou plusieurs changements de variables particuliers, elle est vraie aussi pour le changement de variables obtenu en les effectuant successivement, d'après les propriétés connues du déterminant fonctionnel (n° 29). Si elle s'applique à plusieurs régions de l'espace, elle s'applique aussi à la région obtenue en les ajoutant. Cela posé, nous démontrerons, comme dans le cas d'une intégrale double, que la formule s'applique à toute transformation où l'on ne change qu'une des variables indépendantes, par exemple à une transformation de la forme

$$(8) \qquad x = x', \qquad y = y', \qquad z = \psi(x', y', z').$$

Nous supposerons que les deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ sont rapportés au même système d'axes et qu'une parallèle à Oz ne rencontre qu'en deux points la surface qui limite la région (E).

Fig. 33.



Les formules (8) font correspondre à cette surface une autre surface limitant la région (E'), et le cylindre circonscrit à ces deux surfaces, ayant ses génératrices parallèles à Oz, est coupé par le plan $z = 0$ suivant une courbe fermée C. Tout point m de la région A, intérieure au contour C, est la projection de deux points m_1 et m_2 de la première surface, de coordonnées z_1 et z_2, et de deux points m'_1, m'_2 de la seconde surface de coordonnées z'_1, z'_2.

Nous choisissons les notations de façon que l'on ait $z_1 < z_2$, et $z'_1 < z'_2$. Au point m_1, les formules (8) font correspondre le point m'_1 ou le point m'_2. Pour distinguer les deux cas, il suffit de consulter le signe de $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$. Si $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$ est positif, z augmente avec z'; les points m_1 et m'_1 se correspondent, ainsi que les deux points m_2 et m'_2. Au contraire, si $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$ est négatif, z diminue quand z' augmente; m_1 correspond à m'_2 et m_2 à m'_1. Dans le premier cas, on a

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz = \int_{z'_1}^{z'_2} F[x, y, \psi(x, y, z')] \frac{\partial\psi}{\partial z'}\, dz';$$

dans le second cas on a, au contraire,

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz = -\int_{z'_1}^{z'_2} F[x, y, \psi(x, y, z')] \frac{\partial\psi}{\partial z'}\, dz'.$$

Dans les deux cas, nous pouvons écrire

$$(9) \qquad \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz = \int_{z'_1}^{z'_2} F[x, y, \psi(x, y, z')] \left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right| dz'.$$

Si nous prenons maintenant les intégrales doubles des deux membres de cette égalité dans la région A, l'intégrale double

$$\iint_{(A)} dx\, dy \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz,$$

n'est autre chose que l'intégrale triple $\iiint F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, prise dans la portion (E) de l'espace. De même l'intégrale double du second membre de (9) est égale à l'intégrale triple de

$$F[x', y', \psi(x', y', z')] \left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right|,$$

prise dans (E'), comme on le voit en remplaçant x par x', et y par y'. On a donc, dans ce cas particulier,

$$\iiint_{(E)} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \iiint_{(E')} F[x', y', \psi(x', y', z')] \left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right| dx'\, dy'\, dz';$$

or ici le déterminant $\frac{D(x, y, z)}{D(x', y', z')}$ se réduit à $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$. La formule (7) est donc établie pour les changements de variables de la forme (8).

La formule générale (7) s'applique encore aux changements de variables définis par les formules

$$(10) \qquad x = f(x', y', z'), \qquad y = \varphi(x', y', z'), \qquad z = z',$$

où la variable z ne change pas. Nous supposons que ces formules font correspondre point par point deux régions (E), (E′) de l'espace, et, en particulier, que les sections R, R′ faites dans (E), (E′) par un même plan parallèle au plan $z = 0$ se correspondent point par point. On a donc, d'après la formule du changement de variables dans une intégrale double,

$$(11) \quad \begin{cases} \displaystyle\iint_{(R)} F(x, y, z)\,dx\,dy \\ \displaystyle = \iint_{(R')} F[f(x', y', z'), \varphi(x', y', z'), z'] \left|\frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')}\right| dx'\,dy'; \end{cases}$$

les deux membres de cette égalité dépendent seulement de la variable $z = z'$. Si l'on intègre de nouveau entre les limites z_1 et z_2, entre lesquelles peut varier z dans la région (E), l'égalité obtenue peut s'écrire

$$(12) \quad \begin{cases} \displaystyle\iiint_{(E)} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ \displaystyle = \iiint_{(E')} F[f(x', y', z'), \varphi(x', y', z'), z'] \left|\frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')}\right| dx'\,dy'\,dz'. \end{cases}$$

Or on a ici $\frac{D(x, y, z)}{D(x', y', z')} = \frac{D(x, y)}{D(x', y')}$, de sorte que la formule (7) s'applique encore aux changements de variables de la forme (10).

Nous allons montrer maintenant que tout changement de variables

$$(13) \quad x = f(x_1, y_1, z_1), \qquad y = \varphi(x_1, y_1, z_1), \qquad z = \psi(x_1, y_1, z_1)$$

peut s'obtenir par une combinaison des précédents. Posons, en effet, $x' = x_1$, $y' = y_1$, $z' = z$; la dernière équation (13) peut s'écrire $z' = \psi(x', y', z_1)$ et l'on en tire $z_1 = \pi(x', y', z')$. Les formules (13) peuvent alors être remplacées par le système des six

équations

(14) $x = f[x', y', \pi(x', y', z')], \qquad y = \varphi[x', y', \pi(x', y', z')], \qquad z = z',$

(15) $x' = x_1, \qquad y' = y_1, \qquad z' = \psi(x_1, y_1, z_1);$

la formule générale (7) s'applique, on vient de le voir, aux transformations définies par les formules (14) et (15), et par conséquent aussi au changement de variables (13).

On pourrait encore, comme le lecteur le prouvera aisément, remplacer la transformation générale (13) par une suite de trois transformations telles que (8).

146. Élément de volume. — Faisons $F(x, y, z) = 1$ dans la formule (7); il vient

$$\iiint_{(E)} dx\,dy\,dz = \iiint_{(E_1)} \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw.$$

Le premier membre est égal au volume V de la portion (E) de l'espace et, en appliquant le théorème de la moyenne à l'intégrale du second membre, on parvient à la relation

$$V = V_1 \left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)}\right|_{(\xi, \eta, \zeta)}, \tag{16}$$

V_1 étant le volume de (E_1) et ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de (E_1). Cette formule est entièrement analogue à la formule (17) du Chapitre VI et nous montre que le déterminant fonctionnel est la limite du rapport des volumes infiniment petits correspondants.

Si dans les formules (6) on attribue à l'une des variables u, v, w une valeur constante et qu'on fasse varier les deux autres, on obtient trois familles de surfaces $u =$ const, $v =$ const, $w =$ const, qui décomposent la région (E) en petits solides à six faces, analogues aux parallélépipèdes de tout à l'heure. Le volume du petit solide, compris entre les surfaces (u), $(u + du)$, (v), $(v + dv)$, (w), $(w + dw)$, où du, dv, dw sont positifs, a pour expression, d'après la formule (16),

$$\left\{\left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)}\right| + \varepsilon\right\} du\,dv\,dw,$$

ε étant infiniment petit, en même temps que du, dv, dw. On

peut négliger, comme on l'a déjà expliqué plusieurs fois (n° 128) le terme $\varepsilon\, du\, dv\, dw$, et le produit

$$dV = \left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw \tag{17}$$

s'appelle l'*élément de volume* dans le système de coordonnées curvilignes (u, v, w).

Soit ds^2 le carré de l'élément linéaire dans le même système de coordonnées; on déduit des formules (6)

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw, \qquad dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \ldots,$$

et, en élevant au carré et ajoutant, il vient

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = H_1\, du^2 + H_2\, dv^2 + H_3\, dw^2 + 2F_1\, dv\, dw \\ + 2F_2\, du\, dw + 2F_3\, du\, dv, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

en posant

$$H_1 = S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad H_2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \qquad H_3 = S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2, \tag{19}$$

$$F_1 = S\,\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}, \qquad F_2 = S\,\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}, \qquad F_3 = S\,\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

le signe S indique toujours qu'on doit remplacer x par y, puis par z, et faire la somme. La formule qui donne dV se déduit très aisément de la formule qui donne ds^2; on trouve, en effet, en faisant le carré du déterminant par la règle habituelle,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix} = M,$$

et l'élément de volume est égal à $\sqrt{M}\, du\, dv\, dw$.

Considérons en particulier le cas très important où les surfaces coordonnées (u), (v), (w) forment un système triple orthogonal, c'est-à-dire où les trois surfaces qui passent par un point quelconque de l'espace s'y coupent deux à deux à angle droit. Les tangentes aux courbes d'intersection des trois surfaces prises deux à deux forment alors un trièdre trirectangle; il faut donc

que l'on ait $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, et ces conditions sont suffisantes. Les formules qui donnent ds^2 et dV prennent alors la forme simple

$$(20)\quad ds^2 = H_1 du^2 + H_2 dv^2 + H_3 dw^2, \qquad dV = \sqrt{H_1 H_2 H_3}\, du\, dv\, dw.$$

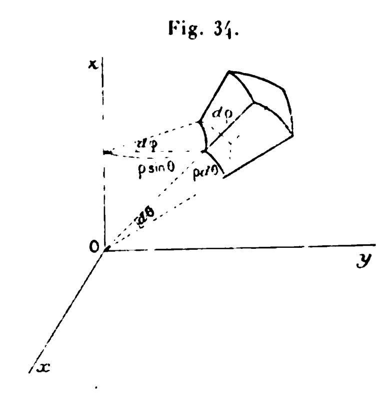
On peut retrouver facilement ces formules par quelques considérations de géométrie infinitésimale. Supposons du, dv, dw très petits, et assimilons le solide élémentaire défini tout à l'heure à un petit parallélépipède rectangle à faces planes. Les arêtes de ce parallélépipède sont respectivement $\sqrt{H_1}\,du$, $\sqrt{H_2}\,dv$, $\sqrt{H_3}\,dw$, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur. Nous aurons les formules (20) en prenant pour élément linéaire et pour élément de volume la diagonale et le volume de ce solide élémentaire. L'aire d'une des faces $\sqrt{H_1 H_2}\,du\,dv$ représente de même l'élément d'aire de la surface (w).

Prenons pour exemple les coordonnées polaires dans l'espace

$$(21)\qquad x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = \rho \cos\theta;$$

ρ représente la distance du point $M(x, y, z)$ à l'origine, θ l'angle que fait OM avec Oz, et φ l'angle que fait avec Ox la trace du plan MOz sur le plan $z = 0$. Pour obtenir tous les points de

Fig. 34.



l'espace, il suffit de faire varier ρ de 0 à $+\infty$, θ de 0 à π, et φ de 0 à 2π. Des formules (21) on déduit, en faisant le calcul,

$$(22)\qquad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

et par suite

$$dV = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi. \tag{23}$$

On retrouve aisément ces formules sans aucun calcul. Les trois familles de surfaces (ρ), (θ), (φ) sont respectivement des sphères concentriques à l'origine, des cônes de révolution autour de Oz ayant l'origine pour sommet et des plans passant par Oz. Ces surfaces forment bien un système triple orthogonal, et les dimensions du solide élémentaire sont, comme on le voit immédiatement sur la figure, $d\rho$, $\rho\, d\theta$, $\rho \sin\theta \, d\varphi$; ce qui conduit aux formules (22) et (23).

Pour calculer au moyen des variables ρ, θ, φ une intégrale triple étendue à la région limitée par une surface fermée S qui n'est rencontrée qu'en un point par une demi-droite issue de l'origine, et qui renferme l'origine à l'intérieur, on devra faire varier ρ de o à R, si $R = f(\theta, \varphi)$ est l'équation de la surface, puis θ de o à π et φ de o à 2π. Par exemple le volume limité par cette surface est égal à l'intégrale triple

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} \rho^2 \sin\theta \, d\rho\,;$$

la première intégration s'effectue immédiatement et il reste

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R^3 \sin\theta}{3} \, d\theta.$$

On emploie aussi quelquefois les coordonnées semi-polaires r, ω, z, où $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$. Dans ce cas, on a

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + dz^2,$$

et

$$dV = r \, d\omega \, dr \, dz.$$

147. Coordonnées elliptiques. — Les surfaces représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} - 1 = 0, \tag{24}$$

où λ est un paramètre variable et $a > b > c > 0$, forment une famille de quadriques homofocales. Par chaque point de l'espace, il passe trois surfaces de cette famille, un ellipsoïde, un hyperboloïde à deux nappes et un

hyperboloïde à une nappe, car l'équation (24) a toujours une racine λ_1 comprise entre b et c, une racine λ_2 comprise entre a et b, et une racine λ_3 supérieure à a; ces trois racines λ_1, λ_2, λ_3 sont appelées *coordonnées elliptiques* du point de coordonnées rectangulaires x, y, z. Deux surfaces quelconques de la famille sont orthogonales, car si l'on remplace λ par λ_1, puis par λ_2, dans l'équation (24), et qu'on les retranche membre à membre, il vient, en divisant par $\lambda_1 - \lambda_2$,

$$(25)\qquad \frac{x^2}{(\lambda_1-a)(\lambda_2-a)}+\frac{y^2}{(\lambda_1-b)(\lambda_2-b)}+\frac{z^2}{(\lambda_1-c)(\lambda_2-c)}=0,$$

relation qui démontre l'orthogonalité des deux surfaces (λ_1) et (λ_2).

Pour avoir facilement x, y, z en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, remarquons que l'on doit avoir identiquement

$$\begin{aligned}(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)-x^2(\lambda-b)(\lambda-c)-y^2(\lambda-a)(\lambda-c)\\ -z^2(\lambda-a)(\lambda-b)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3);\end{aligned}$$

en faisant successivement $\lambda = a$, $\lambda = b$, $\lambda = c$ dans cette identité, on en tire

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} x^2&=\frac{(\lambda_3-a)(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{(a-b)(a-c)},\\ y^2&=\frac{(\lambda_3-b)(\lambda_2-b)(b-\lambda_1)}{(a-b)(b-c)},\\ z^2&=\frac{(\lambda_3-c)(\lambda_2-c)(\lambda_1-c)}{(a-c)(b-c)}.\end{aligned}\right.$$

On déduit de là, en prenant les dérivées logarithmiques,

$$\begin{aligned} dx&=\frac{x}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-a}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-a}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-a}\right),\\ dy&=\frac{y}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-b}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-b}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-b}\right),\\ dz&=\frac{z}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-c}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-c}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-c}\right);\end{aligned}$$

en faisant la somme des carrés, les termes en $d\lambda_1 d\lambda_2$, $d\lambda_2 d\lambda_3$, $d\lambda_1 d\lambda_3$ doivent disparaître d'après la relation (25) et les relations analogues. Le coefficient de $d\lambda_1^2$ est

$$\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(\lambda_1-a)^2}+\frac{y^2}{(\lambda_1-b)^2}+\frac{z^2}{(\lambda_1-c)^2}\right]$$

ou, en remplaçant x^2, y^2, z^2 par leurs valeurs et réduisant,

$$(27)\qquad M_1=\frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)(\lambda_1-c)},$$

et les coefficients M_2 et M_3 de $d\lambda_2^2$ et de $d\lambda_3^2$ s'en déduiront par permutation circulaire. L'élément de volume est alors $\sqrt{M_1 M_2 M_3}\, d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$.

148. Intégrales de Dirichlet. — Soit à calculer l'intégrale triple

$$\int\int\int x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \, dx\, dy\, dz,$$

prise à l'intérieur du tétraèdre formé par les quatre plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. Posons

$$x+y+z=\xi, \qquad y+z=\xi\eta, \qquad z=\xi\eta\zeta,$$

ξ, η, ζ étant trois nouvelles variables; ces formules peuvent encore s'écrire

$$\xi = x+y+z, \qquad \eta = \frac{y+z}{x+y+z}, \qquad \zeta = \frac{z}{y+z},$$

et l'on a inversement $x=\xi(1-\eta)$, $y=\xi\eta(1-\zeta)$, $z=\xi\eta\zeta$. Lorsque x, y, z sont positifs et que la somme $x+y+z$ est inférieure à un, ξ, η, ζ sont compris entre zéro et un. Inversement, lorsque ξ, η, ζ sont compris entre zéro et un, on a $x>0$, $y>0$, $z>0$, $x+y+z<1$. Le tétraèdre précédent est donc remplacé par un cube.

Pour calculer le déterminant fonctionnel, posons $X=\xi$, $Y=\xi\eta$, $Z=\xi\eta\zeta$, ce qui donne $x=X-Y$, $y=Y-Z$; $z=Z$, on a

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)} \cdot \frac{D(X,Y,Z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} = \xi^2\eta,$$

et l'intégrale triple devient, par ce changement de variables,

$$\int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p \zeta^r (1-\zeta)^q \, d\zeta.$$

La fonction sous le signe $\int$ est le produit d'une fonction de ξ par une fonction de η et une fonction de ζ. L'intégrale triple est donc le produit

$$\int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s d\xi \times \int_0^1 \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p d\eta \times \int_0^1 \zeta^r(1-\zeta)^q d\zeta,$$

ou, en introduisant les fonctions Γ [*voir* formule (33), p. 315],

$$\frac{\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \times \frac{\Gamma(q+r+2)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \times \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)};$$

en supprimant les facteurs communs, il reste, pour valeur de l'intégrale triple,

$$(28) \qquad \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

149. Formule de Green. — Il existe pour les intégrales triples une formule toute pareille à la formule (15) du n° **126**. Considérons d'abord

une surface fermée S qui n'est rencontrée qu'en deux points par une parallèle à l'axe Oz, et une fonction $R(x, y, z)$ continue, ainsi que $\frac{\partial R}{\partial z}$, à l'intérieur de cette surface. Tous les points de S se projettent sur le plan des xy suivant les points d'une aire A limitée par un contour fermé C. A tout point (x, y) de la région A correspondent deux points de coordonnées $z_1 = \varphi_1(x, y)$ et $z_2 = \varphi_2(x, y)$ de la surface S. Cette surface se trouve ainsi décomposée en deux morceaux S_1 et S_2; nous supposerons $z_1 < z_2$. Cela posé, l'intégrale triple

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz,$$

étendue à l'intérieur de la surface fermée S, peut s'obtenir en intégrant d'abord par rapport à z entre les limites z_1 et z_2 (n° 144). Le résultat de cette première intégration est $R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)$, et l'on doit ensuite prendre l'intégrale double

$$\iint [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)]\, dx\, dy,$$

dans la région A. Or l'intégrale double $\iint R(x, y, z_2)\, dx\, dy$ n'est autre chose que l'intégrale de surface (n° 135)

$$\iint_{(S_2)} R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

prise sur le côté supérieur de la surface S_2. De même, l'intégrale double de $R(x, y, z_1)$, changée de signe, est l'intégrale de surface

$$\iint_{(S_1)} R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

prise suivant le côté inférieur de S_1. En ajoutant les deux intégrales, nous pouvons donc écrire

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{(S)} R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

l'intégrale de surface étant prise suivant le côté *extérieur* de S.

Cette formule s'étend, comme on l'a déjà expliqué plusieurs fois, à un volume limité par une surface de forme quelconque, et, en permutant x, y, z, on en déduit deux autres formules toutes pareilles,

$$\iiint \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{(S)} P(x, y, z)\, dy\, dz,$$
$$\iiint \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_{(S)} Q(x, y, z)\, dz\, dx.$$

En les ajoutant, en obtient la formule générale de Green pour les intégrales triples

$$(29)\quad \begin{cases} \iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ = \iint_{(S)} P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R(x, y, z)\,dx\,dy, \end{cases}$$

les intégrales de surfaces étant toujours prises suivant le côté extérieur.

Si, par exemple, on fait $P = x$, $Q = R = 0$, ou $Q = y$, $P = R = 0$, ou $R = z$, $P = Q = 0$, on voit que le volume intérieur à S est égal à l'une quelconque des intégrales de surfaces

$$(29)' \qquad \iint_{(S)} x\,dy\,dz, \qquad \iint_{(S)} y\,dz\,dx, \qquad \iint_{(S)} z\,dx\,dy.$$

150. Intégrales multiples. — Les expressions purement analytiques que l'on a obtenues pour une intégrale double et une intégrale triple permettent d'étendre la définition aux fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Nous nous bornerons à indiquer sommairement la marche à suivre.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n variables indépendantes. Nous dirons, pour abréger, qu'un système de valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ attribuées à ces variables représente *un point* dans l'espace à n dimensions. Toute relation $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, dont le premier membre est une fonction continue, représentera de même une *surface;* si F est du premier degré, nous continuerons à dire que cette équation représente un plan. Considérons l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient certaines relations d'inégalité, telles que

$$(30) \qquad \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

nous dirons que cet ensemble de points forme un *domaine* D dans l'espace à n dimensions. Si, pour tous les points de ce domaine, la valeur absolue de l'une quelconque des coordonnées x_i reste inférieure à un nombre fixe, on dira que D est tout entier à distance finie. Si les inégalités qui définissent D ont la forme suivante

$$(31) \qquad x_1^0 \leqq x_1 \leqq x_1^1, \qquad x_2^0 \leqq x_2 \leqq x_2^1, \qquad \ldots, \qquad x_n^0 \leqq x_n \leqq x_n^1,$$

nous appellerons ce domaine un *prismatoïde,* et nous dirons que les n nombres positifs $x_i^1 - x_i^0$ sont les dimensions de ce prismatoïde. Enfin nous dirons qu'un point du domaine D appartient à la *frontière* de ce domaine, si l'une au moins des fonctions ψ_i des formules (30) est nulle pour les coordonnées de ce point.

Cela posé, soit D un domaine fini et $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction continue dans ce domaine. Imaginons D décomposé en domaines plus petits au moyen de plans parallèles aux plans $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Prenons l'un quelconque des prismatoïdes déterminés par ces plans, qui sont tout entiers intérieurs à D; soient $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ les dimensions de ce prismatoïde, et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les coordonnées d'un point quelconque appartenant au prismatoïde. La somme

$$S = \Sigma f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n, \tag{32}$$

étendue à tous les prismatoïdes qui sont tout entiers à l'intérieur du domaine D, tend vers une limite I lorsque le nombre de ces prismatoïdes augmente indéfiniment, de façon que toutes leurs dimensions tendent vers zéro. On appelle cette limite l'intégrale n^{ple} de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, prise dans le domaine D,

$$I = \int\int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n.$$

Le calcul d'une intégrale n^{ple} se ramène encore au calcul de n intégrales simples successives. Pour établir que la loi est générale, il suffit de montrer que, si elle est vraie pour une intégrale $(n-1)^{\text{ple}}$, elle s'étend à une intégrale n^{ple}. Considérons pour cela un point quelconque

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

de D; si nous faisons abstraction pour un moment de la variable x_n, le point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ décrit un certain domaine D' dans l'espace à $(n-1)$ dimensions. Nous supposerons que le domaine D satisfait à la condition suivante : à tout point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ intérieur à D', correspondent seulement deux points sur la frontière de D, de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n^{(1)})$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n^{(2)})$, les coordonnées $x_n^{(1)}$ et $x_n^{(2)}$ étant des fonctions continues des $(n-1)$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ à l'intérieur de D'. Si cette condition n'était pas satisfaite, on partagerait D en domaines assez petits pour vérifier séparément cette condition. Cela posé, considérons la file de prismatoïdes du domaine D, qui correspondent à un même point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; on démontrera, comme on l'a déjà fait pour une intégrale double (n° 124), que ces prismatoïdes donnent dans S une somme égale à

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_{n-1} \left[\int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, dx_n + \varepsilon \right],$$

$|\varepsilon|$ pouvant être rendu moindre que tout nombre positif pourvu que toutes les quantités Δx_i soient assez petites. Si nous posons

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, dx_n, \tag{33}$$

nous voyons que I est égal à la limite de la somme

$$\Sigma \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_{n-1},$$

c'est-à-dire à l'intégrale $(n-1)^{\text{ple}}$

$$(34) \qquad I = \iiint \ldots \int \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

dans le domaine D'. La loi étant supposée vraie pour une intégrale $(n-1)^{\text{ple}}$, elle est donc générale.

On pourrait encore opérer autrement. Considérons l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour lesquels la coordonnée x_n a une valeur donnée; le point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ décrit dans l'espace à $(n-1)$ dimensions un domaine δ, et l'on voit sans peine que l'intégrale n^{ple} I est aussi égale à l'expression

$$(35) \qquad I = \int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} \theta(x_n)\, dx_n,$$

$\theta(x_n)$ étant l'intégrale $(n-1)^{\text{ple}} \iiint \ldots \int f\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$ étendue au domaine δ. Quelle que soit la façon dont on opère, les limites pour les diverses intégrations que l'on a à effectuer dépendent de la nature du domaine D et varient en général avec l'ordre des intégrations. Il y a exception si D est un prismatoïde défini par les conditions

$$x_1^0 \leq x_1 \leq X_1, \qquad \ldots, \qquad x_i^0 \leq x_i \leq X_i, \qquad \ldots.$$

L'intégrale multiple a, dans ce cas, pour expression

$$I = \int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \int_{x_2^0}^{X_2} dx_2 \ldots \int_{x_n^0}^{X_n} f\, dx_n,$$

et l'on peut intervertir d'une façon quelconque l'ordre des intégrations, sans changer les limites correspondant à chaque variable.

La formule du changement de variables s'étend aussi aux intégrales n^{ples}. Soient

$$(36) \qquad x_i = \varphi_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

des formules de transformation, faisant correspondre point par point à un domaine D', décrit par le point $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, un domaine D décrit par le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On a

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} &\iint \ldots \int_{(D)} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \\ &\quad = \iint \ldots \int_{(D')} F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \left| \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x'_1, \ldots, x'_n)} \right| dx'_1 \ldots dx'_n. \end{aligned} \right.$$

La démonstration est toute semblable aux précédentes. Je me bornerai à indiquer, dans ses grandes lignes, la marche à suivre :

1° Si la formule (37) est vraie pour deux transformations, elle est vraie pour celle que l'on obtient en les effectuant successivement;

2° Tout changement de variables s'obtient par la combinaison de deux changements tels que les suivants :

$$(38)\quad x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = x'_{n-1}, \quad x_n = \varphi_n(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

$$(39)\quad x_1 = \psi_1(x'_1, \ldots, x'_n), \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \psi_{n-1}(x'_1, \ldots, x'_n), \quad x_n = x'_n.$$

3° La formule (37) s'applique au changement de variables de la forme (38), comme il résulte de la forme (34) sous laquelle on peut mettre une intégrale n^{ple}. Elle s'applique aussi au changement de variables (39), d'après la seconde forme (35) de l'intégrale multiple, si l'on admet que la formule est établie pour les intégrales multiples d'ordre $n-1$. On démontrera donc de proche en proche que la formule est générale.

Supposons, pour donner un exemple, que l'on veuille calculer l'intégrale définie

$$I = \int\int\cdots\int x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n)^{\beta}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ sont des nombres positifs, dans le domaine D défini par les inégalités

$$0 \leqq x_1, \quad 0 \leqq x_2, \quad \ldots, \quad 0 \leqq x_n, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq 1.$$

Le changement de variables donné par les formules

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \xi_1, \quad x_2 + \ldots + x_n = \xi_1 \xi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$$

remplace D par un domaine D′ défini par les inégalités

$$0 \leqq \xi_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \xi_2 \leqq 1, \quad \ldots, \quad 0 \leqq \xi_n \leqq 1,$$

et l'on a de plus, comme le prouve un calcul facile (n° **148**),

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)} = \xi_1^{n-1} \xi_2^{n-2} \ldots \xi_{n-1}.$$

La fonction à intégrer prend la forme

$$\xi_1^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + n - 1} \xi_2^{\alpha_2 + \ldots + \alpha_n + n - 2} \ldots \xi_n^{\alpha_n} (1 - \xi_1)^{\beta} (1 - \xi_2)^{\alpha_1} \ldots (1 - \xi_n)^{\alpha_{n-1}},$$

et l'intégrale cherchée s'exprime encore au moyen de la fonction Γ

$$(40)\qquad I = \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\ldots\Gamma(\alpha_n + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \beta + n + 1)}.$$

II. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

151. Méthode générale. — Soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ deux fonctions des deux variables indépendantes x et y; l'expression

$$P\,dx + Q\,dy$$

n'est pas en général la différentielle totale d'une fonction des deux variables x, y. En effet, l'équation

$$du = P\,dx + Q\,dy \tag{41}$$

est, comme l'on sait, équivalente à deux équations distinctes

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y); \tag{42}$$

différentions la première par rapport à y, la seconde par rapport à x, nous voyons que $u(x, y)$ doit satisfaire aux deux relations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Pour qu'il existe une fonction $u(x, y)$ répondant à la question, il faut donc que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{43}$$

Cette condition nécessaire est aussi suffisante. En effet, il existe une infinité de fonctions $u(x, y)$ dont la dérivée partielle par rapport à x est égale à $P(x, y)$; toutes ces fonctions sont contenues dans la formule

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + Y,$$

x_0 étant une constante choisie à volonté, et Y une fonction arbitraire de la variable y. Pour que cette fonction $u(x, y)$ vérifie l'équation (41), il faut et il suffit que sa dérivée partielle par rapport à y soit égale à $Q(x, y)$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \frac{dY}{dy} = Q(x, y).$$

Mais on a, d'après la condition d'intégrabilité (43),

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = Q(x, y) - Q(x_0, y),$$

et la relation précédente se réduit à

$$\frac{dY}{dy} = Q(x_0, y).$$

Le second membre ne dépend que de y; il y a donc une infinité de fonctions de y qui satisfont à cette relation. Elles sont comprises dans la formule

$$Y = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C,$$

y_0 étant une valeur particulière de y, et C une constante arbitraire. Il existe donc une infinité de fonctions $u(x, y)$ satisfaisant à l'équation (41); elles sont données par la formule

$$(44) \qquad u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C,$$

et ne diffèrent l'une de l'autre que par la valeur de la constante additive C.

Soit, par exemple,

$$P = \frac{x + my}{x^2 + y^2}, \qquad Q = \frac{y - mx}{x^2 + y^2};$$

la condition (43) est vérifiée, et l'on a, en posant $x_0 = 0$, $y_0 = 1$,

$$u = \int_0^x \frac{x + my}{x^2 + y^2}\,dx + \int_1^y \frac{dy}{y} + C.$$

En effectuant les intégrations indiquées, il vient

$$u = \frac{1}{2}\,[\log(x^2 + y^2)]_0^x + m\left(\text{arc tang}\frac{x}{y}\right)_0^x + \log y + C,$$

ou, en réduisant,

$$u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + m\,\text{arc tang}\frac{x}{y} + C.$$

La méthode précédente s'étend au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Nous développerons encore les calculs

pour trois variables. Soient P, Q, R trois fonctions de x, y, z, l'équation aux différentielles totales

$$(45) \qquad du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

est équivalente à trois équations distinctes

$$(46) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

En calculant de deux façons différentes les dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}$, on obtient trois conditions pour que le problème soit possible

$$(47) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Supposons-les satisfaites. D'après la première, il existe une infinité de fonctions $u(x, y, z)$ dont les dérivées partielles par rapport à x et y sont respectivement P et Q; elles sont comprises dans la formule

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + Z,$$

Z désignant une fonction arbitraire de z. Pour que la dérivée $\frac{\partial u}{\partial z}$ soit égale à R, il faut, de plus, que l'on ait

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial z}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x_0, y, z)}{\partial z}\,dy + \frac{dZ}{dz} = R,$$

condition qui se réduit, en tenant compte des relations (47), à

$$R(x, y, z) - R(x_0, y, z) + R(x_0, y, z) - R(x_0, y_0, z) + \frac{dZ}{dz} = R(x, y, z).$$

ou

$$\frac{dZ}{dz} = R(x_0, y_0, z).$$

On en conclut qu'il existe une infinité de fonctions $u(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation (45); elles sont représentées par la formule

$$(48) \quad u = \int^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + C,$$

x_0, y_0, z_0 étant trois valeurs numériques choisies à volonté, et C une constante arbitraire.

152. Étude de l'intégrale $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$. — La question précédente peut être traitée à un autre point de vue qui permet une étude plus approfondie et conduit à des résultats nouveaux. Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions continues, et admettant des dérivées partielles du premier ordre continues, dans une région A limitée par un seul contour fermé C; il peut d'ailleurs arriver que cette région A embrasse tout le plan, ce qui revient à supposer le contour C rejeté à l'infini. L'intégrale curviligne

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

prise le long d'un chemin L situé tout entier dans A, dépend en général du chemin d'intégration; nous allons d'abord chercher à quelles conditions cette intégrale ne dépend que des coordonnées (x_0, y_0), (x_1, y_1) des extrémités de cette ligne. Soient M et N deux points quelconques de la région A, et L, L′ deux chemins joignant ces deux points, sans se croiser entre les extrémités; ils forment, par leur réunion, un contour fermé. Pour que les intégrales curvilignes prises le long de L et de L′ soient égales, il faut évidemment et il suffit que l'intégrale prise le long du contour fermé que forment ces deux lignes, en marchant toujours dans le même sens, soit nulle. La question proposée est donc équivalente à celle-ci : *Que faut-il pour que l'intégrale curviligne*

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque situé dans A, *soit nulle?*

La réponse se déduit immédiatement de la formule de Green,

$$(49)\qquad \int_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

où C est un contour fermé quelconque situé dans A, et où l'intégrale double est étendue à l'intérieur de C. Il est clair que si les

dérivées des fonctions P et Q satisfont à la relation

$$(43)' \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

l'intégrale curviligne du premier membre est toujours nulle. Cette condition est nécessaire. En effet, si $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ n'est pas identiquement nul dans la région A, comme c'est une fonction continue, on pourra toujours trouver une région a assez petite pour que le signe soit constant dans a; il est clair que l'intégrale curviligne prise le long du contour de a ne pourra être nulle, d'après la formule (49).

Si la condition (43)' est vérifiée identiquement, deux chemins L, L', ayant les mêmes extrémités M, N, et ne se croisant pas entre ces extrémités, donnent la même valeur pour l'intégrale curviligne. Il en est encore de même s'ils se coupent un nombre quelconque de fois entre M et N, car il suffit de les comparer à un troisième chemin L'', ne rencontrant aucun des deux premiers, sauf aux points M et N.

Cela posé, supposons que l'une des extrémités de la ligne d'intégration soit un point fixe (x_0, y_0), la seconde extrémité (x, y) étant un point variable de A; l'intégrale

$$(50) \qquad F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy,$$

prise suivant un chemin de forme arbitraire, ne dépend que des coordonnées (x, y) de l'extrémité variable. Les dérivées partielles de cette fonction sont précisément $P(x, y)$ et $Q(x, y)$. On a, par exemple,

$$F(x + \Delta x, y) = F(x, y) + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P(x, y)\,dx,$$

car on peut supposer que l'on va d'abord du point (x_0, y_0) au point (x, y), puis du point (x, y) au point $(x + \Delta x, y)$ en restant sur la parallèle à Ox et, le long de cette droite, on a $dy = 0$. Appliquons la formule de la moyenne, nous pouvons écrire

$$\frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta\,\Delta x, y) \qquad (0 < \theta < 1);$$

en faisant tendre Δx vers zéro, il vient $F'_x = P$, et l'on verrait de

même que l'on a $F'_y = Q$. L'intégrale curviligne $F(x, y)$ vérifie donc l'équation aux différentielles totales (41), et l'on obtient l'intégrale générale de cette équation en ajoutant à $F(x, y)$ une constante arbitraire.

La nouvelle formule est plus générale que la formule (44), puisque le chemin d'intégration reste indéterminé. Il est du reste facile d'en déduire la formule (44). Pour éviter toute ambiguïté, désignons par (x_0, y_0), (x_1, y_1) les coordonnées des deux extrémités, et prenons comme chemin d'intégration les deux droites $x = x_0$, $y = y_1$. Le long de la première on a $x = x_0$, $dx = 0$, et y varie de y_0 à y_1; le long de la seconde on a $y = y_1$, $dy = 0$, x varie de x_0 à x_1. L'intégrale est donc égale à

$$\int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y)\, dy + \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1)\, dx;$$

c'est, à une différence de notation près, la formule (44).

Mais il peut être plus avantageux de prendre un autre chemin d'intégration. Supposons qu'en posant $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, et faisant varier t de t_0 à t_1, le point (x, y) décrive un arc de courbe joignant le point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1); on a

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\, dx + Q\, dy = \int_{t_0}^{t_1} [P(x, y) f'(t) + Q(x, y) \varphi'(t)]\, dt,$$

et l'on n'a plus qu'une quadrature à effectuer. Si l'on suit, par exemple, la ligne droite, on posera $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ et l'on fera varier t de 0 à 1.

Inversement, si l'on connaît une intégrale particulière $\Phi(x, y)$ de l'équation (41), on en déduira l'intégrale curviligne par la formule

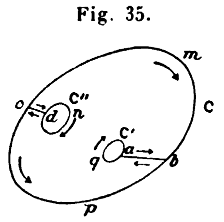
$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\, dx + Q\, dy = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0),$$

qui est l'analogue de la formule (6) du Chapitre IV.

153. Périodes. — On peut étudier des cas plus étendus. Observons d'abord que la formule de Green s'applique aussi à des aires limitées par plusieurs contours. Considérons, pour fixer les idées, une aire A limitée par un contour extérieur C et deux

contours C', C'', intérieurs au premier (*fig.* 35), et soient P et Q deux fonctions continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, dans cette aire. (On doit regarder les portions du plan intérieures aux contours C', C'', comme ne faisant pas partie de A; on ne suppose rien sur les fonctions P et Q dans ces deux régions.) Joignons les contours C', C'' au contour fermé C par les transversales *ab*, *cd*. Nous obtenons ainsi un contour fermé *abmcdndcpbaqa* ou Γ, qui peut être décrit d'un seul trait. Si

Fig. 35.



nous appliquons la formule de Green à l'aire limitée par ce contour, les intégrales curvilignes provenant des transversales *ab* et *cd* se détruisent, car chacune d'elles est décrite deux fois avec des sens différents, et il reste

$$\int P\,dx + Q\,dy = \int\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

l'intégrale curviligne étant prise le long du contour total de l'aire A. c'est-à-dire le long des trois contours C, C', C'' dans le sens indiqué par les flèches, de façon à avoir toujours à gauche l'aire enveloppée.

Si les fonctions P et Q vérifient la relation $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ dans la région A, l'intégrale double est nulle et nous pouvons écrire la relation obtenue

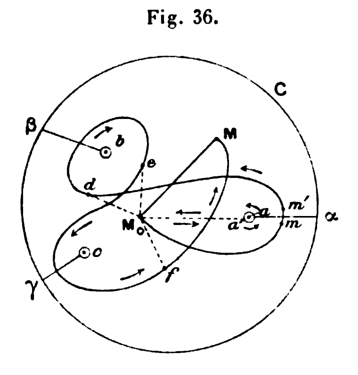
$$(51) \qquad \int_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(C')} P\,dx + Q\,dy + \int_{(C'')} P\,dx + Q\,dy,$$

en convenant maintenant de prendre les trois intégrales curvilignes dans le même sens.

Cela posé, reprenons une région A limitée par un seul contour C, et soient P, Q deux fonctions continues, ainsi que leurs

dérivées, vérifiant la relation $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, sauf en un nombre fini de points où l'une au moins des fonctions P, Q est discontinue. Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il y ait dans A trois points a, b, c de discontinuité. Entourons chacun de ces points d'une circonférence de rayon très petit et joignons ces circonférences au contour C par une coupure (*fig.* 36). L'intégrale $\int P\,dx + Q\,dy$,

Fig. 36.



prise depuis un point fixe (x_0, y_0) jusqu'à un point variable (x, y) sur une ligne ne franchissant aucune coupure, a une valeur unique en chaque point, d'après le cas déjà étudié, car le contour C, les coupures et les petites circonférences forment une seule ligne pouvant être décrite d'un seul trait continu. Nous désignerons par $\overline{F(x, y)}$ la valeur de cette intégrale prise suivant le chemin *direct* allant de $M_0(x_0, y_0)$ en $M(x, y)$.

On appelle *lacet* le chemin composé de la ligne droite joignant le point M_0 à un point a' infiniment voisin de a, de la petite circonférence de rayon aa' et de centre a, et de la droite $a'M_0$. L'intégrale curviligne $\int P\,dx + Q\,dy$, prise le long d'un lacet, se réduit à l'intégrale curviligne prise le long de la circonférence. Cette dernière intégrale n'est pas nulle en général, si l'une des fonctions P ou Q est infinie au point a, mais elle est indépendante du rayon de la petite circonférence; c'est une constante $\pm \mathcal{A}$, le double signe correspondant aux deux sens de parcours. Nous désignerons de même, par $\pm \mathcal{B}$ et $\pm \mathcal{C}$, la valeur de l'intégrale

curviligne prise le long d'un lacet décrit autour de l'un des points singuliers b ou c.

Cela posé, tout chemin joignant le point M_0 au point M peut se ramener à une suite de lacets, suivis du chemin direct allant de M_0 en M. Par exemple le chemin $M_0 m d e f M$ peut se ramener à la suite des chemins suivants $M_0 m d M_0$, $M_0 d e M_0$, $M_0 e f M_0$, $M_0 f M$; le chemin $M_0 m d M_0$ peut à son tour se ramener à un lacet décrit autour du point singulier a, et de même pour les autres. Enfin $M_0 f M$ est équivalent au chemin direct. Il s'ensuit que, quel que soit le chemin d'intégration, la valeur de l'intégrale curviligne est de la forme

$$F(x, y) = \overline{F(x, y)} + m\mathcal{A} + n\mathcal{B} + p\mathcal{C}, \tag{52}$$

m, n, p étant trois nombres entiers, positifs ou négatifs, absolument quelconques. Les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont les *périodes* de l'intégrale curviligne. Cette intégrale est donc une fonction des variables x, y, qui admet une infinité de déterminations, et nous voyons l'origine de ces déterminations multiples.

Remarque. — La fonction $\overline{F(x, y)}$ est une fonction bien déterminée dans la région A, quand on a tracé les coupures $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$; mais on doit remarquer qu'en deux points infiniment voisins tels que m, m', de part et d'autre d'une coupure, la différence $\overline{F(m)} - \overline{F(m')}$ a une valeur finie. On a, en effet,

$$\mathcal{A} = \int_{M_0}^{m} + \int_{m}^{m'} + \int_{m'}^{M_0},$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_{M_0}^{m} = \int_{M_0}^{m'} + \mathcal{A} + \int_{m'}^{m};$$

mais $\int_{m'}^{m}$ est infiniment petit, et il reste

$$\overline{F(m)} - \overline{F(m')} = \mathcal{A}.$$

La différence $\overline{F(m)} - \overline{F(m')}$ est donc constante et égale à $\mathcal{A}$ tout le long de $a\alpha$. Il en est de même pour les autres coupures.

Exemple. — L'intégrale curviligne

$$\int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

présente un seul point critique, l'origine. Pour avoir la période correspondante, intégrons le long du cercle $x^2+y^2=\rho^2$; on a

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega, \qquad x\,dy - y\,dx = \rho^2\,d\omega,$$

et la période est égale à $\int_0^{2\pi} d\omega = 2\pi$. La vérification est immédiate, car on a sous le signe $\int$ la différentielle totale de arc tang$\frac{y}{x}$.

154. Racines communes à deux équations. — Soient X, Y deux fonctions continues des variables x, y, dans une région A limitée par un seul contour fermé C; nous supposons que les dérivées partielles du premier ordre sont aussi continues.

L'expression $\frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2}$ satisfait à la condition d'intégrabilité, car elle est la différentielle totale de arc tang$\frac{Y}{X}$. Il s'ensuit que l'intégrale définie

$$(53) \qquad \int_{(C)} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2},$$

prise le long du contour C dans le sens direct, est nulle si les coefficients de dx et de dy sous le signe $\int$ restent continus à l'intérieur de C, c'est-à-dire si les deux courbes $X=0$, $Y=0$ n'ont aucun point commun à l'intérieur de ce contour. Mais si ces deux courbes ont un certain nombre de points communs a, b, c, ..., l'intégrale (53) est égale à la somme des intégrales prises dans le sens direct le long des petites circonférences décrites des points a, b, c, ..., comme centres. Soient (α, β) les coordonnées d'un de ces points communs; nous supposerons qu'en ce point le déterminant fonctionnel $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ n'est pas nul, c'est-à-dire que les deux courbes $X=0$, $Y=0$ ne sont pas tangentes en ce point. Nous pouvons alors décrire du point (α, β) comme centre un cercle c de rayon assez petit pour que le point X, Y décrive autour du point (o, o) une petite portion de surface plane, limitée par un contour γ, qui corresponde point par point au cercle c (n^{os} **25** et **127**).

Lorsque le point (x, y) décrit la circonférence c dans le sens direct, le point (X, Y) décrit le contour γ dans le sens direct ou dans le sens rétro-

grade, suivant le signe du déterminant fonctionnel dans ce petit cercle. Or l'intégrale définie le long de la petite circonférence est égale à la variation de arc tang $\frac{Y}{X}$, et par suite à $\pm 2\pi$. En raisonnant de même pour toutes les racines, on en conclut que l'on a

$$(54)\qquad \int_{(C)} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2 + Y^2} = 2\pi(P - N),$$

P désignant le nombre des points communs aux deux courbes pour lesquels $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ est positif, et N le nombre des points communs pour lesquels le déterminant est négatif.

L'intégrale définie du premier membre est aussi égale à la variation de arc tang $\frac{Y}{X}$ le long de C, c'est-à-dire à l'indice de la fonction $\frac{Y}{X}$ lorsque le point (x, y) décrit le contour C. Si les fonctions X, Y sont des polynomes, et si le contour C est formé d'arcs de courbes unicursales, on est ramené à calculer l'indice d'une ou plusieurs fonctions rationnelles, ce qui n'exige que des opérations élémentaires (n° 77). D'ailleurs, quelles que soient les fonctions X, Y, on peut toujours calculer l'intégrale définie (54) avec une erreur inférieure à π, ce qui suffit, puisque le second membre doit être un multiple de 2π.

La formule (54) ne fait connaître le nombre exact des points communs aux deux courbes que si le déterminant fonctionnel conserve un signe constant à l'intérieur de C. Des travaux récents de M. Picard ont permis de compléter ce résultat ([1]).

155. Extension des résultats précédents. — Les résultats des derniers paragraphes s'étendent sans modification essentielle aux intégrales curvilignes dans l'espace

$$(55)\qquad U = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Nous désignerons par P, Q, R trois fonctions continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, dans une région (E) de l'espace, limitée par une seule surface fermée S. Cherchons d'abord les conditions pour que l'intégrale curviligne précédente ne dépende que des extrémités (x_0, y_0, z_0), (x, y, z) de la ligne d'intégration. Cela revient encore à chercher dans quels cas l'intégrale curviligne, prise le long d'une courbe fermée quelconque Γ, est nulle. Or, d'après la formule de Stokes (n° 136), cette intégrale curviligne est égale à l'intégrale de surface

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz,$$

([1]) *Traité d'Analyse*, t. II.

étendue à une surface Σ limitée par le contour Γ. Pour que cette intégrale de surface soit nulle, quel que soit le contour Γ, il faut évidemment et il suffit que l'on ait

$$(56)\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Si ces conditions sont remplies, U est une fonction des variables x, y, z, dont la différentielle totale est $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, et qui est uniforme dans la région E de l'espace. Pour avoir la valeur de U en un point, on pourra choisir arbitrairement le chemin d'intégration.

Si les fonctions P, Q, R vérifient les relations (56), mais deviennent infinies en tous les points d'une ou plusieurs lignes dans (E), on en déduit des conséquences analogues à celles qui ont été développées au n° 153.

Si, par exemple, l'une des fonctions P, Q, R devient infinie en tous les points d'une courbe fermée γ, l'intégrale U admettra une période égale à la valeur de l'intégrale curviligne prise le long d'un contour fermé traversant une fois, et une seule fois, une surface σ limitée par la courbe γ.

On peut aussi se proposer, pour les intégrales de surface, une question tout à fait pareille à celle qui a été traitée pour les intégrales curvilignes. Désignons par A, B, C trois fonctions continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, dans la région E de l'espace limitée par une seule surface fermée S. Soit Σ une surface prise dans E, et limitée par un contour de forme quelconque Γ. L'intégrale de surface

$$(57)\qquad I = \int\!\!\int_{(\Sigma)} A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$$

dépend en général de la surface Σ elle-même, et non pas seulement du contour Γ. Pour que cette intégrale ne dépende que du contour Γ, il faudra que l'intégrale double étendue à une surface fermée quelconque prise dans E soit nulle. La condition pour qu'il en soit ainsi nous est donnée immédiatement par la formule de Green (n° 149). Nous savons, en effet, que l'intégrale double précédente, étendue à une surface fermée, est égale à l'intégrale triple

$$\int\!\!\int\!\!\int \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

étendue au volume limité par cette surface. Pour que cette dernière intégrale soit nulle, quel que soit ce volume, il faut évidemment que les fonctions A, B, C vérifient la relation

$$(58)\qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

et cette condition est suffisante.

La formule de Stokes en donne une vérification facile. En effet, étant données trois fonctions A, B, C vérifiant la relation (58), on peut, d'une



infinité de manières, déterminer trois autres fonctions P, Q, R, telles que l'on ait

$$(59) \qquad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C.$$

D'abord, si ces équations admettent une solution, elles en admettent une infinité, car elles ne changent pas quand on remplace P, Q, R par

$$P + \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad Q + \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad R + \frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

respectivement, λ étant une fonction quelconque de x, y, z. Cela étant, prenons $R = 0$; on tire des deux premières relations (59)

$$P = \int_{z_0}^{z} B(x, y, z)\,dz + \varphi(x, y), \qquad Q = -\int_{z_0}^{z} A(x, y, z)\,dz + \psi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ étant deux fonctions quelconques de x et de y. En portant ces valeurs dans la dernière équation (59), elle devient

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dz + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = C(x, y, z),$$

ou, en tenant compte de la condition (58),

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = C(x, y, z_0);$$

on peut encore choisir arbitrairement une des fonctions φ, ψ.

Ayant ainsi déterminé trois fonctions P, Q, R satisfaisant aux équations (59), l'intégrale de surface est égale, d'après la formule de Stokes, à l'intégrale curviligne

$$\int_{(\Gamma)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz;$$

elle ne dépend donc que du contour Γ.

EXERCICES.

1. Calculer la valeur de l'intégrale triple

$$\iiint [5(x-y)^2 + 3az - 4a^2]\,dx\,dy\,dz,$$

étendue au volume défini par les inégalités

$$x^2 + y^2 - az < 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2a^2 < 0.$$

[*Licence* : Montpellier, 1895.]

2. Calculer l'aire de la surface représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 b^2 (x^2 + y^2) z}{a^2 x^2 + b^2 y^2},$$

et le volume limité par cette surface.

3. Étudier les propriétés de la fonction

$$F(X, Y, Z) = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} f(x, y, z)\, dz,$$

considérée comme fonction de X, Y, Z. Étendre les résultats du n° 125.

4. Trouver le volume limité par la portion de la surface représentée par l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3 a^3 xyz,$$

qui est située dans le trièdre $Oxyz$.

5. Ramener à une intégrale simple l'intégrale multiple

$$\int\int \ldots \int x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} F(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

étendue au domaine D défini par les inégalités

$$0 \leq x_1, \qquad 0 \leq x_2, \qquad \ldots, \qquad 0 \leq x_n, \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq a$$

(on procède comme au n° 148).

6. Même question pour l'intégrale multiple

$$\int\int \ldots \int x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} F\left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1} + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\right] dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

étendue au domaine D défini par les inégalités

$$0 \leq x_1, \qquad 0 \leq x_2, \qquad \ldots, \qquad 0 \leq x_n, \qquad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1} + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n} \leq 1.$$

***7.** Démontrer la formule

$$\int\int\int \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)},$$

l'intégrale multiple étant étendue au domaine D défini par l'inégalité

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1.$$

*8. Démontrer la formule

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} F(a\cos\theta + b\sin\theta\cos\varphi + c\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{+1} F(uR)\, du,$$

où a, b, c sont des constantes quelconques et où l'on pose $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

[POISSON.]

[On peut observer que l'intégrale double représente une certaine intégrale de surface étendue à la sphère $x^2+y^2+z^2=1$, et prendre le plan $bx+cy+az=0$ pour nouveau plan des xy.]

*9. Soit $\rho = F(\theta, \varphi)$ l'équation d'une surface fermée en coordonnées polaires. Démontrer que le volume limité par cette surface est égal à l'intégrale double étendue à toute la surface

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{3}\iint \rho\cos\gamma\, d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément d'aire, et γ l'angle que fait le rayon vecteur avec la normale extérieure.

*10. Un ellipsoïde étant représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2-b^2} + \frac{z^2}{\mu^2-c^2} = 1,$$

définissons un point de sa surface par les coordonnées elliptiques ν et ρ, c'est-à-dire par les racines de l'équation précédente où l'on aurait remplacé μ par l'inconnue (*voir* n° 147). L'application des formules (29)′ au volume de cet ellipsoïde conduit à la relation suivante :

$$\int_0^b d\rho \int_b^c \frac{(\nu^2-\rho^2)\sqrt{(c^2-\rho^2)(c^2-\nu^2)}}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)}}\, d\nu = \frac{1}{6}\pi c^2(c^2-b^2).$$

L'application de la formule (α) donne de même

$$\int_0^b d\rho \int_b^c \frac{(\nu^2-\rho^2)\, d\nu}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

[LAMÉ.]

11. Déterminer les fonctions $P(x, y)$, $Q(x, y)$, continues ainsi que leurs dérivées partielles, de telle façon que l'intégrale curviligne

$$\int P(x+\alpha, y+\beta)\, dx + Q(x+\alpha, y+\beta)\, dy,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque, soit indépendante des constantes α, β et ne dépende que du contour lui-même.

[*Licence* : Paris, juillet 1900.]

CHAPITRE VIII.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SÉRIES. — RÈGLES DE CONVERGENCE.

156. Définitions et généralités. — Les propriétés élémentaires des séries sont exposées en détail dans tous les cours d'Algèbre. Nous en résumerons rapidement les points principaux.

Considérons d'abord une *suite* indéfinie de quantités

$$(1) \qquad s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots$$

dont chacune occupe un rang *déterminé;* cette suite est dite *convergente* si s_n tend vers une limite s lorsque le rang n augmente indéfiniment. Toute suite qui n'est pas convergente est dite *divergente;* cela peut arriver soit que s_n finisse par rester supérieur à tout nombre donné à l'avance, soit que s_n ne tende vers aucune limite, sans augmenter indéfiniment.

Pour qu'une suite soit convergente, il faut et il suffit qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre un nombre entier n tel que la différence $s_{n+p} - s_n$ soit moindre que ε en valeur absolue, quel que soit le nombre entier positif p.

La condition est nécessaire. En effet, si s_n a pour limite s lorsque n croît indéfiniment, on peut trouver un nombre n assez grand pour que toutes les différences $s - s_n$, $s - s_{n+1}$, $\ldots$, $s - s_{n+p}$, $\ldots$, soient inférieures en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{2}$. La différence $s_{n+p} - s_n$ sera donc moindre, quel que soit p, que $2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Pour démontrer la réciproque, nous introduirons une nouvelle notion très importante, due à Cauchy. Supposons tous les termes

de la suite (1) inférieurs en valeur absolue à un nombre positif N; tous les nombres compris entre $-N$ et $+N$ peuvent être séparés en deux classes de la façon suivante. Nous dirons qu'un nombre appartient à la classe A, s'il existe une infinité de termes de la suite (1) supérieurs à ce nombre, et à la classe B, s'il n'existe qu'un nombre fini de termes de la suite (1) supérieurs à ce nombre. Il est clair qu'un nombre compris entre $-N$ et $+N$ appartient à l'une des deux classes, et que tout nombre de la classe A est inférieur à un nombre quelconque de la classe B. Soit S la limite supérieure des nombres de la classe A, qui est en même temps la limite inférieure des nombres de la classe B. C'est ce nombre S que Cauchy appelle *la plus grande des limites* (¹) des termes de la suite (1). Il ne faut pas confondre S avec la limite supérieure des termes de la suite (1); ainsi, pour la suite

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots$$

la limite supérieure (nº 68) est 1, tandis que la plus grande des limites est 0.

Il est facile de justifier le nom adopté par Cauchy. D'après la définition même du nombre S, il existe toujours une infinité de termes de la suite (1) compris entre $S-\varepsilon$ et $S+\varepsilon$, aussi petit que soit le nombre positif ε. Considérons alors une suite de nombres positifs décroissants $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, le terme général ε_n tendant vers zéro, et à chaque nombre ε_i faisons correspondre un nombre α_i de la suite (1) compris entre $S-\varepsilon_i$ et $S+\varepsilon_i$. Nous obtenons ainsi une suite de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ appartenant à la suite (1) et ayant pour limite S. D'ailleurs il est clair, d'après la façon même dont on a défini S, qu'on ne pourrait pas détacher de la suite (1) une suite partielle ayant pour limite un nombre supérieur à S. Lorsqu'une suite est convergente, la limite est évidemment le nombre S lui-même.

Cela posé, supposons que la différence $s_{n+p}-s_n$ de deux termes de la suite (1) soit inférieure en valeur absolue à un nombre

(¹) *Résumés analytiques de Turin*, 1833 (*Œuvres complètes*, 2ᵉ série, t. X, p. 49).
La définition s'étend d'elle-même à tout ensemble de nombres limité supérieurement.

positif ε, quel que soit le nombre positif p. Tous les termes de la suite (1) sont compris, à partir de s_n, entre $s_n - \varepsilon$ et $s_n + \varepsilon$. Soit S la plus grande des limites des termes de cette suite; d'après ce qu'on vient de voir, on peut détacher de la suite (1) une suite partielle ayant pour limite S, et, tous les termes de cette suite partielle étant compris, à partir d'un certain rang, entre $s_n + \varepsilon$ et $s_n - \varepsilon$, il est clair que la valeur absolue de $S - s_n$ est au plus égale à ε. Soit maintenant s_m un terme quelconque de la suite (1), dont l'indice m est supérieur à n. Nous pouvons écrire

$$s_m - S = (s_m - s_n) + (s_n - S),$$

et la valeur absolue du second membre est inférieure à 2ε. Comme ε est un nombre positif arbitraire, il s'ensuit que le terme général s_m a pour limite S, lorsque l'indice m augmente indéfiniment.

Remarque. — Si S est la plus grande des limites des termes de la suite (1), tout nombre supérieur à S est de la classe B, et tout nombre inférieur à S, de la classe A. Le nombre S lui-même peut être de la classe A ou de la classe B.

157. Étant donnée une suite infinie quelconque

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

on dit que la *série*

(2) $$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est *convergente*, si la suite formée par les sommes successives des termes de cette série

$$S_0 = u_0, \qquad S_1 = u_0 + u_1, \qquad \ldots, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n, \qquad \ldots,$$

est elle-même convergente. Soit S la limite de cette suite, c'est-à-dire la limite vers laquelle tend la somme S_n lorsque n augmente indéfiniment; S s'appelle la *somme* de la série précédente, et l'on indique cette dépendance par l'égalité

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{\nu=0}^{+\infty} u_\nu.$$

Une série qui n'est pas convergente est appelée *divergente*.

Reconnaître si une série est convergente ou divergente revient

donc à reconnaître si la suite formée par les sommes successives S_0, S_1, S_2, ... est elle-même convergente ou divergente. Inversement, pour savoir si une suite infinie quelconque

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots$$

est convergente, il suffit d'examiner la série

$$s_0 + (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \ldots + (s_n - s_{n-1}) + \ldots,$$

car la somme S_n des $(n+1)$ premiers termes de cette série est évidemment égale au terme général s_n de la suite considérée. Cette remarque est d'une application fréquente.

La série (2) est convergente ou divergente en même temps que la série

$$(3) \qquad u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{p+q} + \ldots,$$

obtenue en supprimant les p premiers termes de la série (2). En effet, soient $S_n (n > p)$ la somme des $n+1$ premiers termes de la série (1), et Σ_{n-p} la somme des $n - p + 1$ premiers termes de la série (3) :

$$\Sigma_{n-p} = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n;$$

la différence $S_n - \Sigma_{n-p} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{p-1}$ ne dépendant pas de n, si la somme S_n tend vers une limite, il en est de même de Σ_{n-p}, et inversement. Il suit de là que, pour reconnaître si une série est convergente ou divergente, on peut toujours négliger autant de termes que l'on voudra, au commencement de la série.

Soient S la somme d'une série convergente, S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la série, et R_n la somme de la série commençant au terme u_{n+1}

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots.$$

On a évidemment

$$S = S_n + R_n.$$

Il est en général impossible de calculer exactement la somme S d'une série convergente; si l'on prend pour valeur approchée de S la somme S_n des $n+1$ premiers termes, l'erreur commise est égale à R_n. Puisque S_n a pour limite S lorsque n augmente indéfiniment, la différence R_n tend vers zéro, et l'on peut toujours prendre un nombre de termes assez grand pour que l'erreur com-

mise en remplaçant S par S_n soit moindre que tout nombre donné à l'avance, du moins théoriquement. Il suffit de connaître une limite supérieure de R_n pour se rendre compte de l'approximation obtenue. Il est clair que, dans la pratique, les seules séries qui se prêtent aux calculs numériques sont celles pour lesquelles le reste R_n tend assez rapidement vers zéro.

De la définition même de la convergence résultent un certain nombre de propriétés qu'il nous suffira d'énoncer :

1° Si l'on multiplie tous les termes d'une série par un nombre constant a, différent de zéro, la nouvelle série est convergente ou divergente en même temps que la première; lorsque la première est convergente et a pour somme S, la somme de la seconde série est aS;

2° Si l'on a deux séries convergentes

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

ayant respectivement pour sommes S et S', la nouvelle série obtenue en les ajoutant terme à terme,

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$$

est convergente et a pour somme S + S'. Il en serait de même si l'on ajoutait terme à terme p séries convergentes;

3° On ne modifie pas la convergence ou la divergence d'une série en changeant la valeur d'un nombre fini de termes de cette série; car cela revient à augmenter ou à diminuer toutes les sommes S_n d'une quantité constante, à partir d'une valeur assez grande de n.

La critérium de convergence d'une suite infinie quelconque, appliqué aux séries, donne la règle générale de convergence de Cauchy (¹). *Pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit qu'à tout nombre positif* ε *on puisse faire correspondre un nombre entier n, tel que la somme d'un nombre quelconque de termes à partir de* u_{n+1} *soit moindre en valeur absolue que* ε.

On a en effet $S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}$. En particulier le terme général $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ doit tendre vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

(¹) *Exercices de Mathématiques;* 1827. *Œuvres complètes,* t. VII, 2ᵉ série, p. 267.



La règle de Cauchy est absolument générale, mais elle est difficilement applicable dans la pratique; elle n'est au fond que le développement de la notion même de limite. Nous allons rappeler les règles pratiques les plus usitées pour reconnaître la convergence ou la divergence d'une série. Ces règles offrent toutes ce caractère commun de n'être applicables que dans des cas particuliers, mais elles suffisent dans la plupart des cas.

158. **Séries à termes positifs.** — Les séries dont tous les termes sont positifs ont une grande importance, et nous commencerons par les étudier. Dans une telle série, la somme S_n va en croissant avec n; pour que la série soit convergente, il suffira donc que cette somme S_n reste inférieure à une limite fixe, quel que soit n. Le procédé le plus général pour décider de la convergence ou de la divergence d'une série consiste à comparer la série proposée à une autre série déjà étudiée. On s'appuie pour cela sur les deux propositions suivantes :

1° Si une série à termes positifs a tous ses termes inférieurs ou au plus égaux respectivement à ceux d'une autre série convergente à termes positifs, la première série est convergente.

Car la somme S_n des n premiers termes de la série proposée est évidemment plus petite que la somme S' de la seconde série; elle a donc une limite S inférieure à S'.

2° Si une série à termes positifs a tous ses termes plus grands respectivement que ceux d'une série divergente à termes positifs, elle est également divergente.

Car la somme des n premiers termes de la première série est supérieure à la somme des n premiers termes de la seconde et par suite augmente indéfiniment avec n.

On peut faire la comparaison de deux séries d'une autre façon, en s'appuyant sur le lemme suivant : Soient

$$(\mathrm{U}) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

$$(\mathrm{V}) \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

deux séries à termes positifs. Si la série (U) est convergente et si, à partir d'un certain rang, on a constamment $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$, la série (V) est aussi convergente. Si la série (U) est divergente et

si, à partir d'un certain rang, on a constamment $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$, la série (V) est également divergente.

Pour démontrer la première partie, supposons que l'inégalité $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit vérifiée pour $n \geqq p$. Comme on n'altère pas la convergence d'une série, ni le rapport d'un terme au précédent, en multipliant tous les termes par un même facteur constant, on peut supposer $v_p < u_p$, et il est évident que l'on aura $v_{p+1} < u_{p+1}$, puis $v_{p+2} < u_{p+2}$, ... La série (V) sera donc convergente. La seconde partie du lemme s'établit de la même façon.

Étant donnée une série à termes positifs, de caractère connu, on peut la prendre comme terme de comparaison, et l'on obtient ainsi deux propositions permettant dans certains cas d'affirmer la convergence ou la divergence d'une autre série à termes positifs, suivant que l'on compare les termes eux-mêmes des deux séries, ou les rapports de deux termes consécutifs.

159. Règles de Cauchy et de d'Alembert. — La série la plus simple que l'on puisse prendre comme terme de comparaison est la progression géométrique de raison r, qui est convergente si $r < 1$, et divergente si $r \geqq 1$. La comparaison d'une série à termes positifs avec une progression géométrique conduit à la règle suivante, due à Cauchy :

Lorsque, dans une série à termes positifs, $\sqrt[n]{u_n}$ est, à partir d'un certain rang, constamment moindre qu'un nombre fixe, inférieur à l'unité, la série est convergente ; si $\sqrt[n]{u_n}$ est, à partir d'un certain rang, constamment supérieur à l'unité, la série est divergente.

Dans le premier cas, on a, en effet $\sqrt[n]{u_n} < k < 1$, et par suite $u_n < k^n$. Les termes de la série sont donc, à partir d'un certain rang, moindres que ceux d'une progression géométrique de raison plus petite que l'unité. Dans le second cas, au contraire, on a $\sqrt[n]{u_n} > 1$, et $u_n > 1$; le terme général ne tend donc pas vers zéro.

La règle précédente est applicable, toutes les fois que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite, et l'on peut encore énoncer la proposition suivante :

Si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite l, lorsque n croît indéfiniment, la série est convergente si l est inférieur à un, et divergente si l est supérieur à un.

Si $l = 1$, il y a doute, sauf dans le cas où $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers l'unité en lui restant supérieur; la série est alors divergente.

En comparant de même le rapport de deux termes consécutifs d'une série à termes positifs au rapport de deux termes consécutifs d'une progression géométrique, on obtient la règle de d'Alembert:

Lorsque, dans une série à termes positifs, le rapport d'un terme au précédent est, à partir d'un certain rang, inférieur à un nombre fixe plus petit que l'unité, la série est convergente. Si ce rapport est, à partir d'un certain rang, supérieur à l'unité, la série est divergente.

On en déduit comme corollaire que *si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite l, lorsque n augmente indéfiniment, la série est convergente si $l < 1$, et divergente si $l > 1$.* Le seul cas douteux est celui où $l = 1$, à moins que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne tende vers un en lui restant supérieur. La série est alors divergente.

Remarques diverses. — La règle de Cauchy est plus générale que celle de d'Alembert. Supposons, en effet, que les termes d'une série soient, à partir d'un certain rang, plus petits que ceux d'une progression géométrique décroissante; le terme général u_n sera, pourvu que n soit plus grand qu'un nombre fixe p, inférieur à Ar^n, A étant une constante et r étant plus petit que un. On aura donc $\sqrt[n]{u_n} < rA^{\frac{1}{n}}$, et le second membre a pour limite r lorsque n augmente indéfiniment. En désignant par k un nombre fixe compris entre r et 1, on aura donc, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{u_n} < k$. Nous sommes donc toujours dans un cas où la règle de Cauchy est applicable, mais il peut se faire que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ prenne des valeurs supérieures à un, aussi loin que l'on aille dans la série. Prenons, par exemple, la série

$$1 + r|\sin\alpha| + r^2|\sin 2\alpha| + \ldots + r^n|\sin n\alpha| + \ldots,$$

où $r < 1$, α étant une constante quelconque. On a $\sqrt[n]{u_n} = r\sqrt[n]{|\sin n\alpha|} < r$, tandis que le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r\left|\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha}\right|$$

peut prendre en général une infinité de valeurs supérieures à un, lorsque n augmente indéfiniment.

Il y a cependant avantage à conserver la règle de d'Alembert, qui est souvent d'une application plus facile. Ainsi, dans la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

le rapport d'un terme au précédent $\frac{x}{n+1}$ a zéro pour limite lorsque n augmente indéfiniment, tandis qu'on ne voit pas immédiatement ce que devient $\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{1.2\ldots n}}$ pour des valeurs très grandes de n.

Quand on a reconnu, par l'application d'une des règles précédentes, que les termes d'une série sont respectivement moindres, à partir d'un certain rang, que ceux d'une progression géométrique décroissante

$$A,\quad Ar,\quad Ar^2,\quad \ldots,\quad Ar^n,\quad \ldots,$$

il est facile d'avoir une limite de l'erreur commise quand on prend pour somme de la série la somme de ses m premiers termes; cette erreur est évidemment moindre que la somme de la progression

$$Ar^m + Ar^{m+1} + Ar^{m+2} + \ldots = \frac{Ar^m}{1-r}.$$

Lorsque les deux expressions $\sqrt[n]{u_n}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ont chacune une limite, ces deux limites sont les mêmes. Considérons, en effet, la série auxiliaire

$$(4)\qquad u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots,$$

où x est positif. Dans cette série, le rapport d'un terme au précédent a pour limite lx, l étant la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, la série (4) est donc convergente si l'on a $x < \frac{1}{l}$, et divergente si $x > \frac{1}{l}$. De même, en désignant par l' la limite de $\sqrt[n]{u_n}$, l'expression $\sqrt[n]{u_n x^n}$ a pour limite $l'x$, de sorte que la série (4) doit être convergente si l'on a $x < \frac{1}{l'}$, et divergente si $x > \frac{1}{l'}$. Pour que ces deux caractères de convergence ne soient pas en contradiction, il faut évidemment que $l = l'$; si l'on avait par exemple, $l > l'$, tout nombre x compris entre $\frac{1}{l}$ et $\frac{1}{l'}$ rendrait la série convergente d'après la règle de Cauchy, tandis que le même nombre rendrait la série divergente d'après la règle de d'Alembert.

Plus généralement, lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite l, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers la même limite [1]. Supposons, en effet, qu'à partir d'un certain rang tous les rapports

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}}$$

soient compris entre $l-\varepsilon$ et $l+\varepsilon$, ε désignant un nombre positif que l'on peut supposer aussi petit que l'on veut, pourvu que n soit assez grand. On aura aussi

$$(l-\varepsilon)^p < \frac{u_{n+p}}{u_n} < (l+\varepsilon)^p,$$

ou encore

$$u_n^{\frac{1}{n+p}}(l-\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}} < \sqrt[n+p]{u_{n+p}} < u_n^{\frac{1}{n+p}}(l+\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}};$$

lorsque, n restant fixe, le nombre p augmente indéfiniment, les deux termes extrêmes de cette double inégalité tendent respectivement vers $l-\varepsilon$ et $l+\varepsilon$. On aura donc, pour toute valeur de m supérieure à une limite convenable,

$$l-2\varepsilon < \sqrt[m]{u_m} < l+2\varepsilon,$$

et, comme ε est arbitraire, on en conclut que $\sqrt[m]{u_m}$ a pour limite le nombre l.

Il est à remarquer que la réciproque n'est pas vraie. Prenons, par exemple, la série

$$1, \quad a, \quad ab, \quad a^2b, \quad a^2b^2, \quad \ldots, \quad a^nb^{n-1}, \quad a^nb^n, \quad \ldots,$$

où a et b sont deux nombres différents. Le rapport d'un terme au précédent est alternativement a ou b, tandis que l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ a pour limite $\sqrt{ab}$ lorsque n augmente indéfiniment.

La proposition précédente peut servir à trouver la limite de certaines expressions qui se présentent sous forme indéterminée. Elle nous montre, par exemple, que $\sqrt[n]{1.2\ldots n}$ augmente indéfiniment avec n, car le rapport $\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-1)}$ augmente lui-même indéfiniment. On verra de même que $\sqrt[n]{n}$ a pour limite l'unité, ainsi que $\sqrt[n]{\log n}$.

160. Application de la plus grande des limites. — Cauchy a présenté la règle précédente sous une forme plus générale. Soit a_n le terme général d'une série à termes positifs. Considérons la suite

(5) $$a_1, \quad a_2^{\frac{1}{2}}, \quad a_3^{\frac{1}{3}}, \quad \ldots, \quad a_n^{\frac{1}{n}}, \quad \ldots;$$

---

(1) CAUCHY, *Cours d'Analyse*.

si les termes de cette suite n'ont pas de limite supérieure, le terme général a_n ne tend pas vers zéro, et la série est divergente. Si tous les termes de la suite (5) sont moindres qu'un nombre fixe, soit ω la plus grande des limites des termes de cette suite.

La série Σa_n est convergente si ω est inférieur à un, et divergente si ω est supérieur à un.

Pour démontrer la première partie, soit $1-\alpha$ un nombre compris entre ω et 1. D'après la définition de la plus grande des limites (n° 156), il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite (5) supérieurs à $1-\alpha$; on peut donc trouver un nombre entier p tel que, pour toute valeur de n supérieure à p, on ait $\sqrt[n]{a_n} < 1-\alpha$. La série Σa_n est donc convergente. Au contraire, si l'on a $\omega > 1$, soit $1+\alpha$ un nombre compris entre 1 et ω; il y a une infinité de termes de la suite (5) supérieurs à $1+\alpha$, et par suite une infinité de valeurs de n pour lesquelles a_n est plus grand que un. La série Σa_n est donc divergente. Il n'y a doute que dans le cas où $\omega = 1$.

161. Théorème de Cauchy. — Lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers l'unité, sans être constamment supérieur à un, les règles de d'Alembert et de Cauchy ne permettent pas d'affirmer la convergence ou la divergence d'une série. Il faut dans ce cas prendre pour termes de comparaison d'autres séries jouissant de la même propriété, et de caractère connu. La proposition suivante, que Cauchy a déduite de l'étude des intégrales définies, permet souvent de décider de la convergence ou de la divergence d'une série, lorsque les règles précédentes ne permettent pas de rien affirmer.

Soit $\varphi(x)$ une fonction positive à partir d'une certaine valeur a de x, allant constamment en décroissant et tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment. La courbe $y=\varphi(x)$ est asymptote à l'axe des x, et l'intégrale définie $\int_a^l \varphi(x)\,dx$ peut tendre vers une limite finie ou non, lorsque l croît indéfiniment. Cela posé, *la série*

$$(6) \qquad \varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n)+\ldots$$

est convergente si l'intégrale précédente tend vers une limite, et divergente dans le cas contraire.

Considérons, en effet, les rectangles construits avec la base *un* et les hauteurs respectives $\varphi(a)$, $\varphi(a+1)$, $\ldots$, $\varphi(a+n)$; ces



rectangles étant tous extérieurs à la courbe $y = \varphi(x)$, la somme de leurs aires est évidemment supérieure à l'aire de la courbe comprise entre l'axe des x et les deux ordonnées $x = a$, $x = a + n$,

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \ldots + \varphi(a+n) > \int_a^{a+n} \varphi(x)\,dx.$$

Si nous prenons au contraire les rectangles intérieurs construits avec la base *un* et les hauteurs respectives $\varphi(a+1)$, $\varphi(a+2)$, ..., $\varphi(a+n)$, la somme des aires de ces rectangles est moindre que l'aire de la courbe, ce qu'on peut écrire

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \ldots + \varphi(a+n) < \varphi(a) + \int_a^{a+n} \varphi(x)\,dx.$$

Cela posé, si l'intégrale $\int_a^l \varphi(x)\,dx$ tend vers une limite L lorsque l augmente indéfiniment, la somme $\varphi(a) + \ldots + \varphi(a+n)$, restant constamment moindre que $\varphi(a) + \mathrm{L}$, tend vers une limite; la série (6) est donc convergente. Au contraire, si l'intégrale $\int_a^{a+n} \varphi(x)\,dx$ croît au delà de toute limite, il en est de même, d'après la première inégalité, de la somme

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \ldots + \varphi(a+n);$$

la série (6) est donc divergente.

Prenons par exemple $\varphi(x) = \frac{1}{x^\mu}$, où μ est positif, et $a = 1$. Cette fonction $\varphi(x)$ satisfait bien à toutes les conditions de l'énoncé, et l'intégrale $\int_1^l \frac{dx}{x^\mu}$ tend vers une limite lorsque l croît indéfiniment, pourvu que μ soit supérieur à l'unité, et dans ce cas seulement. Il en résulte que la série

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \ldots + \frac{1}{n^\mu} + \ldots$$

est convergente si μ est plus grand que un, et divergente si $\mu \leqq 1$.

Supposons encore $\varphi(x) = \frac{1}{x(\log x)^\mu}$, $a = 2$, μ étant positif et $\log x$ désignant le logarithme népérien. On a, en supposant $\mu \gtrless 1$,

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\log x)^\mu} = \frac{-1}{\mu - 1}\left[(\log n)^{1-\mu} - (\log 2)^{1-\mu}\right],$$

le second membre a une limite finie si $\mu > 1$ et augmente indéfiniment si $\mu < 1$. Dans le cas particulier où $\mu = 1$, on voit de la même façon que l'intégrale croît au delà de toute limite. La série

$$\frac{1}{2(\log 2)^\mu} + \frac{1}{3(\log 3)^\mu} + \ldots + \frac{1}{n(\log n)^\mu} + \ldots$$

est donc convergente si $\mu > 1$, et divergente si $\mu \leqq 1$.

Plus généralement la série dont le terme général est

$$\frac{1}{n \log n \log^2 n \log^3 n \ldots \log^{p-1} n (\log^p n)^\mu}$$

est convergente, si l'on a $\mu > 1$ et divergente si $\mu \leqq 1$. On a écrit, pour abréger, $\log^2 n$ à la place de $\log\log n$, $\log^3 n$ à la place de

$$\log\log\log n, \quad \ldots \quad \ldots.$$

Bien entendu on ne donne à l'entier n que les valeurs assez grandes pour que $\log n$, $\log^2 n$, $\log^3 n$, $\ldots$, $\log^p n$ soient positifs, et l'on suppose les termes manquants remplacés par des zéros. On le démontre comme pour les séries précédentes; si, par exemple, on a $\mu \neq 1$, la fonction

$$\frac{1}{x \log x \log^2 x \ldots (\log^p x)^\mu}$$

est la dérivée de $\frac{1}{1-\mu}(\log^p x)^{1-\mu}$, et cette dernière fonction ne tend vers une limite finie lorsque x augmente indéfiniment que si l'on a $\mu > 1$.

La proposition de Cauchy est susceptible d'applications d'un autre genre. La fonction $\varphi(x)$ satisfaisant toujours aux conditions énoncées plus haut, considérons la somme

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) + \ldots + \varphi(n+p),$$

où n et p sont deux nombres entiers que l'on fait croître indéfiniment. Si la série, dont le terme général est $\varphi(n)$, est convergente, la somme précédente a zéro pour limite, car elle est la différence des deux sommes S_{n+p+1} et S_n qui tendent l'une et l'autre vers la somme de la série. Mais si cette série est divergente, on ne peut plus rien affirmer. En reprenant la représentation géométrique de tout à l'heure, on parvient à la double inégalité

$$\int_n^{n+p} \varphi(x)\,dx < \varphi(n) + \varphi(n+1) + \ldots + \varphi(n+p) < \varphi(n) + \int_n^{n+p} \varphi(x)\,dx;$$

comme $\varphi(n)$ tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, on voit que la limite de la somme considérée est la même que celle de l'intégrale $\int_n^{n+p} \varphi(x)\,dx$, et elle dépend de la façon dont les nombres n et p croissent au delà de toute limite.

Par exemple, pour avoir la limite de la somme

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+p},$$

il suffit de chercher la limite de l'intégrale définie $\int_n^{n+p}\frac{dx}{x}=\log\left(1+\frac{p}{n}\right)$. Il est clair que cette intégrale n'a une limite que si le rapport $\frac{p}{n}$ a une limite; si α est la limite de ce rapport, la somme précédente a pour limite $\log(1+\alpha)$, comme on l'a déjà démontré (n° 49).

Pour avoir la limite de la somme

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+p}},$$

il faut de même chercher la limite de l'intégrale

$$\int_n^{n+p}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2(\sqrt{n+p}-\sqrt{n});$$

pour que cette expression ait une limite, il faut que le quotient $\frac{p}{\sqrt{n}}$ ait lui-même une limite α. L'expression précédente peut alors s'écrire

$$2\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}=2\frac{\frac{p}{\sqrt{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{p}{n}}},$$

et l'on voit qu'elle a aussi pour limite α.

162. Critères logarithmiques. — En prenant comme terme de comparaison la série

$$\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\ldots+\frac{1}{n^\mu}+\ldots,$$

Cauchy a été conduit à une nouvelle règle de convergence, tout à fait analogue à celle qui est relative à $\sqrt[n]{u_n}$:

Si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}$ *est constamment supé-*

rieur à un nombre fixe plus grand que l'unité, la série est convergente. Si $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ *est constamment inférieur à l'unité, la série est divergente.*

Lorsque $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ *tend vers une limite* l *quand* n *augmente indéfiniment, la série est convergente si* $l > 1$, *et divergente si* $l < 1$. *Il y a doute si* $l = 1$.

Pour démontrer la première partie, remarquons que de l'inégalité

$$\log \frac{1}{u_n} > k \log n$$

on déduit

$$\frac{1}{u_n} > n^k,$$

ou

$$u_n < \frac{1}{n^k};$$

comme l'on a $k > 1$, la série est donc convergente.

De même, si l'on a

$$\log \frac{1}{u_n} < \log n,$$

on en déduit $u_n > \frac{1}{n}$, la série est donc divergente.

Cette règle permet de reconnaître la convergence d'une série toutes les fois qu'à partir d'un certain rang les termes de cette série sont respectivement moindres que ceux de la série

$$\frac{A}{1^\mu} + \frac{A}{2^\mu} + \ldots + \frac{A}{n^\mu} + \ldots,$$

où A est un facteur constant, et $\mu > 1$. Si l'on a, en effet,

$$u_n < \frac{A}{n^\mu},$$

on en déduit

$$\log u_n + \mu \log n < \log A,$$

ou

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} > \mu - \frac{\log A}{\log n},$$

et le second membre a pour limite μ lorsque n augmente indéfiniment. A partir d'un certain rang, on aura donc en désignant par K un nombre compris entre un et μ,

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} > K.$$

En prenant de même comme termes de comparaison les séries

$$\sum \frac{1}{n(\log n)^\mu}, \quad \sum \frac{1}{n \log n (\log^2 n)^\mu}, \quad \ldots,$$

on obtient une infinité de règles de convergence, qui se déduiront de la précédente (¹) en remplaçant dans l'énoncé $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ par $\frac{\log \frac{1}{n u_n}}{\log^2 n}$, puis par $\frac{\log \frac{1}{n u_n \log n}}{\log^3 n}$, ... Ces règles s'appliquent à des cas de plus en plus étendus; il est facile de s'assurer, en effet, que si l'une d'elles permet de reconnaître la convergence ou la divergence d'une série, il en sera de même de toutes les suivantes. Mais, aussi loin que l'on aille dans la série des essais, il peut se faire que l'application de ces règles ne permette jamais de reconnaître le caractère d'une série. MM. du Bois-Reymond (²) et Pringsheim (³) ont en effet formé des séries, tant convergentes que divergentes, pour lesquelles les critères logarithmiques ne donnent aucune indication. Ce résultat est d'un grand intérêt théorique, mais les séries convergentes de cette espèce sont évidemment très lentement convergentes et ne paraissent pas susceptibles d'applications au calcul numérique (⁴).

(¹) *Voir* BERTRAND, *Traité de Calcul différentiel et intégral*, t. I, p. 238; *Journal de Liouville*, 1ʳᵉ série, t. VII, p. 35.

(²) *Ueber Convergenz von Reihen*... (*Journal de Crelle*, t. 76, p. 85; 1873).

(³) *Allgemeine Theorie der Divergenz*... (*Mathematische Annalen*, t. 35; 1890).

(⁴) Dans un exemple de série convergente, dû à M. du Bois-Reymond, il faudrait, d'après l'auteur, calculer la somme d'un nombre de termes égal au *volume de la Terre exprimé en millimètres cubes* pour avoir seulement la moitié de la somme de cette série.

163. Règle de Raabe et Duhamel. — En conservant les mêmes séries comme termes de comparaison, mais en comparant les rapports de deux termes consécutifs au lieu de comparer les termes eux-mêmes, on est conduit à de nouvelles règles, moins générales, il est vrai, que les précédentes, mais qui sont souvent d'une application plus commode dans la pratique. Ainsi, soit

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{7}$$

une série à termes positifs dans laquelle le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers l'unité, en étant constamment inférieur à un. On peut l'écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n},$$

α_n tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. La comparaison de ce rapport avec $\left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu$ conduit à la règle suivante, obtenue d'abord par Raabe ([1]), puis par Duhamel ([2]) :

Si, à partir d'un certain rang, le produit $n\alpha_n$ est constamment supérieur à un nombre fixe, plus grand que un, la série est convergente. Si, à partir d'un certain rang, ce produit est constamment plus petit que un, la série est divergente.

La seconde partie de la proposition est immédiate. Si, à partir d'un certain rang, on a $n\alpha_n < 1$, on en déduit

$$\frac{1}{1+\alpha_n} > \frac{n}{n+1},$$

et le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur au rapport de deux termes consécutifs de la série harmonique : la série est donc divergente.

Pour démontrer la première partie, supposons qu'à partir d'un certain rang on ait constamment $n\alpha_n > k > 1$. Soit μ un nombre compris entre 1 et k, $1 < \mu < k$; la convergence de la série sera assurée si, à partir d'un certain rang, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est moindre que le rapport $\left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu$ de deux termes consécutifs de la série

([1]) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. X; 1832.
([2]) *Journal de Liouville*, t. IV; 1838.

dont le terme général est $n^{-\mu}$. Il faut, pour cela, que l'on ait

$$\frac{1}{1+\alpha_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu}, \tag{8}$$

ce qu'on peut écrire, en développant $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu$ par la formule de Taylor limitée au terme en $\frac{1}{n^2}$,

$$1+\frac{\mu}{n}+\frac{\lambda_n}{n^2} < 1+\alpha_n,$$

λ_n restant toujours moindre qu'un nombre fixe lorsque n augmente indéfiniment. Cette condition devient, en simplifiant,

$$\mu+\frac{\lambda_n}{n} < n\alpha_n;$$

or le premier membre a pour limite μ lorsque n croît indéfiniment. A partir d'une valeur de n assez grande, ce premier membre sera donc moindre que $n\alpha_n$, ce qui suffit pour démontrer l'inégalité (8) et par suite la convergence de la série.

Lorsque le produit $n\alpha_n$ tend vers une limite l pour n infini, on peut appliquer la règle précédente. La série est convergente si $l > 1$, et divergente si $l < 1$. Il y a doute pour $l = 1$, sauf dans le cas où $n\alpha_n$ tend vers un en lui restant constamment inférieur; la série est alors divergente.

Lorsque le produit $n\alpha_n$ a pour limite l'unité, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ au rapport de deux termes consécutifs de la série

$$\frac{1}{2(\log 2)^\mu}+\ldots+\frac{1}{n(\log n)^\mu}+\ldots,$$

qui est convergente si $\mu > 1$, et divergente si $\mu \leqq 1$. Écrivons le rapport de deux termes consécutifs

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}},$$

β_n tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. *Si, à partir d'un certain rang, le produit $\beta_n \log n$ est constamment supérieur à un nombre fixe plus grand que l'unité, la série est convergente. Si ce produit est constamment inférieur à l'unité, la série est divergente.*

Pour démontrer la première partie, supposons que, pour toutes les valeurs de n supérieures à un nombre p, on ait $\beta_n \log n > k > 1$. Soit μ un nombre tel que $1 < \mu < k$. La convergence de la série sera établie si, à partir d'un certain rang, on a

$$(9) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n}{n+1}\left[\frac{\log n}{\log(n+1)}\right]^{\mu},$$

ce qui peut s'écrire

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta_n}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]^{\mu}$$

ou, en appliquant la formule de Taylor au second membre,

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta_n}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left\{1 + \frac{\mu \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} + \lambda_n \left[\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]^2\right\},$$

λ_n restant inférieur en valeur absolue à un nombre fixe lorsque n croît indéfiniment. Cette inégalité devient, en simplifiant,

$$\beta_n \log n > \mu(n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{\lambda_n(n+1)\left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^2}{\log n};$$

or le produit $(n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ a pour limite l'unité lorsque n augmente indéfiniment, car on peut l'écrire, d'après la formule de Taylor,

$$(10) \qquad (n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2n}(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro. Le second membre de l'inégalité précédente a donc pour limite μ, et l'inégalité est assurée à partir d'un certain rang, puisque le premier membre est supérieur à un nombre $k > \mu$.

On démontre de même la seconde partie en comparant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ au rapport de deux termes consécutifs de la série dont le terme général est $\frac{1}{n \log n}$. L'inégalité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n}{n+1}\,\frac{\log n}{\log(n+1)}$$

peut s'écrire

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta_n}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]$$

ou

$$\beta_n \log n < (n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

or le second membre tend vers l'unité par valeurs supérieures à l'unité, comme le montre la formule (10). L'inégalité est donc assurée, à partir d'un certain rang, puisque le premier membre ne dépasse pas l'unité.

De la proposition précédente on déduit encore, comme corollaire, que, si le produit $\beta_n \log n$ tend vers une limite l, lorsque n croît indéfiniment, la série est convergente si $l > 1$, et divergente si $l < 1$. Il y a doute pour $l = 1$, sauf dans le cas où le produit $\beta_n \log n$ reste toujours inférieur à un; la série est alors divergente.

Lorsque $\beta_n \log n$ tend vers l'unité en lui restant supérieur, on écrira de même

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1 + \gamma_n}{n \log n}},$$

γ_n tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. On aura des énoncés tout pareils aux précédents en considérant le produit $\gamma_n \log^2 n$, et ainsi de suite.

Corollaire. — Lorsque, dans une série à termes positifs, le rapport d'un terme au précédent est de la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{r}{n} + \frac{H_n}{n^{1+\mu}},$$

μ étant un nombre positif, r étant constant, et la valeur absolue de H_n restant inférieure à un nombre fixe lorsque n croît indéfiniment, *la série est convergente si r est plus grand que un, et divergente dans tous les autres cas.*

Si nous posons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \alpha_n},$$

on a, en effet,

$$n\alpha_n = \frac{r - \frac{H_n}{n^\mu}}{1 - \frac{r}{n} + \frac{H_n}{n^{1+\mu}}},$$

et par suite $\lim n\alpha_n = r$. La série est donc convergente si $r > 1$ et divergente si $r < 1$. Le seul cas douteux est celui où $r = 1$. Pour lever l'ambiguïté, posons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta_n}{n}};$$

il vient

$$\beta_n \log n = \frac{\frac{\log n}{n} - \frac{n+1}{n} H_n \frac{\log n}{n^\mu}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{H_n}{n^{1+\mu}}};$$

et le second membre tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, aussi petit que soit le nombre positif μ. La série est donc divergente.

Supposons, par exemple, que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit une fonction rationnelle de n, tendant vers l'unité lorsque n croît indéfiniment,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \dots}{n^p + b_1 n^{p-1} + b_2 n^{p-2} + \dots};$$

on peut aussi l'écrire, en effectuant la division et s'arrêtant au terme en $\frac{1}{n^2}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{a_1 - b_1}{n} + \frac{\varphi(n)}{n^2},$$

$\varphi(n)$ étant une fonction rationnelle de n qui tend vers une limite finie lorsque n croît indéfiniment. D'après le résultat qui précède, *pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que l'on ait*

$$b_1 > a_1 + 1.$$

Ce théorème est dû à Gauss, qui l'a démontré directement; c'est une des premières règles générales de convergence ([1]).

164. Séries absolument convergentes. — Occupons-nous maintenant des séries dont les termes peuvent avoir des signes quelconques. Lorsque à partir d'un rang assez élevé tous les termes ont le même signe, ce cas se ramène immédiatement au précédent. Il suffit donc d'étudier le cas où il y a dans la série une infinité de termes positifs et une infinité de termes négatifs. Nous allons d'abord démontrer la proposition suivante, qui est fondamentale :

Une série à termes quelconques est convergente lorsque la série formée par les valeurs absolues de ses termes est elle-même convergente.

Soient

(11) $$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

une série dont les termes peuvent avoir un signe quelconque et

(12) $$U_0 + U_1 + \dots + U_n + \dots$$

([1]) *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \dots$ (*Œuvres complètes*, t. III, p. 138.)



la série formée par les valeurs absolues des termes de la première, où l'on a posé $U_n = |u_n|$. Si la série (12) est convergente il en est de même de la série (11); c'est une conséquence du théorème général de convergence, puisqu'on a

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < U_n + U_{n+1} + \ldots + U_{n+p},$$

et que la seconde somme peut être rendue moindre que tout nombre donné, pourvu que l'on prenne le nombre n assez grand, le nombre p restant arbitraire.

On peut encore s'en rendre compte autrement. Écrivons

$$u_n = (u_n + U_n) - U_n,$$

et considérons la série auxiliaire dont le terme général est $u_n + U_n$,

$$(13) \qquad (u_0 + U_0) + (u_1 + U_1) + \ldots + (u_n + U_n) + \ldots;$$

S_n, S'_n, S''_n désignant respectivement les sommes des n premiers termes des séries (11), (12) et (13), on a évidemment

$$S_n = S''_n - S'_n.$$

Or la série (12) est convergente par hypothèse; il en est de même de la série (13) qui n'a aucun terme négatif et dont le terme général est au plus égal à $2U_n$. Les sommes S'_n, S''_n, et par suite S_n, tendent donc vers des limites lorsque n augmente indéfiniment, c'est-à-dire que la série proposée (11) est convergente. On voit de plus que cette série peut être considérée comme provenant de la soustraction terme à terme de deux séries convergentes à termes positifs.

Toute série, telle que les valeurs absolues de ses termes forment une série convergente, est dite *absolument convergente*. On peut, dans une pareille série, modifier l'ordre des termes d'une façon arbitraire sans changer la somme de cette série. Considérons d'abord une série convergente à termes positifs, de somme S,

$$(14) \qquad a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

et soit

$$(15) \qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots$$

une autre série ayant les mêmes termes que la première, rangés dans un ordre différent, de telle façon que chaque terme de la

série (14) se retrouve dans la série (15) à une place quelconque, et qu'inversement chaque terme de la série (15) se retrouve aussi dans la série (14), mais à un rang différent.

Soit S'_m la somme des m premiers termes de la série (15); puisque tous ces termes se retrouvent dans la série (14), il est clair que l'on peut prendre un nombre n assez grand pour que les m premiers termes de la série (15) fassent partie des n premiers termes de la série (14). On a donc

$$S'_m < S_n < S,$$

ce qui prouve que la série (15) est convergente et a une somme $S' \leq S$. Tout pareillement, on doit avoir $S \leq S'$, et par suite $S' = S$. Le même raisonnement prouve que, si l'une des séries (14) et (15) est divergente, il en est de même de la seconde.

On peut aussi, dans une série convergente à termes positifs, grouper les termes ensemble d'une façon arbitraire, c'est-à-dire former une nouvelle série dont chaque terme soit égal à la somme d'un certain nombre de termes de la première, pris d'une façon quelconque, sans changer la somme de la série. Supposons d'abord que l'on groupe ensemble un certain nombre de termes consécutifs, et soit

$$(16) \qquad A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_m + \ldots$$

la nouvelle série ainsi obtenue, où l'on a, par exemple,

$$A_0 = a_0 + a_1 + \ldots + a_p, \qquad A_1 = a_{p+1} + \ldots + a_q,$$
$$A_2 = a_{q+1} + \ldots + a_r, \qquad \ldots.$$

La somme S'_m des m premiers termes de la série (16) est égale à la somme S_N des N premiers termes de la série proposée ($N > m$). Lorsque m augmente indéfiniment, il en est de même de N et, par suite, S'_m a aussi pour limite S.

En combinant les deux opérations précédentes on voit que, étant donnée une série convergente à termes positifs, on peut, sans changer la somme, la remplacer par une autre série dont chaque terme est formé par la somme d'un certain nombre de termes de la première pris dans un ordre quelconque. Il suffit que chaque terme de la première série entre dans un des groupes qui forment les termes de la seconde série et dans un seul.

Toute série absolument convergente pouvant être regardée

comme la différence de deux séries convergentes à termes positifs, les opérations précédentes sont encore légitimes pour une pareille série. On voit donc qu'une série absolument convergente peut être, au point de vue du calcul numérique, traitée comme une somme d'un nombre fini de termes.

165. Séries semi-convergentes. — Une série à termes quelconques peut être convergente, sans que la série formée par les valeurs absolues de ses termes soit convergente. C'est ce que prouve très clairement le théorème sur les séries alternées dont je me borne à rappeler l'énoncé :

Une série à termes alternativement positifs et négatifs est convergente si la valeur absolue de chaque terme est plus petite que la valeur absolue du terme précédent, et si, en outre, les termes décroissent indéfiniment en valeur absolue quand leur rang s'éloigne indéfiniment.

Par exemple la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

est convergente; nous avons trouvé (n° 49) que la somme est égale à $\log 2$. La série formée par les valeurs absolues des termes, qui est la série harmonique, est divergente. Les séries convergentes, qui ne sont pas absolument convergentes, sont dites *semi-convergentes*. Les travaux de Cauchy, de Lejeune-Dirichlet et de Riemann ont bien montré la nécessité de distinguer entre les séries absolument convergentes et les séries semi-convergentes. Ainsi, dans une pareille série, on n'a pas le droit de changer l'ordre dans lequel les termes se succèdent ou de grouper ces termes d'une façon arbitraire; ces opérations peuvent avoir pour résultat de modifier la somme de la série, ou même de changer une série convergente en une série divergente, et inversement. Reprenons, par exemple, la série convergente

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \ldots$$

dont la somme est évidemment la limite de l'expression

$$\sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$$

lorsque m augmente indéfiniment. Écrivons les termes de cette série dans un autre ordre, en faisant suivre chaque terme positif de deux termes négatifs,

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}+\ldots;$$

on démontre aisément, en considérant les sommes S_{3n}, S_{3n+1}, S_{3n+2}, que cette nouvelle série est convergente. Elle a pour somme la limite de l'expression

$$\sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+4}\right)$$

lorsque m augmente indéfiniment. Mais on a

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right),$$

et, par conséquent, la somme de la seconde série est égale à la moitié de la somme de la première.

D'une façon générale, étant donnée une série qui est convergente sans l'être absolument, on peut ranger les termes de cette série dans un ordre tel que la nouvelle série soit convergente et ait pour somme un nombre quelconque A donné à l'avance. Désignons par S_p la somme des p premiers termes positifs de cette série, par S'_q la somme des valeurs absolues des q premiers termes négatifs; la somme des $p+q$ premiers termes est évidemment $S_p - S'_q$. Lorsque les deux nombres p et q augmentent indéfiniment, il doit en être de même des deux sommes S_p et S'_q, sans quoi la série serait divergente ou absolument convergente. D'autre part, la série étant convergente, le terme général doit tendre vers zéro.

Cela posé, nous formerons une nouvelle série ayant pour somme A de la manière suivante : Prenons les termes positifs de la série proposée dans l'ordre où ils se présentent jusqu'à ce que leur somme soit supérieure à A; écrivons à leur suite les premiers termes négatifs dans l'ordre où ils se présentent, et arrêtons-nous dès que la somme des termes écrits est inférieure à A; écrivons ensuite les termes positifs en commençant par le premier des termes négligés, et arrêtons-nous dès que la somme des termes écrits est supérieure à A, puis reprenons les termes négatifs, et ainsi de

suite. Il est visible que les sommes des termes de cette nouvelle série sont tantôt plus grandes et tantôt plus petites que A, mais qu'elles diffèrent de A d'une quantité qui décroît indéfiniment.

166. Règle d'Abel. — On doit à Abel un théorème permettant de reconnaître la convergence de certaines séries, qui échappent aux règles précédentes. La démonstration repose sur un lemme dont on s'est déjà servi (n° 75).

Soit

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

une série convergente ou *indéterminée* (c'est-à-dire telle que la somme des n premiers termes soit toujours moindre en valeur absolue qu'un nombre fixe A); soit, d'autre part,

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_1, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots$$

une suite de nombres positifs, dont chacun est plus petit que le précédent et tels que $\lim \varepsilon_n = 0$, pour $n = \infty$. Cela posé, *la série*

$$(17) \qquad \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n + \ldots$$

est convergente, sous les conditions énoncées.

Il résulte en effet des hypothèses que l'on a, quels que soient les nombres n et p,

$$|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < 2A,$$

et, par suite, d'après le lemme rappelé tout à l'heure,

$$|u_{n+1}\varepsilon_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\varepsilon_{n+p}| < 2A\varepsilon_{n+1};$$

puisque ε_{n+1} tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, on peut prendre n assez grand pour que la valeur absolue de la somme

$$\varepsilon_{n+1} u_{n+1} + \ldots + \varepsilon_{n+p} u_{n+p}$$

soit moindre que tout nombre donné à l'avance, quel que soit p. La série (17) est donc convergente, en vertu du théorème général (n° 157).

Lorsque la série $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ se réduit à la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

dont les termes sont alternativement $+1$ et -1, la proposition précédente se réduit au théorème rappelé plus haut, concernant les séries alternées.

Voici un autre exemple. La série

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin n\theta + \ldots$$

est convergente ou indéterminée. Lorsque $\sin\theta = 0$, la série a tous ses termes nuls; lorsque $\sin\theta \gtrless 0$, la somme des n premiers termes est égale,

d'après une formule de Trigonométrie, à

$$\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right),$$

et par conséquent est moindre en valeur absolue que $\frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$. On en conclut que la série

$$\frac{\sin\theta}{1}+\frac{\sin 2\theta}{2}+\ldots+\frac{\sin n\theta}{n}+\ldots$$

est convergente, pour toute valeur de θ, et l'on démontre de la même façon que la série

$$\frac{\cos\theta}{1}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\ldots+\frac{\cos n\theta}{n}+\ldots$$

est convergente, sauf pour $\theta = 2k\pi$.

Corollaire. — On peut énoncer une propriété plus générale, en se bornant aux séries convergentes. Soient

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$$

une série convergente, et

$$\varepsilon_0,\quad \varepsilon_1,\quad \ldots,\quad \varepsilon_n,\quad \ldots$$

une suite de nombres positifs, allant toujours en croissant ou en décroissant, et tendant vers une limite k, différente de zéro, lorsque n augmente indéfiniment, *la série*

$$\varepsilon_0 u_0+\varepsilon_1 u_1+\ldots+\varepsilon_n u_n+\ldots \tag{18}$$

est aussi convergente.

Supposons, pour fixer les idées, que les nombres ε_i aillent en croissant : nous pouvons écrire

$$\varepsilon_0 = k-\alpha_0,\qquad \varepsilon_1 = k-\alpha_1,\qquad \ldots,\qquad \varepsilon_n = k-\alpha_n,\qquad \ldots,$$

et les nombres α_0, α_1, ..., α_n, ... forment une suite de nombres positifs décroissants, α_n tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Les deux séries

$$ku_0+ku_1+\ldots+ku_n+\ldots,$$
$$\alpha_0 u_0+\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_n u_n+\ldots$$

sont l'une et l'autre convergentes et, par suite, il en est de même de la série (18).

II. — SÉRIES A TERMES IMAGINAIRES. — SÉRIES MULTIPLES.

167. Définitions. — Nous indiquerons dans ce paragraphe quelques généralisations de la notion de série. Soit

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{19}$$

une série dont les termes sont des quantités imaginaires

$$u_0 = a_0 + b_0 i, \qquad u_1 = a_1 + b_1 i, \qquad \ldots, \qquad u_n = a_n + b_n i, \qquad \ldots;$$

cette série est dite *convergente*, si les deux séries formées par les parties réelles et les coefficients de i sont séparément convergentes,

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{20}$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots. \tag{21}$$

Soient S′ et S″ les sommes des deux séries (20) et (21) : la somme de la série (19) est $S = S' + i S''$; il est évident que cette somme est encore la limite de la somme S_n des n premiers termes de la série (19) lorsque le nombre n augmente indéfiniment. On voit qu'une série à termes imaginaires n'est au fond que l'ensemble de deux séries à termes réels.

Lorsque la série formée par les modules des différents termes de la série (19)

$$\sqrt{a_0^2 + b_0^2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \ldots \tag{22}$$

est convergente, il est clair que chacune des séries (20) et (21) est absolument convergente, car on a

$$|a_n| \leqq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

et

$$|b_n| \leqq \sqrt{a_n^2 + b_n^2};$$

la série (19) est dite elle-même *absolument convergente*. On peut modifier l'ordre des termes d'une pareille série, ou grouper ces termes d'une façon arbitraire, sans changer la somme.

A toute règle permettant d'affirmer qu'une série à termes positifs est convergente correspond une règle permettant d'affirmer qu'une série à termes quelconques, réels ou imaginaires,

est absolument convergente. Ainsi, lorsque dans une série le module du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est, à partir d'un certain rang, plus petit qu'un nombre fixe inférieur à l'unité, la série est absolument convergente. Soit en effet $U_i = |u_i|$; si, à partir d'un certain rang, on a constamment $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k < 1$, on peut écrire cette inégalité

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < k < 1,$$

ce qui prouve que la série des modules

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots$$

est convergente. Si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite l lorsque n croît indéfiniment, la série est convergente lorsque $|l| < 1$, et divergente lorsque $|l| > 1$; dans ce dernier cas, en effet, le module du terme général u_n ne tend pas vers zéro, les deux séries (20) et (21) ne peuvent être à la fois convergentes. Il y a doute si $|l| = 1$.

D'une façon générale, soit ω la plus grande des limites de $\sqrt[n]{U_n}$ lorsque n augmente indéfiniment. La série (19) est absolument convergente si $\omega < 1$, et divergente si $\omega > 1$, car dans ce cas le module du terme général ne tend pas vers zéro (n° 161). Il y a doute si $\omega = 1$; la série peut être absolument convergente, simplement convergente, ou divergente.

168. Multiplication des séries. — Soient

(23) $$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

(24) $$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

deux séries à termes quelconques. Multiplions de toutes les manières possibles un terme de la première série par un terme de la seconde, et groupons ensemble tous les produits $u_i v_j$ pour lesquels la somme $i + j$ des indices est la même; nous obtenons ainsi une nouvelle série

(25) $$\begin{cases} u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots \\ \quad + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0) + \ldots. \end{cases}$$

Lorsque les deux séries (23) et (24) sont absolument convergentes, la série (25) est aussi convergente et a pour somme le produit des sommes des deux premières. Ce théorème, dû à Cauchy,

a été généralisé par M. Mertens ([1]), qui a montré qu'il était encore vrai, pourvu qu'une seule des deux séries (23) et (24) fût absolument convergente, la seconde pouvant être simplement convergente.

Supposons, pour fixer les idées, que la série (23) soit absolument convergente, et soit w_n le terme général de la série (25)

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0.$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de faire voir que les deux différences

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_{2n} - (u_0 + u_1 + \ldots + u_n)\ (v_0 + v_1 + \ldots + v_n),$$
$$w_0 + w_1 + \ldots + w_{2n+1} - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n+1})(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n+1}),$$

tendent vers zéro, lorsque n croît indéfiniment. La démonstration étant la même dans les deux cas, considérons la première différence, que nous pouvons écrire, en ordonnant par rapport aux u_i,

$$\delta = u_0(v_{n+1} + \ldots + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + \ldots + v_{2n-1}) + \ldots + u_{n-1}v_{n+1}$$
$$+ u_{n+1}(v_0 + \ldots + v_{n-1}) + u_{n+2}(v_0 + \ldots + v_{n-2}) + \ldots + u_{2n}v_0.$$

La série (23) étant absolument convergente, la somme

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n$$

reste inférieure, quel que soit n, à un nombre positif fixe A; de même, la série (24) étant convergente, le module de la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ reste inférieur, quel que soit n, à un nombre positif fixe B. Cela posé, ε étant un nombre positif quelconque donné à l'avance, nous pouvons choisir un nombre positif m assez grand pour que l'on ait

$$U_{n+1} + \ldots + U_{n+p} < \frac{\varepsilon}{A + B},$$

$$|v_{n+1} + \ldots + v_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{A + B},$$

quel que soit le nombre p, pourvu que $n \geqq m$. Le nombre n étant choisi de cette façon, on aura une limite supérieure du module de δ en remplaçant $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ par $U_0, U_1, \ldots, U_{2n}$ respectivement, puis $v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{n+p}$ par $\frac{\varepsilon}{A+B}$ et enfin

([1]) *Journal de Crelle*, t. 79.

$v_0 + \ldots + v_{n-1}$, $v_0 + \ldots + v_{n-2}$, $\ldots$, v_0 par B. Il vient alors

$$|\delta| < U_0 \frac{\varepsilon}{A+B} + U_1 \frac{\varepsilon}{A+B} + \ldots + U_{n-1} \frac{\varepsilon}{A+B} + U_{n+1} B + U_{n+2} B + \ldots + U_{2n} B,$$

ou encore

$$|\delta| < \frac{\varepsilon}{A+B} (U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}) + B(U_{n+1} + \ldots + U_{2n}) < \frac{\varepsilon A}{A+B} + \frac{\varepsilon B}{A+B},$$

ou enfin $|\delta| < \varepsilon$. La différence δ a donc zéro pour limite.

169. Séries doubles. — Considérons un échiquier rectangulaire qui serait limité en haut et à gauche, mais qui se prolongerait indéfiniment en bas et à droite. Cet échiquier contient une infinité de colonnes verticales, qui seront numérotées de o à $+\infty$, et une infinité de files horizontales qui seront numérotées également de o à $+\infty$. Concevons maintenant qu'à chaque case de cet échiquier on fasse correspondre un nombre qui sera inscrit dans la case correspondante; soit a_{ik} le nombre correspondant à la case qui est située dans la file de rang i et dans la colonne de rang k.

Nous obtenons ainsi un tableau disposé comme le suivant

$$(26) \qquad \begin{array}{|cccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0n} & \ldots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Nous supposerons d'abord que tous les termes de ce tableau sont réels et positifs.

Imaginons maintenant une suite de courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, s'éloignant indéfiniment dans toutes les directions et formant, avec les deux droites qui limitent le tableau, une suite de courbes fermées s'enveloppant mutuellement. Soient $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, les sommes des termes du tableau qui sont à l'intérieur de ces courbes fermées. Si la somme S_n tend vers une limite S lorsque n

augmente indéfiniment, on dit que la série double

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{ik} \tag{27}$$

est convergente et a pour somme S. Pour justifier cette définition, il est indispensable de démontrer que la limite S est indépendante de la forme des courbes C. Imaginons, en effet, une autre suite de courbes s'éloignant indéfiniment dans tous les sens, C'_1, C'_2, ..., C'_m, ..., et soient S'_1, S'_2, ..., S'_m, ... les sommes correspondantes. Le nombre m étant fixé, on peut toujours choisir le nombre n assez grand pour que la courbe C_n soit tout entière à l'extérieur de C'_m; on a donc $S'_m < S_n$ et, par suite, $S'_m < S$, quel que soit m. Or cette somme S'_m croît avec l'indice; elle tend donc vers une limite $S' \leqq S$. On démontrera de la même façon que l'on a aussi $S \leqq S'$; par suite $S' = S$.

On pourra prendre, par exemple, pour former les courbes C, les deux côtés d'un carré dont le côté augmente indéfiniment, ou des droites également inclinées sur les deux côtés de l'échiquier; les sommes correspondantes seront les suivantes

$$a_{00} + (a_{10} + a_{11} + a_{01}) + \ldots + (a_{n0} + a_{n1} + \ldots + a_{nn} + a_{n-1,n} + \ldots + a_{0n}),$$
$$a_{00} + (a_{10} + a_{01}) + (a_{20} + a_{11} + a_{02}) + \ldots + (a_{n0} + a_{n-1,1} + \ldots + a_{0n});$$

si l'une de ces sommes tend vers une limite lorsque n croît indéfiniment, il en est de même de la seconde et ces limites sont égales. On peut aussi faire la somme du tableau par lignes ou par colonnes. Supposons en effet que la série double (27) soit convergente, et soit S la somme. Il est clair que la somme d'un nombre quelconque de termes du tableau est inférieure à S, et il en résulte que toutes les séries telles que

$$a_{i0} + a_{i1} + \ldots + a_{in} + \ldots \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{28}$$

obtenues en prenant les termes d'une file horizontale sont convergentes, car la somme

$$a_{i0} + a_{i1} + \ldots + a_{in}$$

est toujours inférieure à S et va en croissant avec n.

Soient σ_0, σ_1, ..., σ_i, ... les sommes des diverses séries con-

vergentes ainsi obtenues; la nouvelle série

(29) $$\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_i + \ldots$$

est également convergente. En effet, considérons la somme des termes du tableau Σa_{ik}, tels que l'on ait $i \leqq p$, $k \leqq r$. Cette somme est toujours moindre que S; si, laissant fixe le nombre p, on fait croître indéfiniment le nombre r, elle a pour limite

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_p.$$

On a donc toujours $\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_p < S$, et, comme cette somme va en croissant avec le nombre p, on en conclut que la série (29) est convergente et a pour somme un nombre $\Sigma \leqq S$. Inversement, si toutes les séries (28) sont convergentes, et si la nouvelle série (29) formée par les sommes des premières est convergente et a pour somme Σ, il est évident que la somme d'un nombre quelconque de termes du tableau (26) est inférieure à Σ. On a donc aussi $S \leqq \Sigma$, et par suite $\Sigma = S$.

Tout ce que nous venons de dire des séries obtenues en prenant des files horizontales s'applique évidemment aux séries obtenues en prenant des colonnes verticales. Pour avoir la somme d'une série double dont tous les éléments sont positifs, on peut l'évaluer soit par lignes, soit par colonnes, soit en prenant des courbes limites de forme quelconque. En particulier, si la série est convergente quand on fait la somme par lignes horizontales, il en sera de même quand on l'évaluera par colonnes, et la somme sera la même. On pourrait énoncer pour les séries doubles à termes positifs une suite de théorèmes analogues à ceux qui ont été établis pour les séries simples. Par exemple, si une série à double entrée, à termes positifs, a ses termes respectivement moindres que ceux d'une autre série double convergente, la première série est également convergente, etc.

Supposons maintenant que les éléments du tableau (26) aient des signes quelconques. Si la série double

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_{ik}|$$

est convergente, il en sera de même de la série double

$$(30) \qquad \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{ik}.$$

Imaginons en effet deux tableaux à double entrée, T', T'' analogues au tableau (26), que l'on obtiendrait en remplaçant a_{ik} par $a_{ik}+|a_{ik}|$, puis par $|a_{ik}|$. La somme d'un nombre quelconque de termes du tableau (26) est égale à la différence entre la somme des termes correspondants du tableau T' et la somme des termes correspondants du tableau T''. Or ces deux sommes tendent vers des limites déterminées, et indépendantes de la façon dont on fait croître indéfiniment le nombre des termes dont on calcule la somme, car les deux séries doubles à termes positifs

$$(31) \qquad \Sigma\Sigma|a_{ik}|, \quad \Sigma\Sigma\{a_{ik}+|a_{ik}|\}$$

sont convergentes, la première par hypothèse, la seconde, comme ayant ses termes au plus égaux à ceux de la série $\Sigma\Sigma 2|a_{ik}|$. On dit que la série double (30) est *absolument convergente;* on peut l'évaluer, soit par lignes, soit par colonnes, comme pour une série à termes positifs.

Enfin, lorsque les éléments du tableau (26) sont imaginaires, on peut évidemment le décomposer en deux tableaux en prenant d'une part les parties réelles, d'autre part les parties imaginaires. Si le tableau à double entrée obtenu en remplaçant chaque terme par son module donne naissance à une série double convergente, chacun des tableaux partiels donne naissance à une série double absolument convergente. La série double

$$\Sigma\Sigma a_{ik}$$

est elle-même absolument convergente; d'après ce que l'on vient de voir, on peut évaluer la somme soit par lignes, soit par colonnes, soit de toute autre façon.

170. Une série double absolument convergente peut être remplacée par une série ordinaire formée des mêmes termes. Il suffit de montrer qu'on peut toujours numéroter les cases d'un échiquier indéfini tel que (26), de telle façon que chaque case ait un numéro déterminé, aucune d'elles n'étant

oubliée. En d'autres termes, si l'on considère, d'une part la suite naturelle des nombres

$$(32) \qquad 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n, \ \ldots,$$

d'autre part tous les systèmes de deux nombres entiers (i, k), où $i \geqq 0$, $k \geqq 0$, on peut, à chacun de ces systèmes, faire correspondre un des nombres de la suite (32) de façon qu'inversement à un nombre n ne corresponde qu'un seul de ces systèmes. Écrivons, en effet, tous ces systèmes, les uns à la suite des autres, de la manière suivante

$$(0, 0), \ (1, 0), \ (0, 1), \ (2, 0), \ (1, 1), \ (0, 2) \ \ldots,$$

et, d'une façon générale, après avoir écrit tous les systèmes pour lesquels on a $i + k < n$, écrivons tous les systèmes pour lesquels $i + k = n$, en commençant par le système $(n, 0)$ et faisant décroître i successivement d'une unité jusqu'à zéro. Il est clair que chaque système (i, k) n'en aura qu'un nombre *fini* avant lui et occupera par conséquent un rang déterminé dans la suite. Imaginons maintenant qu'on écrive les termes de la série double absolument convergente $\Sigma\Sigma a_{ik}$ dans l'ordre que nous venons de définir; nous obtenons une série ordinaire

$$(33) \qquad a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{20} + a_{11} + a_{02} + \ldots + a_{n0} + a_{n-1,1} + \ldots,$$

dont les termes sont les mêmes que ceux de la série double considérée, qui est absolument convergente comme elle et a la même somme. Il est clair que ce mode de transformation n'est pas unique, puisqu'on peut permuter l'ordre des termes d'une façon arbitraire. Inversement, toute série ordinaire absolument convergente peut être, d'une infinité de manières, transformée en une série double, et ce procédé constitue un moyen puissant de démonstration pour certaines identités (1).

On voit que la notion de série à double entrée n'est pas distincte au fond de la notion ordinaire de série. Dans une série absolument convergente, on a vu plus haut qu'on pouvait remplacer un nombre fini de termes par leur somme effectuée, ou ranger les termes dans un ordre arbitraire. En cherchant à généraliser encore cette propriété, on est conduit tout naturellement à introduire les séries à double entrée.

171. Séries multiples. — La notion de série à double entrée est encore susceptible d'une grande extension. Tout d'abord, on peut considérer des séries dont chaque terme a_{mn} dépend de deux indices dont chacun peut varier de $-\infty$ à $+\infty$. On peut imaginer les termes de cette série disposés suivant les cases d'un échiquier rectangulaire indéfini dans tous les sens, et l'on voit que

---

(1) TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 67.

la série à double entrée $\Sigma\Sigma a_{mn}$ peut se partager en quatre séries doubles, telles que celles que nous avons étudiées jusqu'ici. Une extension plus importante est la suivante. Considérons une série dont chaque terme $a_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ dépend de p indices $m_1, m_2, \ldots, m_p$, pouvant varier de o à $+\infty$, ou de $-\infty$ à $+\infty$, ces indices pouvant d'ailleurs être assujettis à vérifier certaines inégalités. Quoiqu'on ne puisse plus se servir d'une représentation géométrique analogue à la précédente dès qu'il y a plus de trois indices, un peu de réflexion suffit pour montrer que les propositions établies pour les séries doubles s'étendent sans difficulté aux séries multiples d'ordre p.

Supposons d'abord que tous les termes $a_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ soient réels et positifs. Imaginons que l'on prenne la somme d'un certain nombre de termes de cette série, que l'on ajoute ensuite à cette somme la somme d'un certain nombre de termes négligés, et ainsi de suite, de telle sorte qu'un terme quelconque de la série figure dans toutes les sommes successives au bout d'un certain nombre d'opérations. Soient $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ les sommes successives ainsi obtenues; si S_n tend vers une limite S lorsque n augmente indéfiniment, la série est convergente et a pour somme S; comme dans le cas de deux indices, cette limite S est indépendante de la façon dont on fait croître le nombre des termes ajoutés. Si les termes ont des signes quelconques ou sont imaginaires, la série est encore convergente pourvu que la série formée par les modules soit convergente.

172. Généralisation du théorème de Cauchy. — On peut souvent décider de la convergence ou de la divergence d'une série multiple, au moyen du théorème suivant, qui est la généralisation du théorème de Cauchy (nº 161). Soit $f(x, y)$ une fonction des deux variables x et y, qui est positive pour tous les points (x, y) extérieurs à une certaine courbe fermée Γ, et telle que $f(x, y)$ diminue lorsque le point (x, y) s'éloigne de l'origine. Considérons, d'une part, l'intégrale double $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$, étendue à la couronne comprise entre la courbe Γ et une autre courbe extérieure C qui grandit indéfiniment; d'autre part, la série à double entrée $\Sigma f(m, n)$, où l'on attribue aux indices m, n toutes les valeurs

entières, positives et négatives, telles que le point (m, n) soit extérieur à Γ. Dans ces conditions, *la série double est convergente lorsque l'intégrale double a une limite, et inversement.*

Les parallèles aux axes de coordonnées $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ et $y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ décomposent l'aire comprise entre les deux courbes C et Γ en un certain nombre de carrés et de portions irrégulières. Si nous prenons dans chacun des carrés le sommet le plus éloigné de l'origine, il est clair que la somme $\Sigma f(m, n)$ correspondante sera inférieure à l'intégrale double $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$, étendue à l'aire comprise entre C et Γ. Si cette intégrale double tend vers une limite S, lorsque la courbe C s'éloigne indéfiniment, il suit de là que la somme d'un nombre quelconque de termes de la série double est toujours moindre qu'un nombre fixe; cette série est donc convergente. On voit de la même façon que, si la série double est convergente, l'intégrale double est toujours moindre qu'un nombre fixe; cette intégrale tend donc vers une limite. Le théorème s'étend à une série multiple à p indices, sous des hypothèses convenables; le terme de comparaison est alors une intégrale multiple d'ordre p.

Par exemple, la série double dont le terme général est $\frac{1}{(m^2+n^2)^\mu}$, les indices m et n prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, sauf $m = n = 0$, est convergente si $\mu > 1$, et divergente si $\mu \leq 1$. Car l'intégrale double

$$\int\int \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\mu}, \tag{34}$$

étendue à la portion du plan extérieure à un cercle concentrique à l'origine, a une valeur finie si $\mu > 1$ et augmente indéfiniment si $\mu \leq 1$ (n° 133).

Plus généralement, la série multiple dont le terme général est

$$\frac{1}{(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_p^2)^\mu},$$

la combinaison $m_1 = m_2 = \ldots = m_p = 0$ étant exclue, est convergente si l'on a $2\mu > p$ [1].

---

[1] On trouvera des propositions plus générales dans le *Traité d'Analyse* de M. Jordan, tome I; p. 163.



III. — SÉRIES A TERMES VARIABLES. — SÉRIES UNIFORMÉMENT CONVERGENTES.

173. Définition de la convergence uniforme. — Une série

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{35}$$

dont les termes sont des fonctions continues d'une variable x dans un intervalle (a, b), et qui est convergente pour toute valeur de x comprise dans cet intervalle, ne représente pas nécessairement une fonction continue de cette variable, comme on serait tenté de le croire. Il suffit, pour s'en convaincre, de reprendre la série (*voir* n° 4).

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots$$

dont la somme est discontinue pour $x = 0$. Comme un grand nombre de fonctions se présentent en Analyse sous forme de séries, on a dû étudier les propriétés des fonctions représentées de cette façon et la première question qui se présente est précisément de chercher à reconnaître si la somme d'une série est une fonction continue d'une variable. Quoiqu'on ne possède pas de solution générale de ce problème, son étude a conduit à une notion extrêmement importante, celle de la *convergence uniforme*.

On dit qu'une série, telle que (35), est *uniformément convergente* dans un intervalle (a, b) si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre entier positif n tel que la valeur absolue du reste R_n de cette série

$$R_n = u_n(x) + \ldots + u_{n+p}(x) + \ldots$$

soit moindre que ε pour *toutes* les valeurs de x comprises dans l'intervalle (a, b). La condition que le nombre n, qui correspond à une valeur donnée de ε, soit le même pour toutes les valeurs de x de l'intervalle (a, b), est essentielle dans cette définition. Pour chaque valeur de x appartenant à cet intervalle, il est certain qu'il existe un nombre entier n satisfaisant à la condition que R_n soit moindre que ε, mais rien ne prouve *a priori* que, pour une valeur donnée de n, aussi grande qu'on la suppose, le reste R_n

reste constamment plus petit que ε en valeur absolue, lorsque x varie de a à b. Ainsi, pour la série considérée tout à l'heure, on a

$$R_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, \text{ pour } x \gtrless 0;$$

la série n'est pas uniformément convergente dans l'intervalle (0, 1), car il est impossible de trouver un nombre entier n tel que l'on ait $R_n(x) < \varepsilon$, pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1.

L'importance des séries uniformément convergentes provient de la propriété suivante :

La somme d'une série uniformément convergente dans un intervalle (a, b), dont les termes sont des fonctions continues d'une variable x dans cet intervalle, est elle-même une fonction continue de cette variable.

Soit x_0 une valeur de x comprise entre a et b, et $x_0 + h$ une valeur voisine, comprise aussi entre a et b. Choisissons un nombre n assez grand pour que le reste $R_n(x)$

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

soit moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$ en valeur absolue pour toutes les valeurs de x de l'intervalle (a, b), ε désignant un nombre positif donné à l'avance, aussi petit qu'on le voudra. Soit $f(x)$ la somme de la série convergente considérée; on peut écrire

$$f(x) = \varphi(x) + R_n(x),$$

en désignant par $\varphi(x)$ la somme des $n+1$ premiers termes

$$\varphi(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x).$$

Des égalités

$$f(x_0) = \varphi(x_0) + R_n(x_0),$$
$$f(x_0 + h) = \varphi(x_0 + h) + R_n(x_0 + h),$$

on tire, en les retranchant membre à membre,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = [\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)] + R_n(x_0 + h) - R_n(x_0);$$

le nombre n ayant été choisi de cette façon, on a déjà

$$|R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |R_n(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, puisque les différents termes de la série sont des fonctions continues de x, $\varphi(x)$ est aussi une fonction continue et l'on peut trouver un nombre positif η tel que l'on ait

$$|\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

pourvu que $|h|$ soit $<\eta$. On aura donc, *a fortiori*,

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<3\,\frac{\varepsilon}{3}$$

pour toutes les valeurs de h moindres que η en valeur absolue, ce qui montre bien que la fonction $f(x)$ est continue pour $x=x_0$.

Remarque. — Il paraît au premier abord très difficile de reconnaître si une série est uniformément convergente dans un intervalle. La proposition suivante permet, dans bien des cas, d'affirmer qu'il en est ainsi. Soit

$$(36)\qquad u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

une série dont les termes sont des fonctions continues de x dans un intervalle (a, b); soit, d'autre part,

$$(37)\qquad v_0+v_1+\ldots+v_n+\ldots$$

une autre série convergente dont les termes sont des nombres positifs constants. Si, pour toutes les valeurs de x de l'intervalle (a, b) on a, quel que soit n, $|u_n|<v_n$, la première série (36) est uniformément convergente dans cet intervalle. Il est clair, en effet, qu'on a, pour toute valeur de x comprise entre a et b,

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots|<v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots,$$

et il suffira de prendre n assez grand pour que le reste correspondant de la seconde série soit moindre que ε, pour que l'on ait, quel que soit x dans l'intervalle (a, b),

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots|<\varepsilon.$$

Par exemple, v_0, v_1, v_2, ... ayant toujours la même signification, la série

$$v_0+v_1\sin x+v_2\sin 2x+\ldots+v_n\sin nx+\ldots$$

est uniformément convergente dans tout intervalle.

174. Intégration et différentiation des séries. — *Une série uniformément convergente peut être intégrée terme à terme.*

Soient x_0, x_1 deux valeurs de x comprises entre a et b, et n un nombre entier tel que $|R_n(x)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x de cet intervalle. On peut écrire

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + R_n(x),$$

et par suite

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} u_0(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} R_n(x)\,dx;$$

la valeur absolue de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} R_n(x)\,dx$ est moindre que $\varepsilon|x_1 - x_0|$ et, par conséquent, peut être rendue plus petite que tout nombre donné, pourvu que l'on prenne n assez grand. Il s'ensuit que l'on a

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} u_0(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} u_1(x)dx + \ldots + \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)dx + \ldots;$$

si laissant x_0 fixe, on considère x_1 comme variable, on a une série

$$\int_{x_0}^{x} u_0(x)\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_n(x)\,dx + \ldots$$

qui est convergente dans l'intervalle (a, b) et dont la somme admet pour dérivée $f(x)$.

De même, une série peut être différentiée terme à terme *pourvu que la série des dérivées soit uniformément convergente.*

Soit

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

une série convergente dans l'intervalle (a, b); supposons que la série formée par les dérivées est uniformément convergente dans le même intervalle, et désignons par $\varphi(x)$ la somme de cette nouvelle série

$$\varphi(x) = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots.$$

En intégrant terme à terme entre deux limites x_0 et x, comprises entre a et b, il vient

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = [u_0(x) - u_0(x_0)] + [u_1(x) - u_1(x_0)] + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = f(x) - f(x_0),$$

relation qui montre que $\varphi(x)$ est la dérivée de $f(x)$.

Exemples. — 1° L'intégrale $\int \frac{e^x}{x}\,dx$ ne peut s'exprimer par une combinaison en nombre fini de fonctions élémentaires; écrivons-la comme il suit

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{e^x - 1}{x}\,dx = \log x + \int \frac{e^x - 1}{x}\,dx.$$

On peut trouver pour la dernière intégrale un développement en série valable pour toute valeur de x; on a, en effet,

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots n} + \ldots$$

et cette série est uniformément convergente, dans l'intervalle de $-R$ à $+R$, aussi grand que soit R, car les valeurs absolues de ses termes sont moindres que les termes de la série

$$1 + \frac{R}{1.2} + \ldots + \frac{R^{n-1}}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

On en conclut que la série, obtenue par l'intégration

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

qui est convergente quel que soit x, représente une fonction dont la dérivée est $\frac{e^x - 1}{x}$.

2° Le périmètre d'une ellipse, dont le grand axe est $2a$ et l'excentricité e, est égal à l'intégrale définie (n° 112)

$$S = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Le produit $e^2\sin^2\varphi$ est compris entre o et $e^2 < 1$, de sorte que le radical est égal à la somme de la série, obtenue par la formule du binome

$$\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2.4}e^4\sin^4\varphi - \ldots$$
$$- \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}e^{2n}\sin^{2n}\varphi - \ldots$$

et la série du second membre est uniformément convergente, car ses termes sont moindres en valeur absolue que ceux de la série obtenue en faisant $\sin\varphi = 1$. On peut donc intégrer terme à terme et en observant que l'on a (nº 116)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\pi}{2},$$

il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \ldots\right.$$
$$\left. - \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 (2n-1)e^{2n} - \ldots\right\}.$$

Si l'excentricité e est très petite, il suffit de prendre un petit nombre de termes dans le second membre pour avoir la valeur de l'intégrale avec une grande approximation.

On peut, de la même façon, développer en série l'intégrale

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

quelle que soit la limite supérieure φ. Nous citerons encore la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{9}{64}e^4 + \ldots\right.$$
$$\left. + \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 e^{2n} + \ldots\right\}$$

qui donne le développement de l'intégrale complète de première espèce de Legendre.

La définition de la convergence uniforme s'étend aux séries dont les termes sont fonctions de plusieurs variables indépendantes, et aux séries multiples. Par exemple, soit

$$u_0(x,y) + u_1(x,y) + \ldots + u_n(x,y) + \ldots$$

une série dont les termes sont des fonctions continues des deux variables x, y, et qui est convergente lorsque le point (x, y) reste à l'intérieur d'un contour C. On dira que la série est uniformément convergente dans ce domaine, si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre n tel que la valeur absolue du reste R_n soit moindre que ε pour tout point (x, y) intérieur au contour C, et l'on démontrera comme plus haut que la somme de cette série est une fonction continue des variables x et y dans ce domaine. Le théorème sur l'intégration se généralise aussi; si $f(x, y)$ est la somme de la série précédente, on a

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \iint u_0(x, y)\,dx\,dy + \iint u_1(x, y)\,dx\,dy + \ldots \\ + \iint u_n(x, y)\,dx\,dy + \ldots,$$

toutes les intégrales doubles étant étendues à l'aire intérieure au contour C.

De même une série double dont les termes sont fonctions d'une ou plusieurs variables, et qui est absolument convergente lorsque ces variables restent comprises dans un certain domaine, est dite *uniformément convergente* si l'on peut prendre un nombre de termes assez grand pour que la valeur absolue de la somme des termes négligés soit moindre qu'un nombre positif ε, pour tous les systèmes de valeurs des variables considérées. Les propriétés établies plus haut s'étendent sans difficulté, quel que soit le nombre des variables indépendantes, et aussi quel que soit le nombre des dimensions de la série.

Remarque. — Lorsqu'une série n'est pas uniformément convergente, on ne peut pas toujours l'intégrer terme à terme; en voici un exemple. Posons

$$S_n(x) = nxe^{-nx^2}, \qquad S_0(x) = 0, \qquad u_n(x) = S_n - S_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

la série dont le terme général est $u_n(x)$ est convergente et a pour somme zéro, car $S_n(x)$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. On peut donc écrire

$$f(x) = 0 = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

et par suite $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. D'autre part, si l'on intègre la série terme

à terme entre les limites zéro et un, on obtient une nouvelle série dont la somme des n premiers termes a pour valeur

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = -\left[\frac{e^{-nx^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n}),$$

et cette somme a pour limite $\frac{1}{2}$ lorsque n croît indéfiniment. Cet exemple est dû à M. Osgood.

175. Application à la différentiation sous le signe $\int$. — La démonstration, donnée plus haut, de la formule de différentiation sous le signe $\int$ suppose essentiellement que les limites x_0 et X sont finies (n° 97). Si X est infini, on n'a pas toujours le droit d'appliquer la formule. Prenons, par exemple, l'intégrale

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx;$$

cette intégrale ne dépend pas de α, car, si on fait le changement de variable $\alpha x = y$, elle devient, en supposant $\alpha > 0$,

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

En appliquant à l'intégrale $F(\alpha)$ la formule ordinaire de différentiation, on arrive à l'égalité

$$F'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \cos\alpha x\,dx,$$

dont le premier membre est nul, tandis que le second membre n'a pas de valeur déterminée.

On peut trouver des conditions suffisantes pour qu'on ait le droit de différentier par la formule habituelle, même lorsqu'une des limites est infinie, en rattachant la question à l'étude des séries. Considérons d'abord une intégrale

$$\int_{a_0}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

que nous supposons avoir une valeur déterminée. Soient a_1, a_2, ..., a_n, ... une suite indéfinie de nombres plus grands

que a_0, allant constamment en croissant, de telle sorte que a_n augmente indéfiniment avec n. Posons

$$U_0 = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx, \qquad U_1 = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx, \qquad \ldots,$$

$$U_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx, \qquad \ldots;$$

la série

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$$

est convergente et a pour somme $\int_{a_0}^{+\infty} f(x)\,dx$, car la somme S_n des n premiers termes est égale à $\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx$.

Il est à remarquer que la réciproque n'est pas toujours vraie. Prenons, par exemple,

$$f(x) = \cos x, \qquad a_0 = 0, \qquad a_1 = \pi, \qquad \ldots, \qquad a_n = n\pi, \qquad \ldots,$$

nous avons

$$U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos x\,dx = 0;$$

la série est donc convergente, tandis que l'intégrale ne tend vers aucune limite.

Soit maintenant $f(x, \alpha)$ une fonction continue des deux variables x et α, lorsque x est supérieur à a_0 et α compris dans un intervalle (α_0, α_1). Si l'intégrale $\int_{a_0}^{l} f(x, \alpha)\,dx$ tend vers une limite lorsque l augmente indéfiniment, quelle que soit la valeur de α, cette limite est une fonction de α,

$$F(\alpha) = \int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx,$$

que l'on peut remplacer, comme on vient de l'expliquer, par la somme d'une série convergente dont les termes sont des fonctions continues de α,

$$F(\alpha) = U_0(\alpha) + U_1(\alpha) + \ldots + U_n(\alpha) + \ldots,$$

$$U_0(\alpha) = \int_{a_0}^{a_1} f(x, \alpha)\,dx, \qquad U_1(\alpha) = \int_{a_1}^{a_2} f(x, \alpha)\,dx, \qquad \ldots.$$

Cette fonction $F(\alpha)$ est continue, pourvu que la série soit uniformément convergente. Par extension, nous dirons que *l'intégrale* $\int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$ *est uniformément convergente* dans l'intervalle (α_0, α_1) si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre N tel que l'on ait, pour toute valeur de $l > N$, $\left|\int_l^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon$, quel que soit α dans l'intervalle (α_0, α_1). Si l'intégrale est uniformément convergente, il en est de même de la série, car si l'on prend $a_n > N$, on aura

$$|R_n| = \left|\int_{a_n}^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon;$$

la fonction $F(\alpha)$ est donc continue dans l'intervalle (α_0, α_1).

Cela posé, supposons que l'intégrale $\int_{a_0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx$ ait une valeur finie pour toute valeur de α comprise dans l'intervalle (α_0, α_1), et qu'elle soit uniformément convergente dans cet intervalle; on peut aussi la représenter par la somme d'une série

$$\int_{a_0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx = V_0(\alpha) + V_1(\alpha) + \ldots + V_n(\alpha) + \ldots,$$

où

$$V_0 = \int_{a_0}^{a_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx, \qquad \ldots \qquad V_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx, \qquad \ldots$$

La nouvelle série est uniformément convergente et ses termes sont égaux respectivement aux dérivées des termes de la première. On a donc, d'après le théorème qui a été démontré sur la différentiation des séries,

$$F'(\alpha) = \int_{a_0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx,$$

c'est-à-dire que la formule de différentiation sous le signe $\int$ s'applique encore, pourvu que l'intégrale qui figure au second membre soit uniformément convergente.

176. Exemples. — 1° Reprenons l'intégrale du n° 91,

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

où α est positif. L'intégrale obtenue en différentiant

$$-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx$$

est uniformément convergente pour toutes les valeurs de α supérieures à un nombre positif k. On a en effet

$$\left|\int_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right| < \int_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha l},$$

et il suffit de prendre l assez grand de façon que l'on ait $ke^{kl} > \frac{1}{\varepsilon}$ pour que la valeur absolue de cette intégrale soit inférieure à ε, lorsque α est supérieur à k. On a donc

$$F'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx;$$

l'intégrale indéfinie a déjà été calculée (n° 119) et l'on trouve

$$F'(\alpha) = \left[\frac{e^{-\alpha x}(\cos x + \alpha\sin x)}{1+\alpha^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{1+\alpha^2};$$

on tire de là

$$F(\alpha) = C - \operatorname{arc\,tang}\alpha,$$

et l'on détermine la constante C en remarquant que l'intégrale définie $F(\alpha)$ tend vers zéro lorsque α croît indéfiniment, ce qui donne $C = \frac{\pi}{2}$. On a donc en définitive

$$(38) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\alpha}.$$

Cette formule n'est établie que pour les valeurs positives de α, mais on a vu plus haut que le premier membre est la somme d'une série alternée dont le reste R_n est toujours inférieur à $\frac{1}{n}$. Cette série est donc uniformément convergente, et l'intégrale est une fonction continue de α, même pour $\alpha = 0$. En faisant tendre α vers zéro, on a donc à la limite

$$(39) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

2° Si, dans la formule du n° 134,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

on pose $x = y\sqrt{\alpha}$, α étant positif, il vient

$$(40)\qquad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\alpha^{-\frac{1}{2}},$$

et il est facile de vérifier que toutes les intégrales que l'on déduit de celle-là par des différentiations successives par rapport au paramètre α sont uniformément convergentes, pourvu que α reste supérieur à un nombre fixe $k > 0$. De la formule précédente on déduit donc les valeurs de toute une série d'intégrales

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2}\,\alpha^{-\frac{3}{2}},\\
&\int_0^{+\infty} y^4 e^{-\alpha y^2}\,dy = \frac{1.3}{2^3}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{5}{2}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\int_0^{+\infty} y^{2n} e^{-\alpha y^2}\,dy = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{2n+1}{2}}
\end{aligned}\right.$$

et, en les combinant, on pourra en déduire une infinité d'autres. On a, par exemple,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\,dy\left[1 - \frac{(2\beta y)^2}{1.2} + \ldots + (-1)^n\frac{(2\beta y)^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots\right]\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\,dy - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\frac{(2\beta y)^2}{1.2}\,dy + \ldots\\
&\qquad + (-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\frac{(2\beta y)^{2n}}{1.2\ldots 2n}\,dy + \ldots.
\end{aligned}$$

Toutes ces intégrales viennent d'être calculées, et il reste

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - \frac{(2\beta)^2}{1.2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\alpha^{-\frac{3}{2}}}{2} + \ldots\\
&\qquad + (-1)^n\frac{(2\beta)^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\,\alpha^{-\frac{2n+1}{2}} + \ldots
\end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$(42)\qquad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}}.$$

EXERCICES.

1. Démontrer la formule

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}[x^n(\log x)^n] = 1 + S_1\log x + \frac{S_2}{1.2}(\log x)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{S_n}{1.2\ldots n}(\log x)^n,$$

S_p désignant la somme des produits p à p des n premiers nombres.

[MURPHY.]

[On part de la formule

$$x^{n+\alpha} = x^n\left[1 + \alpha\log x + \frac{\alpha^2(\log x)^2}{1.2} + \ldots + \frac{\alpha^n(\log x)^n}{1.2\ldots n} + \ldots\right]$$

que l'on différentie n fois de suite par rapport à x.]

2. Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

en utilisant la différentiation sous le signe $\int$.

3. Démontrer la formule

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$$

$\left[\text{On démontre que l'on a } \frac{dI}{da} = -2I.\right]$

4. Déduire de la formule précédente l'intégrale définie

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha-\frac{k^2}{\alpha}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\pi}\,e^{-2k}.$$

5. De la relation $\frac{1}{a^3} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax}\,dx$ déduire la formule

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{e^x-1}.$$

CHAPITRE IX.

SÉRIES ENTIÈRES. — SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

Nous étudions, dans ce Chapitre, deux classes de séries particulièrement importantes, les séries entières et les séries trigonométriques. Quoiqu'on ne s'occupe que de variables réelles, les raisonnements employés dans l'étude des séries entières s'étendent d'eux-mêmes au cas des variables imaginaires, en remplaçant partout les mots *valeur absolue* par *module*.

I. — SÉRIES ENTIÈRES A UNE VARIABLE.

177. Région de convergence. — Considérons d'abord une série

(1) $$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \ldots + A_n X^n + \ldots$$

où tous les coefficients A_0, A_1, A_2, ..., sont positifs, et où l'on n'attribue à la variable indépendante X que des valeurs positives. Il est clair que tous les termes de cette série vont en croissant avec X; si la série est convergente pour une valeur particulière $X = X_1$, elle est *a fortiori* convergente pour toute valeur de X inférieure à X_1. De même, si la série est divergente pour la valeur X_2, elle est certainement divergente pour toute valeur de X supérieure à X_2. Cela posé, plusieurs cas peuvent se présenter :

1° Il peut se faire que la série (1) soit convergente, quelle que soit la valeur de la variable X; telle est la série

$$1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{1.2} + \ldots + \frac{X^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

2° Il peut aussi arriver que la série (1) soit toujours divergente, quel que soit X, sauf pour $X = 0$; telle est la série

$$1 + X + 1.2X^2 + \ldots + 1.2.3\ldots nX^n + \ldots.$$

3° Supposons enfin que la série proposée soit tantôt convergente, tantôt divergente. Soient X_1 une valeur de X rendant la série convergente, et X_2 une valeur de X rendant la série divergente. D'après la remarque de tout à l'heure, on a $X_1 < X_2$, la série est convergente si $X < X_1$, et divergente si $X > X_2$. Il n'y a doute que pour les valeurs de X comprises entre X_1 et X_2. Mais toutes les valeurs de X qui rendent la série convergente sont inférieures à X_2; soit R leur limite supérieure. Comme toutes les valeurs de X qui rendent la série divergente sont supérieures à l'une quelconque des valeurs de X qui rendent la série convergente, ce nombre R est aussi la limite inférieure des valeurs de X qui rendent la série divergente. *La série* (1) *est donc convergente pour toutes les valeurs positives de* X *inférieures à* R, *et divergente pour toutes les valeurs de* X *supérieures à* R. Pour $X = R$, la série peut être convergente ou divergente.

Ainsi, la série

$$1 + X + X^2 + \ldots + X^n + \ldots$$

est convergente si $X < 1$, et divergente si $X \geqq 1$; on a $R = 1$.

Remarquons que le dernier cas examiné renferme les deux autres comme cas limites; on les obtient en supposant R infini, ou $R = 0$.

Considérons maintenant une série entière

$$(2) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

où les coefficients a_i et la variable x peuvent avoir des signes quelconques. Nous poserons dorénavant $A_i = |a_i|$, $X = |x|$, de façon que la série (1) sera formée par les valeurs absolues des termes de la série (2). Soit R le nombre qui vient d'être défini pour cette série (1); il est évident que la série (2) est absolument convergente pour toute valeur de x comprise entre $-R$ et $+R$, d'après la définition même du nombre R. Il nous reste à montrer que la série (2) est divergente lorsque la valeur absolue de x est supérieure à R. C'est ce qui résulte de la proposition fondamentale d'Abel [1] : *Si la série* (2) *est convergente pour une valeur particulière* x_0, *elle est absolument convergente pour toute valeur de* x, *dont la valeur absolue est inférieure à* $|x_0|$.

---

(1) *Recherche sur la série* $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots$

En effet, la série (2) étant supposée convergente pour $x = x_0$, désignons par M un nombre positif supérieur au module de l'un quelconque des termes de cette série, de telle sorte que l'on ait, quel que soit le nombre n,

$$A_n |x_0|^n < M.$$

Nous pouvons écrire

$$A_n X^n = A_n |x_0|^n \left(\frac{X}{|x_0|} \right)^n < M \left(\frac{X}{|x_0|} \right)^n;$$

la série (1) est donc convergente si l'on suppose $X < |x_0|$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Cela posé, si la série (2) est convergente pour $x = x_0$, on voit que la série des modules (1) sera convergente pourvu que X soit inférieur à $|x_0|$. On ne peut donc avoir $|x_0| > R$, car alors le nombre R ne serait pas la limite supérieure des valeurs de X qui rendent convergente la série (1).

En résumé, étant donnée une série entière (2) où les coefficients ont des signes quelconques, il existe un nombre positif R possédant la propriété suivante : *la série* (2) *est absolument convergente pour toute valeur de x comprise entre* — R *et* + R, *et divergente pour toute valeur de x supérieure à* R *en valeur absolue.* L'intervalle (— R, + R) s'appellera la *région de convergence;* cette région s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ dans le cas limite où R est infini. Elle se réduit à l'origine si $R = 0$; nous laisserons de côté, dans la suite, ce cas particulier.

La démonstration ne nous apprend rien sur ce qui arrive pour les valeurs limites $x = R$, $x = -R$. La série (2) peut être absolument convergente, simplement convergente, ou divergente.

Considérons, par exemple, les trois séries

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots;$$

on a, pour ces trois séries, $R = 1$, car le rapport d'un terme au précédent a pour limite x. La première série est divergente pour $x = \pm 1$, la deuxième est divergente pour $x = 1$ et convergente

pour $x = -1$; la troisième est absolument convergente pour $x = \pm 1$.

Remarque. — L'énoncé de la proposition d'Abel peut être généralisé; il suffit, en effet, pour la suite du raisonnement, de supposer que la valeur absolue d'un terme quelconque de la série

$$a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

reste inférieure à un nombre fixe. Lorsqu'il en est ainsi, la série (2) est absolument convergente pour toute valeur de la variable dont la valeur absolue est inférieure à $|x_0|$.

Le nombre R est lié par une relation très simple au nombre ω défini plus haut (n° 160), qui est la plus grande des limites des termes de la suite

$$A_1, \quad \sqrt[2]{A_2}, \quad \sqrt[3]{A_3}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{A_n}, \quad \ldots.$$

En effet, si l'on considère la suite analogue

$$A_1 X, \quad \sqrt[2]{A_2 X^2}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{A_n X^n}, \quad \ldots,$$

il est clair que la plus grande des limites des termes de cette suite sera ωX. La suite (1) est donc convergente, si l'on a $X < \frac{1}{\omega}$, et divergente si $X > \frac{1}{\omega}$; par conséquent $R = \frac{1}{\omega}$ (¹).

178. Continuité d'une série entière. — Désignons par $f(x)$ la somme d'une série entière convergente dans l'intervalle de $-R$ à $+R$,

$$(3) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

et soit R' un nombre positif inférieur à R. Nous allons d'abord montrer que la série (3) est uniformément convergente dans l'intervalle de $-R'$ à $+R'$. En effet, pour une valeur de x, moindre que R' en valeur absolue, le reste R_n

$$R_n = a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{n+p} x^{n+p} + \ldots$$

est inférieur en valeur absolue au reste correspondant de la

(¹) Ce théorème a été démontré par Cauchy dans son *Cours d'Analyse;* il a été retrouvé par M. Hadamard dans sa Thèse.

série (1)

$$A_{n+1} R'^{n+1} + A_{n+2} R'^{n+2} + \ldots;$$

or la série (1) étant convergente pour $X = R'$, puisque $R' < R$, on peut prendre le nombre n assez grand pour que le reste précédent soit plus petit qu'un nombre positif donné ε. On aura donc $|R_n| < \varepsilon$, pourvu que l'on ait $|x| < R'$.

Il suit de là que *la somme $f(x)$ de la série est une fonction continue de x, pour toute valeur de la variable comprise entre* $-R$ *et* $+R$. En effet, étant donné un nombre x_0, plus petit que R en valeur absolue, il est évident qu'on peut trouver un autre nombre positif R', inférieur à R, et supérieur à $|x_0|$. D'après ce qu'on vient de voir, la série est uniformément convergente dans l'intervalle de $-R'$ à $+R'$; la somme $f(x)$ est donc continue pour la valeur x_0 qui appartient à cet intervalle.

La démonstration ne s'applique plus aux limites $+R$ et $-R$ de la région de convergence. La continuité subsiste cependant, pourvu que la série soit convergente. Abel a démontré en effet que *si la série* (3) *est convergente pour* $x = R$, *la somme de cette série est la limite vers laquelle tend la somme de la série* $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* R *en étant inférieur à* R.

Désignons par S la somme de la série convergente

$$S = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \ldots + a_n R^n + \ldots$$

et soit n un nombre entier tel que la valeur absolue de l'une quelconque des sommes

$$a_{n+1} R^{n+1}, \quad a_{n+1} R^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2}, \quad \ldots,$$
$$a_{n+1} R^{n+1} + \ldots + a_{n+p} R^{n+p}, \quad \ldots$$

soit inférieure à un nombre positif donné ε. En posant $x = R\theta$, et faisant croître θ de 0 à 1, x croîtra de 0 à R, et l'on aura

$$f(x) = f(\theta R) = a_0 + a_1 \theta R + a_2 \theta^2 R^2 + \ldots + a_n \theta^n R^n + \ldots;$$

nous pouvons écrire, le nombre n ayant été choisi comme il vient d'être dit,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} S - f(x) = {} & a_1 R(1-\theta) + a_2 R^2(1-\theta^2) + \ldots + a_n R^n (1-\theta^n) \\ & + a_{n+1} R^{n+1} + \ldots + a_{n+p} R^{n+p} + \ldots \\ & - a_{n+1} \theta^{n+1} R^{n+1} - \ldots - a_{n+p} \theta^{n+p} R^{n+p} - \ldots \end{aligned} \right.$$

D'après la façon dont on a pris le nombre n, la somme de la série qui est sur la deuxième ligne est plus petite que ε en valeur absolue. D'un autre côté, les nombres θ^{n+1}, θ^{n+2}, ..., θ^{n+p} forment une suite décroissante; on a donc, d'après le lemme d'Abel déjà employé (n° 75),

$$|a_{n+1}\theta^{n+1}R^{n+1}+\ldots+a_{n+p}\theta^{n+p}R^{n+p}|<\theta^{n+1}\varepsilon<\varepsilon$$

et, par conséquent, la somme de la série qui est sur la troisième ligne est aussi inférieure à ε en valeur absolue. Considérons maintenant la première ligne de la formule (4); c'est un polynome de degré n en θ qui est nul pour $\theta = 1$. On peut donc trouver un autre nombre positif η_1, tel que la valeur absolue de ce polynome soit moindre que ε pourvu que θ soit compris entre $1-\eta_1$ et l'unité. Pour toutes ces valeurs de θ, on a, par conséquent,

$$|S-f(x)|<3\varepsilon;$$

or ε est un nombre positif arbitraire : $f(x)$ a donc pour limite S lorsque x tend vers R.

On voit de la même façon que, si la série (3) est convergente pour $x=-R$, la somme de cette série pour $x=-R$ est la limite vers laquelle tend la somme $f(x)$ lorsque x tend vers $-R$. Il suffit du reste de changer x en $-x$ pour être ramené au premier cas.

Application. — Cette proposition permet de compléter le théorène établi plus haut (n° 168) sur la multiplication de deux séries.

Soient

$$S = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{5}$$

$$S' = v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{6}$$

deux séries convergentes, dont aucune n'est absolument convergente, la série obtenue par la règle de multiplication

$$u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+\ldots+(u_0v_n+\ldots+u_nv_0)+\ldots \tag{7}$$

peut être convergente ou divergente; mais, si elle est convergerte, sa somme Σ est égale au produit des sommes des deux premières séries, $\Sigma = SS'$. Considérons, en effet, les trois séries entières

$$f(x) = u_0+u_1x+\ldots+u_nx^n+\ldots,$$
$$\varphi(x) = v_0+v_1x+\ldots+v_nx^n+\ldots,$$
$$\psi(x) = u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)x+\ldots+(u_0v_n+\ldots+u_nv_0)x^n+\ldots;$$

ces séries sont convergentes, par hypothèse, pour $x = 1$, et, par suite, sont absolument convergentes lorsque x est compris entre -1 et $+1$. Pour ces valeurs de x, le théorème de Cauchy sur la multiplication des séries est applicable et nous donne la relation

$$(8) \qquad f(x)\varphi(x) = \psi(x);$$

or, lorsque x tend vers l'unité, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ont respectivement pour limites, d'après le théorème d'Abel, S, S' et Σ. Les deux membres de la formule (8) restant constamment égaux, on a donc, à la limite, $\Sigma = SS'$.

Le théorème est encore vrai pour les séries à termes imaginaires et s'établit de la même façon.

179. Dérivées successives d'une série entière. — En différentiant terme à terme une série entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

convergente dans l'intervalle $(-R, +R)$, on obtient une nouvelle série entière

$$(9) \qquad a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

qui est convergente dans le même intervalle. Il suffit, pour le prouver, de montrer que la série des valeurs absolues

$$A_1 + 2A_2 X + \ldots + nA_n X^{n-1} + \ldots$$

est convergente si $X < R$, et divergente si $X > R$.

Pour démontrer la première partie, supposons $X < R$, et soit R' un nombre compris entre X et R, $X < R' < R$. La série auxiliaire

$$\frac{1}{R'} + \frac{2}{R'}\frac{X}{R'} + \frac{3}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^2 + \ldots + \frac{n}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^{n-1} + \ldots$$

est convergente, car le rapport d'un terme au précédent a pour limite un nombre $\frac{X}{R'}$, inférieur à l'unité. En multipliant les différents termes de cette série par les facteurs

$$A_1 R', \quad A_2 R'^2, \quad \ldots, \quad A_n R'^n, \quad \ldots,$$

qui sont tous plus petits qu'un nombre fixe, puisque $R' < R$, il est évident que la nouvelle série obtenue

$$A_1 + 2A_2 X + \ldots + nA_n X^{n-1} + \ldots$$

est encore convergente.

La seconde partie se démontre de même. Si la série

$$A_1 + 2A_2X_1 + \ldots + nA_nX_1^{n-1} + \ldots,$$

où X_1 est supérieur à R, était convergente, il en serait de même de la série

$$A_1X_1 + 2A_2X_1^2 + \ldots + nA_nX_1^n + \ldots$$

et par suite de la série $\sum_1^{+\infty} A_nX_1^n$ qui a ses termes plus petits que ceux de la précédente. Le nombre R ne serait donc pas la limite supérieure des valeurs de X qui rendent la série (1) convergente.

La somme $f_1(x)$ de la série entière (9) est une fonction continue de la variable dans le même intervalle. Cette série étant uniformément convergente dans tout intervalle $(-R', +R')$, où $R' < R$, représente la dérivée de $f(x)$ dans cet intervalle (n° **174**). Comme le nombre R' peut être pris aussi rapproché de R qu'on le veut, on en conclut que la fonction $f(x)$ admet, pour toute valeur de x comprise entre $-R$ et $+R$, une dérivée qui est représentée par la série obtenue en différentiant terme à terme

(10) $$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots.$$

En raisonnant sur cette série entière comme on a raisonné sur la première, on en conclut que $f(x)$ admet une dérivée seconde

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots,$$

et ainsi de suite. La fonction $f(x)$ admet, dans l'intervalle $(-R, +R)$, une suite illimitée de dérivées qui sont représentées par les séries obtenues en différentiant terme à terme

(11) $$f^{(n)}(x) = 1.2\ldots na_n + 2.3\ldots n(n+1)a_{n+1}x + \ldots.$$

Si l'on fait dans ces formules $x = 0$, il vient

$$a_0 = f(0), \qquad a_1 = f'(0), \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2}, \qquad \ldots$$

et, d'une manière générale,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n},$$

de sorte que le développement de $f(x)$ est identique au dévelop-

pement que fournirait la formule de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0) + \ldots.$$

Les coefficients a_0, a_1, ..., a_n étant égaux, à des facteurs numériques près, aux valeurs que prennent la fonction $f(x)$ et ses dérivées successives pour $x = 0$, il est clair que le développement d'une fonction en série entière ne peut être possible que d'une seule manière.

De même, en intégrant terme à terme une série entière, on obtient une nouvelle série entière, avec un terme constant arbitraire, qui est convergente dans le même intervalle que la première, et l'admet pour dérivée. En intégrant de nouveau, on obtiendra une nouvelle série dont les deux premiers coefficients seront arbitraires, et ainsi de suite.

Exemples. — 1° Pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$, la progression géométrique de raison $-x$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

est convergente et a pour somme $\frac{1}{1+x}$. En intégrant terme à terme entre les limites 0 et x, où $|x| < 1$, on retrouve le développement de $\log(1+x)$ (n° 49)

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

et la formule est encore vraie pour $x = 1$, puisque la série qui est au second membre reste convergente pour $x = 1$.

2° Pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$, on a aussi

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots;$$

en intégrant terme à terme entre les limites 0 et x, où $|x| < 1$, il vient

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots.$$

La série restant convergente pour $x = 1$, on en conclut l'égalité

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots.$$

3° Soit $F(x)$ la somme de la série convergente

$$F(x) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}x^p + \ldots,$$

où m est un nombre quelconque, et où $|x| < 1$. On en déduit

$$F'(x) = m\left[1 + \frac{m-1}{1}x + \ldots + \frac{(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots(p-1)}x^{p-1} + \ldots\right];$$

si l'on multiplie les deux membres par $(1+x)$ et qu'on réunisse les deux termes qui contiennent une même puissance de x, il vient, d'après l'identité

$$\frac{(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots(p-1)} + \frac{(m-1)\ldots(m-p)}{1.2\ldots p} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}$$

qu'il est facile de vérifier,

$$(1+x)F'(x) = m\left[1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}x^p + \ldots\right],$$

c'est-à-dire

$$(1+x)F'(x) = mF(x).$$

On déduit de là successivement

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{m}{1+x},$$

$$\log[F(x)] = m\log(1+x) + \log C,$$

c'est-à-dire

$$F(x) = C(1+x)^m.$$

Pour déterminer la constante C, il suffit de remarquer que l'on a $F(0) = 1$, ce qui donne $C = 1$, et nous retrouvons le développement de $(1+x)^m$ (n° 50)

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}x^p + \ldots.$$

4° Remplaçons, dans la formule précédente, x par $-x^2$, m par $-\frac{1}{2}$; il vient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n} + \ldots,$$

formule qui est valable pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$. En intégrant les deux membres entre les limites o et x, où $|x| < 1$, on obtient le développement de arc sin x :

$$\text{arc}\sin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

180. Extension de la formule de Taylor. — Soient $f(x)$ la somme d'une série entière convergente dans l'intervalle $(-R, +R)$, x_0 un point de cet intervalle, et $x_0 + h$ un autre point du même intervalle, tel que $|x_0| + |h| < R$. La série qui a pour somme $f(x_0 + h)$

$$a_0 + a_1(x_0 + h) + a_2(x_0 + h)^2 + \dots + a_n(x_0 + h)^n + \dots$$

peut être remplacée par une série à double entrée, que l'on obtient en développant les diverses puissances de $x_0 + h$ et écrivant sur une même ligne les termes de même degré en h

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \quad + \dots + a_n x_0^n + \dots \\ \quad + a_1 h \quad + 2a_2 x_0 h + \dots + n a_n x_0^{n-1} h + \dots \\ \qquad\qquad + a_2 h^2 \quad + \dots + \frac{n(n-1)}{1.2} a_n x_0^{n-2} h^2 + \dots \\ \qquad\qquad\qquad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Cette série à double entrée est absolument convergente; en effet, si l'on remplace chaque terme par sa valeur absolue, on a la nouvelle série à double entrée et à termes positifs

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} A_0 + A_1|x_0| + A_2|x_0|^2 \quad + \dots + A_n|x_0|^n + \dots \\ \quad + A_1|h| \quad + 2A_2|x_0||h| + \dots + nA_n|x_0|^{n-1}|h| + \dots \\ \qquad\qquad + A_2|h|^2 \quad + \dots + \frac{n|n-1|}{1.2} A_n|x_0|^{n-2}|h|^2 + \dots \\ \qquad\qquad\qquad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Si l'on fait la somme des éléments de ce tableau par colonnes verticales, on obtient la série

$$A_0 + A_1[|x_0| + |h|] + \dots + A_n[|x_0| + |h|]^n + \dots$$

qui est convergente puisqu'on suppose $|x_0| + |h| < R$. On peut donc faire la somme des éléments du tableau (12), soit par lignes, soit par colonnes. En faisant la somme par colonnes, on retrouve $f(x_0 + h)$; en faisant la somme par lignes horizontales, le résultat est ordonné suivant les puissances de h et les coefficients

de h, h^2, ... sont respectivement $f'(x_0)$, $\frac{f''(x_0)}{1.2}$, ... Nous pouvons donc écrire, en supposant $|h| < R - |x_0|$,

$$(14)\quad f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x_0) + \ldots.$$

La formule (14) s'applique certainement dans l'intervalle de $x_0 - R + |x_0|$ à $x_0 + R - |x_0|$, mais il peut se faire que la série qui est au second membre soit convergente dans un intervalle plus étendu. Considérons par exemple la fonction $(1+x)^m$, où m n'est pas un nombre entier positif; le développement suivant les puissances de x est valable de $x = -1$ jusqu'à $x = +1$. Soit x_0 une valeur de x comprise dans cet intervalle, nous pouvons écrire

$$(1+x)^m = (1 + x_0 + x - x_0)^m = (1+x_0)^m [1+z]^m,$$

où

$$z = \frac{x - x_0}{1 + x_0},$$

et développer $(1+z)^m$ suivant les puissances de z. Ce nouveau développement sera valable pourvu que $|z| < 1$, c'est-à-dire pour les valeurs de x comprises entre -1 et $1 + 2x_0$. Si x_0 est positif, le nouvel intervalle est plus grand que le premier $(-1, +1)$ et, par conséquent, la nouvelle formule permettra de calculer la valeur de la fonction pour des valeurs de la variable situées en dehors de l'intervalle primitif. En approfondissant cette remarque, on est conduit à une notion extrêmement importante, celle du *prolongement analytique,* dont nous réservons l'étude pour le Volume suivant.

Remarque. — Les propriétés établies pour les séries ordonnées suivant les puissances positives d'une variable x s'étendent évidemment sans difficulté aux séries ordonnées suivant les puissances positives de $x - a$ et, plus généralement, aux séries ordonnées suivant les puissances positives d'une fonction continue quelconque $\varphi(x)$; il suffit de les traiter comme des fonctions composées, la fonction intermédiaire étant $\varphi(x)$. Ainsi, une série ordonnée suivant les puissances positives de $\frac{1}{x}$ est convergente pour les valeurs de x dont la valeur absolue dépasse une certaine

limite, et représente une fonction continue pour toutes ces valeurs de la variable. Considérons, par exemple, la fonction $\sqrt{x^2 - a}$, que nous pouvons écrire $\pm x\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$; pour des valeurs de x dont la valeur absolue est supérieure à $\sqrt{a}$, $\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ peut être développé suivant les puissances de $\frac{1}{x^2}$, et l'on obtient ainsi la formule

$$\sqrt{x^2 - a} = x - \frac{1}{2}\frac{a}{x} - \frac{1}{2.4}\frac{a^2}{x^3} - \ldots - \frac{1.2.3\ldots(2p-3)}{2.4.6\ldots 2p}\frac{a^p}{x^{2p-1}} \ldots$$

qui donne le développement de $\sqrt{x^2 - a}$, lorsque x est $> \sqrt{a}$. Lorsque $x < -\sqrt{a}$, la série est encore convergente et a pour somme $-\sqrt{x^2 - a}$. Cette formule peut servir à trouver le développement de la racine carrée d'un nombre entier, lorsque l'on connaît le carré parfait immédiatement supérieur.

181. Fonctions majorantes. — Les propriétés déjà démontrées établissent une grande analogie entre les polynomes et les séries entières. Étant données plusieurs séries entières $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, soit $(-r, +r)$ la plus petite des régions de convergence de ces séries; pourvu que $|x| < r$, ces séries sont absolument convergentes et l'on peut les combiner par addition et multiplication, comme des polynomes. D'une façon générale, tout polynome entier en $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ peut être développé en une série entière convergente dans le même intervalle.

Pour étendre ces propriétés, nous définirons d'abord certaines expressions, qui seront employées par la suite. Soit $f(x)$ une série entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

et $\varphi(x)$ une autre série entière convergente dans un intervalle convenable

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$$

dont tous les coefficients α_i sont positifs. On dit que la fonction $\varphi(x)$ est *majorante* pour la fonction $f(x)$ si l'un quelconque des coefficients α_n est supérieur à la valeur absolue du coefficient

correspondant de $f(x)$

$$|a_0| < \alpha_0, \quad |a_1| < \alpha_1, \quad \ldots, \quad |a_n| < \alpha_n, \quad \ldots;$$

d'après une notation proposée par M. Poincaré, on indique ainsi cette relation entre les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$:

$$f(x) \ll \varphi(x).$$

L'utilité des fonctions majorantes dans les raisonnements tient à la propriété suivante, qui est une conséquence immédiate de la définition. Soit $P_n(a_0, a_1, \ldots a_n)$ un polynome dépendant des $n+1$ premiers coefficients de $f(x)$, et dont les coefficients sont réels et positifs; si l'on remplace dans le polynome a_0, $a_1, \ldots a_n$ par les coefficients correspondants de la fonction majorante $\varphi(x)$, on a évidemment

$$|P(a_0, a_1, \ldots, a_n)| \leqq P(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Par exemple, si $\varphi(x)$ est une fonction majorante pour $f(x)$, la série qui représente $[\varphi(x)]^2$ sera majorante pour $[f(x)]^2, \ldots$ et, en général, $[\varphi(x)]^n$ sera majorante pour $[f(x)]^n$. De même, si φ et φ_1 sont des fonctions majorantes pour f et f_1 respectivement, le produit $\varphi\varphi_1$ sera une fonction majorante pour $ff_1, \ldots$.

Étant donnée une série entière $f(x)$ convergente dans l'intervalle $(-R, +R)$, la recherche d'une fonction majorante est un problème d'une grande indétermination. Mais il y a intérêt, pour la suite des raisonnements, à choisir une fonction majorante aussi simple que possible. Soit r un nombre positif inférieur à R, mais aussi voisin de R qu'on le voudra. La série étant absolument convergente pour $x = r$, soit M la limite supérieure de la valeur absolue des termes de cette série; on a, quel que soit n,

$$A_n r^n \leqq M,$$

ou

$$|a_n| = A_n \leqq \frac{M}{r^n}.$$

La série dont le terme général est $M\frac{x^n}{r^n}$, c'est-à-dire

$$M + M\frac{x}{r} + \ldots + \frac{Mx^n}{r^n} + \ldots = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}$$

est donc une fonction majorante pour $f(x)$; c'est celle dont on se sert le plus souvent. Lorsque la série $f(x)$ ne présente pas de terme constant, on peut de même prendre pour fonction majorante la fonction

$$\frac{M}{1-\frac{x}{r}} - M.$$

On peut prendre pour r un nombre quelconque inférieur à R, et il est clair que le nombre correspondant M diminue en général avec r, mais ne peut jamais être inférieur à A_0, si A_0 n'est pas nul. Lorsqu'il en est ainsi, on peut toujours trouver un nombre positif $\rho < R$, tel que la fonction $\frac{A_0}{1-\frac{x}{\rho}}$ soit majorante pour $f(x)$. En effet, soit

$$M + M\frac{x}{r} + M\frac{x^2}{r^2} + \ldots + M\frac{x^n}{r^n} + \ldots,$$

où $M > A_0$, une première fonction majorante. Prenons un nombre ρ inférieur à $r\frac{A_0}{M}$; on peut écrire, en supposant $n \geqq 1$,

$$|a_n \rho^n| = |a_n r^n| \times \left(\frac{\rho}{r}\right)^n < M\frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1}$$

et par suite $|a_n \rho^n| < A_0$; d'ailleurs, on a $|a_0| = A_0$. La série

$$A_0 + A_0\frac{x}{\rho} + A_0\frac{x^2}{\rho^2} + \ldots + A_0\frac{x^n}{\rho^n} + \ldots$$

est donc majorante pour $f(x)$; cette propriété nous servira tout à l'heure. Plus généralement, on peut prendre pour M un nombre quelconque supérieur ou au moins égal à A_0.

On verra de la même façon que, dans le cas où $a_0 = 0$, on peut prendre pour fonction majorante une expression de la forme

$$\frac{\mu}{1-\frac{x}{\rho}} - \mu,$$

où μ est un nombre positif arbitraire.

Remarque. — La connaissance d'une progression géométrique décroissante comme fonction majorante permet aussi de se rendre compte de

l'approximation obtenue quand on remplace la somme $f(x)$ de la série par la somme des $n+1$ premiers termes. Si la série $\frac{M}{1-\frac{x}{r}}$ est majorante pour $f(x)$, il est évident que le reste de la série proposée

$$a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots$$

est moindre en valeur absolue que le reste correspondant de la série

$$M\left(\frac{x^{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{x^{n+2}}{r^{n+2}} + \ldots\right),$$

c'est-à-dire que $M\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{r}}$.

182. Substitution d'une série dans une autre série. — Soit

$$(15)\qquad z = f(y) = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n + \ldots$$

une série ordonnée suivant les puissances d'une variable y, et convergente pourvu que l'on ait $|y| < R$. Soit, d'autre part,

$$(16)\qquad y = \varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots$$

une autre série convergente dans l'intervalle de $-r$ à $+r$. Imaginons qu'on remplace, dans la série (15), $y, y^2, y^3, \ldots$ par leurs développements en séries ordonnées suivant les puissances de x, déduits de la formule (16); nous obtenons de cette façon un tableau à double entrée

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1 b_0 \quad + a_2 b_0^2 \qquad\qquad + \ldots + a_n b_0^n + \ldots \\ \quad + a_1 b_1 x + 2a_2 b_0 b_1 x \qquad + \ldots + n a_n b_0^{n-1} b_1 x + \ldots \\ \quad + a_1 b_2 x^2 + a_2(b_1^2 + 2b_0 b_2)x^2 + \ldots \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et nous allons chercher si ce tableau à double entrée peut être absolument convergent. Il faut d'abord que la série obtenue en prenant les termes de la première ligne, c'est-à-dire

$$a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \ldots,$$

soit absolument convergente, ou que l'on ait $|b_0| < R$. *Cette condition est suffisante.* En effet, si elle est remplie, on peut prendre pour fonction majorante de $\varphi(x)$ une expression de la

forme $\frac{m}{1-\frac{x}{\rho}}$, où m est un nombre positif quelconque supérieur à $|b_0|$, et où $\rho < r$; on peut donc supposer que l'on a pris $m < R$. Soit R' un nombre positif compris entre m et R; la fonction $f(y)$ admet elle-même pour fonction majorante une expression de la forme

$$\frac{M}{1-\frac{y}{R'}} = M + M\frac{y}{R'} + M\frac{y^2}{R'^2} + \ldots.$$

Si dans cette dernière série on remplace y par $\frac{m}{1-\frac{x}{\rho}}$, et qu'on développe les diverses puissances de y suivant les puissances croissantes de x par la formule du binome, on obtient un nouveau tableau à double entrée

$$(18)\quad \begin{cases} M + M\left(\frac{m}{R'}\right) + \ldots + M\left(\frac{m}{R'}\right)^n + \ldots, \\ \quad + M\frac{m}{R'}\frac{x}{\rho} + \ldots + nM\left(\frac{m}{R'}\right)^n\frac{x}{\rho} + \ldots, \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont tous les coefficients sont positifs et supérieurs aux valeurs absolues des coefficients correspondants du tableau (17), car un coefficient quelconque du tableau (17) se déduit des coefficients a_0, a_1, a_2, ..., b_0, b_1, b_2 ..., par des additions et des multiplications seulement. Si donc la série double (18) est absolument convergente, il en sera de même *a fortiori* de la série double (17). Si dans la série (18) on remplace x par sa valeur absolue, il faudra, pour que le tableau soit convergent, que les séries obtenues en prenant les termes d'une même colonne soient convergentes, c'est-à-dire que l'on ait $|x| < \rho$. Cette condition étant remplie, la somme des termes de la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne est égale à

$$M\left[\frac{m}{R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)}\right]^n,$$

et il faudra en outre que l'on ait aussi

$$m < R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right),$$

c'est-à-dire

$$|x| < \rho\left(1 - \frac{m}{R'}\right). \tag{19}$$

La dernière inégalité (19) entraînant la précédente $|x| < \rho$, il s'ensuit qu'elle exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la série double (18) soit absolument convergente. La série double (17) sera donc aussi absolument convergente pour les valeurs de x satisfaisant à cette condition; remarquons que toutes ces valeurs de x rendent convergente la série $\varphi(x)$, et que la valeur correspondante de y est moindre que R' en valeur absolue, car les inégalités

$$|\varphi(x)| < \frac{m}{1 - \frac{|x|}{\rho}}, \quad \frac{|x|}{\rho} < 1 - \frac{m}{R'}$$

entraînent l'inégalité $|\varphi(x)| < R'$. Si l'on fait la somme de cette série (17) en ajoutant par colonnes, on trouve

$$a_0 + a_1\varphi(x) + a_2[\varphi(x)]^2 + \ldots + a_n[\varphi(x)]^n + \ldots,$$

c'est-à-dire $f[\varphi(x)]$; au contraire, si l'on ajoute par lignes horizontales, on obtient une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, et l'on peut écrire

$$f[\varphi(x)] = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots, \tag{20}$$

les coefficients c_0, c_1, c_2, ... s'exprimant au moyen des coefficients des deux séries par des formules faciles à établir

$$\left\{\begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \ldots + a_n b_0^n + \ldots, \\ c_1 &= a_1 b_1 + 2a_2 b_1 b_0 + \ldots + n a_n b_0^{n-1} b_1 + \ldots, \\ c_2 &= a_1 b_2 + a_2(b_1^2 + 2b_0 b_2) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{21}$$

La relation (20) n'est établie que pour les valeurs de x qui satisfont à l'inégalité (19), mais ce n'est là qu'une limite inférieure de l'intervalle où cette relation est applicable. Il peut se faire qu'elle subsiste dans un intervalle beaucoup plus étendu. C'est une question dont la solution complète exige l'étude des fonctions d'une variable imaginaire et qui sera reprise plus tard.

Cas particuliers. — 1° Le nombre R′ qui figure dans l'inégalité (19) pouvant être supposé aussi voisin de R qu'on le veut, il s'ensuit que la formule (20) s'applique pourvu que l'on ait $|x| < \rho\left(1 - \frac{m}{R}\right)$. Cela posé, si la série (15) est convergente, quel que soit y, on peut supposer R infini, et ρ aussi voisin de r qu'on le voudra. La formule (20) sera donc applicable pourvu que l'on ait $|x| < r$, c'est-à-dire dans le même intervalle que la formule (16). En particulier, si la série $\varphi(x)$ est convergente quel que soit x, comme $f(y)$, on peut aussi supposer r infini, et la formule (20) subsiste quel que soit x.

2° Lorsque le terme constant b_0 de la série (16) est nul, on peut prendre comme fonction majorante de $\varphi(x)$ une expression de la forme

$$\frac{m}{1 - \frac{x}{\rho}} - m,$$

où $\rho < r$, m pouvant être quelconque. En raisonnant comme dans le cas général, on démontrera que la formule (20) est applicable, pourvu que l'on ait

$$(22) \qquad |x| < \rho\,\frac{R'}{R' + m},$$

R′ étant aussi voisin de R qu'on le voudra. L'intervalle fourni par cette dernière inégalité est plus étendu que celui qui est donné par la condition générale (19).

Ce cas particulier se présente fréquemment dans la pratique. L'inégalité $|b_0| < R$ est alors satisfaite d'elle-même, et le coefficient c_n ne dépend que de $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$.

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2, \quad \ldots, \quad c_n = a_1 b_n + \ldots + a_n b_1^n.$$

Exemples. — 1° Cauchy a montré qu'on pouvait déduire la formule du binome du développement de $\log(1+x)$. On peut écrire en effet

$$(1+x)^\mu = e^{\mu \log(1+x)} = e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots$$

en posant

$$y = \mu \log(1+x) = \mu\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\right),$$

ce qui donne, en substituant le second développement dans le premier,

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots\right) + \frac{\mu^2}{1.2}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots\right)^2 + \ldots.$$

Il est clair qu'en ordonnant le second membre suivant les puissances de x, on obtient pour coefficient de x^n un polynome de degré n en μ, soit $P_n(\mu)$. Ce polynome doit s'annuler pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ et se réduire à l'unité pour $\mu = n$, ce qui suffit à le déterminer

$$(23) \qquad P_n = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n}.$$

2° Soit $z = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, x étant compris entre -1 et $+1$. On peut écrire

$$z = e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots$$

en posant

$$y = \frac{1}{x}\log(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + \ldots.$$

Le premier développement est valable quel que soit y; le second n'est valable que si $|x| < 1$. La formule obtenue en substituant le second développement dans le premier s'appliquera donc aux valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

En se bornant aux deux premiers termes, on a

$$(24) \quad (1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{x}{2}\left(1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots\right) + \ldots$$
$$= e - \frac{e}{2}x + \ldots.$$

Lorsque x tend vers zéro par valeurs positives, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tend donc vers e en croissant.

183. Division des séries entières. — Considérons d'abord l'inverse d'une série entière commençant par l'unité

$$f(x) = \frac{1}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots},$$

et convergente dans l'intervalle $(-r, +r)$. Posons

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \ldots$$

et, en substituant le premier développement dans le second, on

obtient pour $f(x)$ un développement en série entière

(25) $$f(x) = 1 - b_1 x + (b_1^2 - b_2)x^2 + \ldots$$

qui est valable dans un certain intervalle.

On développerait de même l'inverse d'une série entière quelconque commençant par un terme constant différent de zéro.

Soit maintenant à développer le quotient de deux séries entières convergentes

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots}.$$

Si b_0 n'est pas nul, on peut écrire

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \times \frac{1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots}$$

et, d'après le cas que nous venons de traiter, le second membre est le produit de deux séries entières convergentes; le quotient peut donc se mettre sous forme d'une série entière convergente pour des valeurs de x voisines de zéro

(26) $$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

En chassant le dénominateur et égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on obtient les relations suivantes

(27) $$a_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

qui déterminent de proche en proche les coefficients $c_0, c_1, \ldots c_n$. On remarquera que ces coefficients sont précisément ceux que l'on obtiendrait en effectuant la division des deux séries par la règle ordinaire de la division de deux polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de x.

Lorsque $b_0 = 0$, le résultat est différent. Supposons, pour plus de généralité, $\psi(x) = x^k \psi_1(x)$, k étant un nombre entier positif, et $\psi_1(x)$ désignant une série entière où le terme constant est différent de zéro.

On peut écrire

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x^k} \frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)},$$

et, d'après ce qu'on vient de voir, on a

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1} x^{k-1} + c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + \ldots.$$

On en déduit

$$(28) \qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{c_0}{x^k} + \frac{c_1}{x^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{k-1}}{x} + c_k + c_{k+1} x + \ldots;$$

le quotient est donc égal à la somme d'une fraction rationnelle qui devient infinie pour $x = 0$, et d'une série entière qui est convergente dans un certain intervalle autour de l'origine.

Remarque. — Pour calculer les puissances successives d'une série entière, il est avantageux dans la pratique d'opérer comme il suit. Si dans l'identité

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)^m = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

on prend les dérivées logarithmiques des deux membres et qu'on chasse les dénominateurs, on parvient à une nouvelle identité

$$(29) \left\{ \begin{aligned} & m(a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots)(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots) \\ & = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)(c_1 + 2c_2 x + \ldots + n c_n x^{n-1} + \ldots) \end{aligned} \right.$$

Il est facile de former les coefficients des diverses puissances de x dans les deux membres, et, en égalant les coefficients des mêmes puissances, on a une suite de relations qui déterminent de proche en proche c_1, c_2, ..., c_n, ..., connaissant c_0. Or on a évidemment $c_0 = a_0^n$.

184. Développement de $\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$. — Proposons-nous de développer $\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$ suivant les puissances de z. En posant $y = 2xz - z^2$, on peut écrire, pourvu que $|y| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} = (1-y)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} y + \frac{1.3}{2.4} y^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(30) \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = 1 + \frac{2xz - z^2}{2} + \frac{3}{8}(2xz - z^2)^2 + \ldots,$$

et en réunissant ensemble tous les termes qui sont divisibles par une même puissance de z, on obtient un développement de la forme

$$(31) \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \ldots + P_n z^n + \ldots,$$

où

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = x, \qquad P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2}, \qquad \ldots,$$

P_n étant un polynome de degré n en x. Ces polynomes se déterminent de proche en proche par une loi de récurrence. En différentiant la formule précédente par rapport à z, il vient en effet

$$\frac{x - z}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1 + 2P_2 z + \ldots + nP_n z^{n-1} + \ldots,$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de la formule (31) elle-même,

$$(x - z)(P_0 + P_1 z + \ldots + P_n z^n + \ldots) = (1 - 2xz + z^2)(P_1 + 2P_2 z + \ldots);$$

égalons les coefficients de z^n dans les deux membres, et nous trouvons la relation de récurrence

$$(n + 1)P_{n+1} = (2n + 1)xP_n - nP_{n-1}.$$

Or cette relation est identique à celle qui lie trois polynomes de Legendre consécutifs (n° 88), et l'on a $P_0 = X_0$, $P_1 = X_1$, $P_2 = X_2$. On a donc $P_n = X_n$, quel que soit n, et la formule (31) devient

$$(32) \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_n z^n + \ldots,$$

X_n étant le $n^{\text{ième}}$ polynome de Legendre

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

On verra plus tard dans quel intervalle cette formule est applicable.

II. — SÉRIES ENTIÈRES A PLUSIEURS VARIABLES.

185. Propriétés générales. — Les propriétés des séries entières à une seule variable s'étendent sans difficulté aux séries entières à plusieurs variables indépendantes. Considérons d'abord une série double $\Sigma a_{mn} x^m y^n$, où les nombres m et n varient de 0 à $+\infty$, et où les coefficients a_{mn} ont des signes quelconques. *Si, pour un système de valeurs $x = x_0$, $y = y_0$, la valeur absolue d'un terme quelconque de cette série est inférieure à un nombre fixe, la série est absolument convergente pour tout système de valeurs de x et de y, tel que l'on ait $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$.*

Supposons, en effet, que l'on ait, quels que soient les in-

dices m et n,

$$|a_{mn}x_0^m y_0^n| < M \quad \text{ou} \quad |a_{mn}| < \frac{M}{|x_0|^m |y_0|^n};$$

la valeur absolue du terme général de la série double $\Sigma a_{mn}x^m y^n$ est plus petite que le terme correspondant de la série double $\Sigma M \left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n$, série qui est convergente pourvu que l'on ait $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ et a pour somme $\frac{M}{\left(1 - \left|\frac{x}{x_0}\right|\right)\left(1 - \left|\frac{y}{y_0}\right|\right)}$, comme on le voit en faisant d'abord la somme des termes renfermés dans une même colonne et ajoutant ensuite les diverses sommes obtenues.

Désignons par r et ρ deux nombres positifs tels que la série double $\Sigma|a_{mn}|r^m\rho^n$ soit convergente, et soit R le rectangle formé par les quatre droites $x = r$, $x = -r$, $y = \rho$, $y = -\rho$. Pour tout point (x, y) pris à l'intérieur ou sur un des côtés de ce rectangle, la série à double entrée

$$F(x, y) = \Sigma a_{mn}x^m y^n \tag{33}$$

a tous ses termes plus petits en valeur absolue que ceux de la série $\Sigma|a_{mn}|r^m\rho^n$; elle est donc absolument et uniformément convergente à l'intérieur de R et définit par suite une fonction continue des deux variables x et y dans cette région du plan.

On démontre, comme dans le cas d'une seule variable, que les séries doubles obtenues en différentiant terme à terme un nombre quelconque de fois sont absolument et uniformément convergentes dans le rectangle formé par les droites $x = r - \varepsilon$, $x = -r + \varepsilon$, $y = \rho - \varepsilon'$, $y = -\rho + \varepsilon'$, ε et ε' étant deux nombres positifs arbitraires. Ces séries représentent les dérivées partielles des différents ordres de $F(x, y)$; par exemple, la somme de la série $\Sigma m a_{mn}x^{m-1}y^n$ est égale à $\frac{\partial F}{\partial x}$, car si l'on ordonne les deux séries par rapport aux puissances croissantes de x, les termes de la seconde série seront égaux respectivement aux dérivées des termes correspondants de la première. Ainsi la dérivée partielle $\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m \partial y^n}$ est égale à la somme d'une série double dont le terme constant est $a_{mn}1.2\ldots m.1.2\ldots n$; les coefficients a_{mn}

représentent donc, à des facteurs numériques près, les valeurs des dérivées partielles de la fonction $F(x, y)$ pour $x = y = 0$, et la formule (33) peut encore s'écrire

$$(34) \qquad F(x, y) = \sum \frac{\left(\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}\right)_0}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} x^m y^n,$$

ce qui montre, remarquons-le en passant, qu'une fonction de deux variables ne peut être développée en série entière que d'une seule façon. Si l'on groupe ensemble tous les termes de la série double du même degré en x et y, on obtient une série ordinaire que l'on peut écrire

$$(35) \qquad F(x, y,) = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n + \ldots,$$

φ_n étant un polynome homogène de degré n en x, y, que l'on peut écrire, sous forme symbolique,

$$\varphi_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(n)};$$

ce développement est donc identique à celui que fournirait la formule de Taylor (n° 51).

Soient (x_0, y_0) un point à l'intérieur du rectangle R, et $(x_0 + h, y_0 + k)$ un point voisin tel que l'on ait $|x_0| + |h| < r$, $|y_0| + |k| < \rho$; à l'intérieur du rectangle formé par les quatre droites

$$x = x_0 \pm [r - |x_0|], \qquad y = y_0 \pm [\rho - |y_0|],$$

la fonction $F(x, y)$ peut être développée en série entière ordonnée suivant les puissances positives de $x - x_0$ et de $y - y_0$,

$$(36) \qquad F(x_0 + h, y_0 + k) = \sum \frac{\left(\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} h^m k^n.$$

On le démontre en remplaçant, dans la série double

$$\Sigma a_{mn}(x_0 + h)^m (y_0 + k)^n,$$

chaque terme par son développement suivant les puissances de h et de k et observant que la nouvelle série multiple est absolument convergente, sous les hypothèses qui ont été faites. En ordonnant

cette nouvelle série suivant les puissances de h et de k, on arrive précisément à la formule (36).

Le lecteur vérifiera aisément que les raisonnements et les théorèmes précédents s'étendent d'eux-mêmes aux séries entières à un nombre quelconque de variables.

186. Fonctions majorantes. — Étant donnée une série entière à n variables $f(x, y, z, \ldots)$, nous dirons qu'une autre série à n variables $\varphi(x, y, z, \ldots)$ est majorante pour la première, si un coefficient quelconque de $\varphi(x, y, z, \ldots)$ est positif et supérieur à la valeur absolue du coefficient correspondant de $f(x, y, z, \ldots)$. Le raisonnement du n° 185 repose en réalité sur l'emploi d'une fonction majorante; si la série $\Sigma|a_{mn}x^m y^n|$ est convergente pour $x = r$, $y = \rho$, la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)} = M\Sigma\left(\frac{x}{r}\right)^m\left(\frac{y}{\rho}\right)^n,$$

où M est supérieur à tous les termes de la série $\Sigma|a_{mn}r^m\rho^n|$, est une fonction majorante pour la série $\Sigma a_{mn}x^m y^n$. La fonction

$$\psi(x, y) = \frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)}$$

est aussi une fonction majorante; car le coefficient de $x^m y^n$ dans $\psi(x, y)$ est égal au coefficient de ce même terme dans $M\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)^{m+n}$ et par conséquent est au moins égal à celui de $x^m y^n$ dans $\varphi(x, y)$.

De même, étant donnée une série triple

$$f(x, y, z) = \Sigma a_{mnp}x^m y^n z^p,$$

si elle est absolument convergente pour $x = r$, $y = r'$, $z = r''$, r, r', r'' étant trois nombres positifs, elle admet pour fonction majorante une expression de la forme

$$\varphi(x, y, z) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{r''}\right)},$$

que l'on peut remplacer encore par l'une quelconque des suivantes

$$\frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)}, \quad \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left[1-\left(\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)\right]}, \quad \ldots.$$

Lorsque $f(x, y, z)$ ne renferme pas de terme constant, on peut prendre aussi pour fonction majorante l'une ou l'autre des précédentes, diminuée de M.

Le théorème sur la substitution d'une série entière dans une autre série entière (n° **182**) s'étend aux séries à plusieurs variables. *Si dans une série entière convergente à p variables* y_1, y_2, ..., y_p, *on remplace ces variables par p développements en séries entières à q variables* x_1, x_2, ..., x_q, *ne présentant pas de termes constants, et convergentes, le résultat de la substitution peut être mis sous forme d'une série entière ordonnée par rapport aux puissances de* x_1, x_2, ..., x_q, *pourvu que les valeurs absolues de ces variables soient inférieures à certaines limites.*

La démonstration étant la même, quel que soit le nombre des variables, nous nous bornerons, pour fixer les idées, au cas particulier suivant. Soit

$$F(y, z) = \Sigma a_{mn} y^m z^n \tag{37}$$

une série entière convergente pourvu que l'on ait $|y| \leqq r$, $|z| \leqq r'$; soient d'autre part

$$\left\{\begin{array}{l} y = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots, \\ z = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots, \end{array}\right. \tag{38}$$

deux séries, sans terme constant, convergentes tant que la valeur absolue de x ne dépasse pas ρ. Dans un terme quelconque de la série (37) remplaçons y et z par leurs développements en série (38); nous obtenons pour $y^m z^n$ une nouvelle série entière en x, et la série double (37) est remplacée par une série à triple entrée dont tous les coefficients se déduisent des coefficients a_{mn}, b_n, c_n par des additions et des multiplications seulement. Il s'agit de montrer que cette série à triple entrée est elle-même absolument convergente pourvu que la valeur absolue de x ne dépasse pas une certaine limite, et qu'on peut par conséquent l'ordonner suivant les puissances croissantes de la variable. Remarquons,

pour cela, qu'on peut prendre pour fonction majorante de $f(y, z)$ la fonction

$$(39) \qquad \varphi(y, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{y}{r}\right)\left(1 - \frac{z}{r'}\right)} = \Sigma M \left(\frac{y}{r}\right)^m \left(\frac{z}{r'}\right)^n,$$

et pour fonction majorante des deux séries (38) une expression de la forme

$$(40) \qquad \frac{N}{1 - \frac{x}{\rho}} - N = \sum_{n=1}^{+\infty} N \left(\frac{x}{\rho}\right)^n,$$

M et N étant deux nombres positifs. Si dans la série double (39) on remplace maintenant y et z par le développement (40) et qu'on développe chacun des produits $y^m z^n$ suivant les puissances de x, la série à triple entrée obtenue a tous ses coefficients réels positifs et supérieurs aux valeurs absolues des coefficients correspondants de la série à triple entrée déjà obtenue. Il suffira donc de démontrer que cette nouvelle série est convergente, quand on donne à x une valeur positive assez petite. Or, si l'on ajoute les termes provenant du développement d'un même terme de la série (39), on retrouve la série à double entrée dont le terme général est

$$M \frac{N^{m+n}}{r^m r'^n} \frac{\left(\frac{x}{\rho}\right)^{m+n}}{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{m+n}};$$

c'est précisément, au facteur M près, le terme général de la série obtenue en multipliant terme à terme les deux séries

$$\sum \left(\frac{N}{r}\right)^m \left(\frac{\frac{x}{\rho}}{1 - \frac{x}{\rho}}\right)^m, \quad \sum \left(\frac{N}{r'}\right)^n \left(\frac{\frac{x}{\rho}}{1 - \frac{x}{\rho}}\right)^n,$$

et ces deux séries sont convergentes pourvu que l'on ait à la fois

$$x < \rho \frac{r}{r + N}, \quad x < \rho \frac{r'}{r' + N};$$

il suffira donc que la valeur absolue de x soit inférieure au plus

petit des deux nombres $\rho \frac{r}{r+N}$, $\rho \frac{r'}{r'+N}$ pour que l'on ait le droit d'ordonner la série à triple entrée suivant les puissances de x.

Remarque. — Le théorème est encore vrai lorsque les séries (38) renferment des termes constants b_0 et c_0, pourvu que l'on ait $|b_0| < r$, $|c_0| < r'$. On peut, en effet, remplacer le développement (37) par un développement ordonné suivant les puissances de $y - b_0$ et de $z - c_0$ (n° 185), et l'on est ramené au cas qui vient d'être traité.

III. — FONCTIONS IMPLICITES. COURBES ET SURFACES ANALYTIQUES.

187. **Fonction implicite d'une variable.** — On a déjà établi (p. 40 *et suiv.*) l'existence des fonctions implicites, sous certaines conditions de continuité. Lorsque les premiers membres des équations considérées sont développables en séries entières, on arrive à des résultats plus précis, que nous allons maintenant exposer.

Soit $F(x, y) = 0$ *une équation où le premier membre peut être développé en série convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de* $x - x_0$, $y - y_0$, *cette série ne présentant pas de terme constant, et le coefficient de* $y - y_0$ *n'étant pas nul. Cette équation admet une racine, et une seule, qui tend vers* y_0 *lorsque* x *tend vers* x_0, *et cette racine peut être développée en série entière ordonnée suivant les puissances de* $x - x_0$.

Afin de simplifier les calculs, supposons $x_0 = y_0 = 0$, ce qui revient à déplacer l'origine. En isolant dans un membre le terme du premier degré en y, on peut écrire l'équation proposée

$$(41) \qquad y = f(x, y) = a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots,$$

les termes non écrits étant d'un degré supérieur au second. Nous allons d'abord montrer qu'on peut satisfaire *formellement* à l'équation (41) en remplaçant y par une série

$$(42) \qquad y = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

et en opérant sur le second membre comme si cette série était convergente. On trouve, en effet, en identifiant les deux membres, après la substitution effectuée, les conditions

$$c_1 = a_{10}, \qquad c_2 = a_{20} + a_{11}c_1 + a_{02}c_1^2, \qquad \ldots;$$

d'une manière générale, c_n s'exprime au moyen des coefficients a_{ik}, où $i + k \leqq n$, et des coefficients précédents $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ par des additions et des multiplications seulement, de sorte que nous pouvons écrire

$$(43) \qquad c_n = P_n(a_{10}, a_{20}, a_{11}, \ldots, a_{0n}),$$

P_n étant un polynome dont tous les coefficients sont des nombres entiers positifs. La légitimité des opérations précédentes sera établie, si l'on démontre que la série (42) ainsi obtenue est convergente pour des valeurs de x suffisamment petites. On se sert pour cela d'un artifice très général, dont la première idée est due à Cauchy, et qui repose sur l'emploi des fonctions majorantes.

Soit

$$\varphi(x, Y) = \Sigma b_{mn} x^m Y^n$$

une fonction majorante pour $f(x, y)$, où l'on a $b_{00} = b_{01} = 0$, et où b_{mn} est positif et au moins égal à $|a_{mn}|$; si l'on considère l'équation auxiliaire

$$(41)' \qquad Y = \varphi(x, Y) = \Sigma b_{mn} x^m Y^n,$$

et que l'on cherche, comme plus haut, à satisfaire à cette équation en prenant pour Y une série entière en x,

$$(42)' \qquad Y = C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$$

on obtiendra de même pour les coefficients $C_1, C_2, \ldots$, les valeurs

$$C_1 = b_{10}, \qquad C_2 = b_{20} + b_{11}C_1 + b_{02}C_1^2, \qquad \ldots$$

et en général

$$(43)' \qquad C_n = P_n(b_{10}, b_{20}, \ldots, b_{0n}).$$

La comparaison des relations (43) et (43)' nous montre aussitôt que l'on a $|c_n| < C_n$, puisque tous les coefficients du polynome P_n sont positifs et que l'on a $|a_{mn}| \leqq b_{mn}$. La série (42) sera donc

convergente si la série $(42)'$ est elle-même convergente. Or nous pouvons prendre pour la fonction majorante $\varphi(x, Y)$ une expression de la forme

$$\varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)} - M - M\frac{Y}{\rho},$$

M, r, ρ étant trois nombres positifs, et l'équation auxiliaire $(41)'$ devient, en chassant les dénominateurs,

$$Y^2 - \frac{\rho^2 Y}{\rho + M} + \frac{M\rho^2}{\rho + M}\,\frac{\frac{x}{r}}{1-\frac{x}{r}} = 0.$$

Cette équation admet une racine qui est nulle pour $x = 0$; cette racine a pour expression

$$Y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)} - \frac{\rho^2}{2(\rho + M)}\sqrt{1 - \frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\,\frac{\frac{x}{r}}{1-\frac{x}{r}}};$$

la quantité sous le radical peut s'écrire

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1},$$

en posant

$$\alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho + 2M}\right)^2,$$

et l'on a encore

$$Y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)}\left[1 - \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Cette racine Y peut donc être développée en série convergente dans l'intervalle $(-\alpha, +\alpha)$; ce développement est forcément identique à celui que fournit la substitution directe, c'est-à-dire au développement $(42)'$. Par suite, la série (42) est *a fortiori* convergente dans l'intervalle $(-\alpha, +\alpha)$, mais ce n'est là qu'une limite inférieure de l'intervalle de convergence qui peut être beaucoup plus étendu.

D'après la façon même dont on a obtenu les coefficients c_n, il est évident que la somme y de la série (42) satisfait à l'équa-

tion (41). Écrivons cette équation $F(x, y) = y - f(x, y) = 0$, et soit $y = P(x)$ la racine que nous venons d'obtenir. Si l'on pose, dans $F(x, y)$, $y = P(x) + z$ et qu'on ordonne le résultat de la substitution suivant les puissances de x et de z, tous les termes doivent être divisibles par z, puisque ce résultat doit être nul, quel que soit x, quand on fait $z = 0$. On a donc identiquement

$$F[x, P(x) + z] = zQ(x, z),$$

$Q(x, z)$ étant une série entière en x et z, et si l'on remplace maintenant z par $y - P(x)$ dans $Q(x, z)$, on arrive en définitive à l'identité

$$F(x, y) = [y - P(x)]Q_1(x, y);$$

le terme constant de Q_1 doit être égal à l'unité, puisque le coefficient de y doit être égal à un, et nous pouvons écrire

$$(44) \qquad F(x, y) = [y - P(x)](1 + \alpha x + \beta y + \ldots).$$

Cette décomposition de $F(x, y)$ en un produit de deux facteurs est due à M. Weierstrass. Elle met en évidence la racine $y = P(x)$; elle montre de plus qu'il n'y a pas d'autre racine de $F(x, y) = 0$ s'annulant avec x, puisque le second facteur ne tend pas vers zéro lorsque x et y tendent vers zéro.

Remarque. — La méthode précédente pour déterminer les coefficients c_n est identique au fond à celle qui a été indiquée au n° 46. Mais on voit de plus que la série obtenue en prolongeant indéfiniment les opérations est convergente.

188. Théorème général. — Considérons maintenant un système de p relations entre $p + q$ variables

$$(45) \qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0, \end{cases}$$

où les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont nulles pour $x_i = y_k = 0$, et sont développables en séries entières dans le voisinage; nous supposons de plus que le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$ *n'est pas nul* pour ces valeurs. Dans ces conditions, *les équa-*

tions (45) *admettent un système de solutions, et un seul, de la forme*

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_q), \qquad \ldots, \qquad y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_q),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ *étant des séries entières en* $x_1, x_2, \ldots, x_q$, *qui s'annulent pour* $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$.

Pour simplifier l'écriture, bornons-nous au cas de deux équations entre deux fonctions u et v et trois variables indépendantes x, y, z,

$$(46) \qquad \begin{cases} F_1 = au + bv + cx + dy + ez + \ldots = 0, \\ F_2 = a'u + b'v + c'x + d'y + e'z + \ldots = 0. \end{cases}$$

Puisque le déterminant $ab' - ba'$ n'est pas nul, par hypothèse, on peut remplacer les deux équations (46) par deux équations de la forme

$$(47) \qquad \begin{cases} u = \Sigma a_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \\ v = \Sigma b_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \end{cases}$$

les seconds membres ne renfermant pas de termes constants, ni de termes du premier degré en u et v. On démontre, de la même façon que plus haut, que l'on satisfait formellement à ces équations en prenant pour u et v des séries entières en x, y, z

$$(48) \qquad u = \Sigma c_{ikl} x^i y^k z^l, \qquad v = \Sigma c'_{ikl} x^i y^k z^l,$$

les coefficients c_{ikl} et c'_{ikl} se déduisant des coefficients a_{mnpqr} et b_{mnpqr} par des additions et des multiplications seulement. Pour établir la convergence de ces développements, il suffit encore de les comparer aux développements analogues obtenus en cherchant à satisfaire aux deux équations auxiliaires

$$U = V = \frac{M}{\left(1 - \frac{x+y+z}{r}\right)\left(1 - \frac{U+V}{\rho}\right)} - M\left(1 + \frac{U+V}{\rho}\right),$$

M, r et ρ étant des nombres positifs dont on a déjà expliqué la signification. Ces deux équations auxiliaires se réduisent à une équation unique du second degré

$$U^2 - \frac{\rho^2 U}{2\rho + 4M} + \frac{M\rho^2}{2\rho + 4M} \frac{\frac{x+y+z}{r}}{1 - \frac{x+y+z}{r}} = 0,$$

qui admet une racine nulle pour $x = y = z = 0$. Cette racine a pour expression

$$U = \frac{\rho^2}{4(\rho + 2M)} - \frac{\rho^2}{4(\rho + 2M)} \sqrt{\frac{1 - \frac{x+y+z}{\alpha}}{1 - \frac{x+y+z}{r}}},$$

en posant $\alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho + 4M}\right)^2$.

Cette racine peut être développée en série entière convergente, tant que les valeurs absolues de x, y, z ne dépassent pas $\frac{\alpha}{3}$. Les séries (48) sont donc convergentes entre ces limites.

Soient u_1 et v_1 les solutions développables des équations (47). Si l'on pose $u = u_1 + u'$, $v = v_1 + v'$ et qu'on substitue dans les équations (47), puis qu'on ordonne suivant les puissances de x, y, z, u', v', tous les termes devront contenir u' ou v' en facteur. Il s'ensuit qu'en revenant aux variables x, y, z, u, v, les équations proposées peuvent s'écrire

$$(47)' \qquad \begin{cases} (u - u_1)f + (v - v_1)\varphi = 0, \\ (u - u_1)f_1 + (v - v_1)\varphi_1 = 0, \end{cases}$$

f, φ, f_1, φ_1 étant aussi des séries entières en x, y, z, u, v. Les solutions $u = u_1$, $v = v_1$ sont ainsi mises en évidence; mais on voit de plus qu'il n'y a pas d'autres solutions s'annulant pour $x = y = z = 0$. En effet, toute autre solution des équations (47)' doit annuler $f\varphi_1 - \varphi f_1$; or, en comparant les équations (47) et (47)', on voit que le terme constant dans f et φ_1 est égal à l'unité, tandis qu'il est nul dans f_1 et φ. On ne peut donc pas satisfaire à l'équation $f\varphi_1 - \varphi f_1 = 0$ en prenant pour u et v des fonctions qui s'annulent pour $x = y = z = 0$.

189. Formule de Lagrange. — Soit

$$(49) \qquad y = a + x\varphi(y)$$

une équation où la fonction $\varphi(y)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $y - a$, tant que la valeur absolue de $y - a$ ne dépasse pas une certaine limite,

$$\varphi(y) = \varphi(a) + (y - a)\varphi'(a) + \frac{(y-a)^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots;$$

d'après le théorème général du n° 187, cette équation admet une racine, et

une seule, qui tend vers a lorsque x tend vers zéro, et cette racine est représentée, pour les valeurs de x suffisamment petites, par la somme d'une série entière convergente

$$y = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Plus généralement, si $f(y)$ est une fonction développable suivant les puissances positives de $y - a$, après y avoir remplacé y par le développement précédent, on aura pour $f(y)$ un développement ordonné suivant les puissances de x, qui sera encore valable pour les valeurs de x comprises entre certaines limites,

$$(50)\qquad f(y) = f(a) + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

Le but de la formule de Lagrange est précisément de donner l'expression des coefficients A_1, A_2, ... A_n, ..., en fonction de a. Remarquons que ce problème n'est pas essentiellement distinct du problème général; le coefficient A_n est, au facteur $n!$ près, la dérivée $n^{\text{ième}}$, pour $x = 0$, de $f(y)$, y étant définie par l'équation (49), et cette dérivée peut être calculée par l'application des règles connues. Le calcul paraît compliqué, mais on l'abrège beaucoup, grâce aux remarques suivantes de Laplace (*voir* Ex. n° 8, Chap. II). Les dérivées partielles de la fonction y définie par l'équation (49), par rapport aux variables x et a, sont données par les formules

$$[1 - x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y), \qquad [1 - x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a} = 1;$$

on en déduit immédiatement la relation

$$(51)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y)\,\frac{\partial u}{\partial a},$$

en posant $u = f(y)$. D'autre part, $F(y)$ étant une fonction quelconque de y, on vérifie immédiatement par la différentiation que l'on a

$$(51^{bis})\qquad \frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right],$$

car chacune des dérivées développée a pour expression

$$F'(y)f'(y)\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial x} + F(y)\frac{\partial^2 u}{\partial a\,\partial x}.$$

Cela posé, nous allons montrer que l'on a, quel que soit le nombre entier n,

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

La loi est vraie pour $n = 1$, d'après la formule (51); pour établir qu'elle est générale, supposons-la établie pour une certaine valeur de n. On en

déduit

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial a^{n-1}\partial x}\left[\varphi(y)^n \frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

Mais on peut écrire, en utilisant les relations (51) et (51bis),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(y)^n \frac{\partial u}{\partial a}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(y)^n \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(y)^{n+1} \frac{\partial u}{\partial a}\right];$$

on a donc bien

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\varphi(y)^{n+1} \frac{\partial u}{\partial a}\right],$$

et la formule est vraie pour toute valeur de n.

Supposons maintenant $x = 0$; y se réduit à a, u à $f(a)$ et la dérivée $n^{\text{ième}}$ de u par rapport à x devient

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi(a)^n f'(a)].$$

La formule de Taylor nous donne donc pour le développement de $f(y)$

$$(52)\quad \begin{cases} f(y) = f(a) + x\varphi(a)f'(a) + \dfrac{x^2}{1.2}\dfrac{d}{da}[\varphi(a)^2 f'(a)] + \ldots \\ \qquad + \dfrac{x^n}{n!}\dfrac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi(a)^n f'(a)] + \ldots . \end{cases}$$

Telle est la formule célèbre due à Lagrange; elle donne l'expression de la racine y qui tend vers a lorsque x tend vers zéro. Nous verrons plus tard entre quelles limites cette formule est applicable.

Remarque. — Il résulte aussi du théorème général que la racine y, considérée comme fonction de x et de a, peut être représentée par une série double ordonnée suivant les puissances de x et de a. On obtiendrait cette série double en remplaçant chacun des coefficients A_n par son développement suivant les puissances de a. On déduit de là qu'il est permis de différentier terme à terme la série (52) par rapport au paramètre a.

Exemples. — 1° L'équation

$$(53)\qquad y = a + \frac{x}{2}(y^2 - 1)$$

admet une racine égale à a pour $x = 0$. La formule de Lagrange donne pour le développement de cette racine

$$(54)\quad \begin{cases} y = a + \dfrac{x}{2}(a^2 - 1) + \dfrac{1}{1.2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \dfrac{d(a^2-1)^2}{da} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{1}{1.2\ldots n}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n \dfrac{d^{n-1}(a^2-1)^n}{da^{n-1}} + \ldots; \end{cases}$$

d'autre part, en résolvant l'équation (53), on a pour expression des

racines

$$y = \frac{1}{x} \pm \frac{1}{x}\sqrt{1 - 2ax + x^2},$$

et, pour avoir la racine égale à a pour $x = 0$, il faut prendre le signe —. En différentiant par rapport à la variable a les deux membres de l'équation (54), on parvient à une formule qui ne diffère que par les notations de la formule (32) obtenue plus haut (n° 184).

2° L'équation de Képler

$$(55)\qquad u = a + e \sin u$$

admet la racine $u = a$ pour $e = 0$. La formule de Lagrange donne pour le développement de la racine qui tend vers a

$$(56)\quad u = a + e \sin a + \frac{e^2}{1.2}\frac{d}{da}(\sin^2 a) + \ldots + \frac{e^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}(\sin^n a)}{da^{n-1}} + \ldots.$$

Laplace a démontré le premier, par une analyse savante, que la série précédente est convergente pourvu que e soit inférieur à la limite 0,662743....

190. Inversion. — Soit

$$(57)\qquad y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une série convergente dans l'intervalle $(-r, +r)$, où le premier coefficient a_1 n'est pas nul. Si l'on considère dans l'équation (57) y comme la variable indépendante, et x comme une fonction de y, cette équation admet, d'après le théorème général (n° 187), une racine et une seule qui tend vers zéro avec y, et cette racine est développable en série ordonnée suivant les puissances de y

$$(58)\qquad x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots + b_n y^n + \ldots.$$

Les coefficients $b_1, b_2, b_3, \ldots$ se déterminent aisément de proche en proche en remplaçant x par son développement dans la formule (57) et écrivant qu'on a une identité. On trouve ainsi

$$b_1 = \frac{1}{a_1},\qquad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3},\qquad b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5},\qquad \ldots;$$

on peut aussi obtenir l'expression générale des coefficients b_n au moyen de la formule de Lagrange. Si l'on pose en effet

$$\psi(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots,$$

l'équation (57) peut s'écrire

$$x = y\,\frac{1}{\psi(x)},$$

et la formule de Lagrange donne, pour le développement de la racine qui

s'annule avec y,

$$x = y\frac{1}{\psi(0)} + \ldots + \frac{y^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)_0^n + \ldots,$$

l'indice 0 indiquant qu'on remplace x par 0 après les différentiations.

Le problème précédent était connu autrefois sous le nom de problème du *retour des suites*.

191. Fonctions analytiques. — Nous appellerons par la suite *fonction analytique* toute fonction d'un nombre quelconque de variables $x, y, z, \ldots$, qui, dans le voisinage d'un système de valeurs $x_0, y_0, z_0, \ldots$, peut être développée en série entière ordonnée suivant les puissances de $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$, et convergente tant que les valeurs absolues de ces différences ne dépassent pas certaines limites (les valeurs x_0, y_0, z_0 pouvant d'ailleurs être soumises à certaines restrictions, que nous n'examinerons pas ici). De l'étude qui vient d'être faite dans ce Chapitre, il résulte que ces fonctions naissent en quelque sorte les unes des autres. Étant données une ou plusieurs fonctions analytiques, l'intégration ou la différentiation, et les opérations algébriques, telles que multiplication, division, combinaison par substitution, etc., conduisent à de nouvelles fonctions analytiques. Il en est de même des fonctions obtenues par la résolution d'équations dont les premiers membres sont analytiques. Or les fonctions les plus simples, comme les polynomes, l'exponentielle et les fonctions circulaires, étant analytiques, on s'explique aisément comment les premières fonctions étudiées par les géomètres ont été nécessairement des fonctions analytiques, et l'importance de ces fonctions apparaîtra encore mieux dans l'étude des fonctions d'une variable imaginaire et des équations différentielles. Mais, malgré le rôle fondamental des fonctions analytiques, on ne doit point oublier qu'elles ne forment en définitive qu'un groupe tout particulier dans l'ensemble des fonctions continues ([1]).

192. Courbes planes. — Soit AB un arc de courbe plane. Nous dirons que AB est un *arc de courbe analytique* si, dans le voisi-

([1]) On verra, dans le second Volume, des exemples de fonctions non analytiques, pour lesquelles la suite des dérivées est illimitée dans un intervalle (a, b).

nage de tout point M_0 de cet arc, les coordonnées (x, y) d'un point variable M peuvent être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances d'un paramètre $t - t_0$, et convergentes tant que la valeur absolue de $t - t_0$ ne dépasse pas une certaine limite

$$(59) \quad \begin{cases} x = \varphi(t) = x_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \ldots + a_n(t - t_0)^n + \ldots \\ y = \psi(t) = y_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \ldots + b_n(t - t_0)^n + \ldots \end{cases}$$

Un point $M_0(x_0, y_0)$ d'une courbe analytique est dit un *point ordinaire* si, dans le voisinage de ce point, l'une des différences $y - y_0$, $x - x_0$ peut être représentée par une série convergente ordonnée suivant les puissances positives et croissantes de la seconde différence. Supposons, par exemple, que pour les valeurs de x comprises entre $x_0 - h$ et $x_0 + h$, $y - y_0$ soit développable suivant les puissances de $x - x_0$

$$(60) \quad y - y_0 = c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots;$$

le point (x_0, y_0) est un point ordinaire, et il est facile de remplacer la formule (60) par deux formules de la forme (59) : il n'y a qu'à poser

$$(61) \quad \begin{cases} x = x_0 + t - t_0, \\ y = y_0 + c_1(t - t_0) + \ldots + c_n(t - t_0)^n + \ldots. \end{cases}$$

Si c_1 n'est pas nul, ce qui est le cas général, on peut inversement tirer de l'équation (60) un développement de $x - x_0$ suivant les puissances de $y - y_0$, valable pour les valeurs de $y - y_0$ dont la valeur absolue ne dépasse pas une certaine limite. Chacune des deux différences $x - x_0$, $y - y_0$ peut donc être représentée par une série convergente ordonnée suivant les puissances de l'autre. Il n'en est plus de même si le premier coefficient c_1 est nul, c'est-à-dire si la tangente est parallèle à Ox; on tire alors de la formule (60) un développement de $x - x_0$ suivant les puissances fractionnaires de $y - y_0$, comme on va le voir un peu plus loin. On verrait de même qu'en un point ordinaire où la tangente est parallèle à Oy, $x - x_0$ peut être développée suivant les puissances de $y - y_0$, mais la réciproque n'a pas lieu.

Si, dans le voisinage d'un point M_0, les coordonnées x, y sont représentées par les formules (59), ce point est un point ordinaire pourvu que l'un au moins des coefficients a_1, b_1 soit différent de

zéro. Si, par exemple, a_1 n'est pas nul, on tirera de la première formule un développement de $t - t_0$ suivant les puissances de $x - x_0$ et, en portant cette valeur de $t - t_0$ dans la seconde formule, on obtiendra le développement de $y - y_0$ suivant les puissances de $x - x_0$.

Observons encore qu'en un point ordinaire une courbe ne peut présenter que deux aspects différents : elle peut avoir la forme habituelle, ou avoir une inflexion. Tout point non ordinaire est dit un *point singulier*. Si un arc de courbe analytique ne présente pas de points singuliers, on dit que c'est un *arc régulier*.

Supposons que, dans les formules (59), les deux coefficients a_1 et b_1 soient nuls, mais que a_2, par exemple, soit différent de zéro. La première des formules (59) peut s'écrire

$$(x - x_0)^{\frac{1}{2}} = (t - t_0)[a_2 + a_3(t - t_0) + \ldots]^{\frac{1}{2}},$$

et le second membre est développable en série suivant les puissances de $t - t_0$. On déduira donc inversement de cette relation un développement de $t - t_0$ suivant les puissances de $(x - x_0)^{\frac{1}{2}}$, et, en portant cette expression de $t - t_0$ dans la seconde des formules (59), on obtiendra pour y un développement de la forme

$$y - y_0 = c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^{\frac{3}{2}} + c_3(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Le point (x_0, y_0) est en général un point de rebroussement de première espèce.

Le raisonnement est général. Si le développement de $x - x_0$ suivant les puissances de $t - t_0$ commence par un terme de degré n, on en déduira pour $y - y_0$ un développement suivant les puissances de $(x - x_0)^{\frac{1}{n}}$. On peut observer que, dans le voisinage du point (x_0, y_0), une courbe représentée par des développements tels que (59) ne peut présenter que quatre aspects différents : point ordinaire, point d'inflexion, point de rebroussement de première ou de deuxième espèce.

193. Courbes gauches. — Un arc de courbe gauche AB est dit *analytique* si, dans le voisinage de tout point M_0 de cet arc, les coordonnées x, y, z d'un point variable M peuvent être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances d'un

paramètre $t - t_0$

$$(62)\qquad \begin{cases} x = x_0 + a_1(t-t_0) + \ldots + a_n(t-t_0)^n + \ldots, \\ y = y_0 + b_1(t-t_0) + \ldots + b_n(t-t_0)^n + \ldots, \\ z = z_0 + c_1(t-t_0) + \ldots + c_n(t-t_0)^n + \ldots. \end{cases}$$

Un point M_0 est un point ordinaire si deux des trois différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ peuvent être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances de la troisième.

On démontre comme plus haut que le point M_0 est un point ordinaire pourvu qu'un des trois coefficients a_1, b_1, c_1 ne soit pas nul. On obtiendra donc les points singuliers en cherchant les points pour lesquels on a à la fois

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point M_0 d'une courbe gauche Γ représentée par un système de deux équations

$$(63)\qquad F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0,$$

dont les premiers membres sont des séries entières en $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Ce point M_0 est un point ordinaire pourvu que les trois déterminants fonctionnels

$$\frac{D(F, F_1)}{D(x, y)}, \quad \frac{D(F, F_1)}{D(y, z)}, \quad \frac{D(F, F_1)}{D(z, x)}$$

ne soient pas nuls à la fois pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Si, par exemple, le déterminant $\frac{D(F, F_1)}{D(x, y)}$ n'est pas nul au point M_0, on tirera des équations (63) des développements en séries entières pour $x - x_0$ et $y - y_0$, ordonnées suivant les puissances de $z - z_0$ (n° **188**).

194. Surfaces. — Une portion de surface S est analytique si, dans le voisinage de tout point M_0 de cette surface, les coordonnées x, y, z, d'un point variable M peuvent être développées en séries entières à deux paramètres variables $t - t_0$, $u - u_0$,

$$(64)\qquad \begin{cases} x - x_0 = a_{10}(t-t_0) + a_{01}(u-u_0) + \ldots, \\ y - y_0 = b_{10}(t-t_0) + b_{01}(u-u_0) + \ldots, \\ z - z_0 = c_{10}(t-t_0) + c_{01}(u-u_0) + \ldots, \end{cases}$$

ces séries restant convergentes tant que les valeurs absolues des différences $t - t_0$, $u - u_0$ ne dépassent pas certaines limites. Un point M_0 de la surface S est un point ordinaire si, dans le voisinage de ce point, une des trois différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ peut être développée en série entière ordonnée suivant les puissances entières des deux autres. Tout point M_0 pour lequel les trois déterminants

$$\frac{D(y, z)}{D(t, u)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(t, u)}, \quad \frac{D(x, y)}{D(t, u)}$$

ne sont pas nuls à la fois, est un point ordinaire; si l'on suppose, par exemple, que le premier déterminant ne soit pas nul, on peut, des deux dernières équations (64), tirer $t - t_0$ et $u - u_0$, et, en portant les valeurs obtenues dans la première, on obtient un développement de $x - x_0$ suivant les puissances de $y - y_0$ et de $z - z_0$.

Étant donnée une surface S représentée par une équation non résolue $F(x, y, z) = 0$, soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point M_0 de cette surface. Si la fonction F est développable en série entière ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, sans que les trois dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$, $\frac{\partial F}{\partial z_0}$ soient nulles à la fois, il résulte du théorème général (n° 188) que le point M_0 est un point ordinaire.

Remarque. — La définition adoptée pour un point ordinaire d'une courbe et d'une surface est indépendante du choix des axes. Supposons, par exemple, que le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ soit un point ordinaire d'une surface S; les coordonnées d'un point voisin sont données alors par des formules de la forme (64), où les trois déterminants $\frac{D(y, z)}{D(t, u)}$, $\frac{D(z, x)}{D(t, u)}$, $\frac{D(x, y)}{D(t, u)}$ ne sont pas nuls à la fois pour $t = t_0$, $u = u_0$. Une transformation de coordonnées revient à remplacer les variables x, y, z par trois nouvelles variables X, Y, Z, fonctions linéaires des premières, telles que

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1, \\ Y &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2, \\ Z &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3, \end{aligned}$$

le déterminant $\Delta = \dfrac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$ n'étant pas nul. En remplaçant x, y, z par leurs développements (64), on obtiendra pour X, Y, Z trois nouveaux développements de même forme, et l'on ne peut avoir

$$\frac{D(X, Y)}{D(t, u)} = \frac{D(Y, Z)}{D(t, u)} = \frac{D(Z, X)}{D(t, u)} = 0,$$

pour $t = t_0$, $u = u_0$, car on déduit des formules de transformation

$$\begin{aligned} x &= A_1 X + B_1 Y + C_1 Z + D_1, \\ y &= A_2 X + B_2 Y + C_2 Z + D_2, \\ z &= A_3 X + B_3 Y + C_3 Z + D_3, \end{aligned}$$

et les trois déterminants fonctionnels obtenus avec les variables X, Y, Z ne pourraient être nuls à la fois sans qu'il en fût de même des trois déterminants formés avec les variables x, y, z.

IV. — SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES. — SÉRIES DIVERSES.

195. Calcul des coefficients. — Nous allons nous occuper, dans les paragraphes suivants, de séries d'une nature tout à fait différente des précédentes. Les séries trigonométriques paraissent avoir été considérées, pour la première fois, par D. Bernoulli, à propos du problème des cordes vibrantes; le procédé de détermination des coefficients, que nous allons indiquer, est dû à Euler.

Soit $f(x)$ une fonction bien déterminée de la variable x dans un intervalle (a, b); nous supposerons d'abord que les limites a et b sont $-\pi$ et $+\pi$, ce qu'on peut toujours faire, car il suffira de prendre pour nouvelle variable $\dfrac{2\pi x - (a+b)\pi}{b-a}$ pour être ramené à ce cas. Cela posé, si pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\pi$ et $+\pi$, on a l'égalité ci-dessous

$$(65)\qquad \left\{ \begin{aligned} f(x) = \frac{a_0}{2} &+ (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots \\ &+ (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

a_0, a_1, b_1, ..., a_m, b_m, ..., étant des coefficients constants inconnus, l'artifice suivant s'offre tout naturellement pour déter-



miner ces coefficients. Rappelons d'abord les formules suivantes, qu'il suffit d'écrire, où m et n sont des nombres entiers positifs,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\, dx = 0, \quad \text{si } m \neq 0, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx\, dx = 0,$$

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x}{2}\, dx = 0, \quad \text{si } m \neq n, \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1+\cos 2mx}{2}\, dx = \pi, \quad \text{si } m \neq 0, \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2}\, dx = 0, \quad \text{si } m \neq n. \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-\cos 2mx}{2}\, dx = \pi, \quad \text{si } m \neq 0, \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2}\, dx = 0. \end{aligned} \right.$$

Si nous intégrons les deux membres de l'égalité (65) entre les limites $-\pi$ et $+\pi$, en intégrant le second membre terme à terme, il vient

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} dx = \pi a_0,$$

égalité d'où l'on tirera la valeur de a_0. Si l'on opère de même après avoir multiplié les deux membres de la relation (65) par $\cos mx$ ou $\sin mx$, le seul terme du second membre dont l'intégration entre les limites $-\pi$ et $+\pi$ donnera un résultat différent de zéro sera le terme en $\cos^2 mx$ ou en $\sin^2 mx$, et l'on parvient aux formules suivantes

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx\, dx = \pi a_m, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin mx\, dx = \pi b_m.$$

Nous pouvons encore écrire les valeurs obtenues pour les coefficients

$$(67)\quad \left\{ \begin{aligned} &a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha, \qquad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos m\alpha\, d\alpha, \\ &b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin m\alpha\, d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Le calcul que nous venons de faire n'a que la valeur d'une simple induction. Nous avons admis, en effet, que le développement de la fonction $f(x)$ sous la forme (65) était possible et, en outre, que ce développement était uniformément convergent entre les limites $-\pi$ et $+\pi$. Comme rien ne prouve *a priori* que ces conditions sont satisfaites, il est indispensable d'examiner si la série ainsi obtenue est convergente et a pour somme $f(x)$. La somme des $(m+1)$ premiers termes de cette série devient, en remplaçant les coefficients a_i et b_i par leurs valeurs (67) et effectuant les réductions évidentes,

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \ldots + \cos m(\alpha - x)\right] d\alpha.$$

Mais on a, d'après une formule bien connue de Trigonométrie,

$$\frac{1}{2} + \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos ma = \frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}a}{2\sin\dfrac{a}{2}},$$

et, par suite,

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\dfrac{\alpha - x}{2}}\,d\alpha,$$

ce que nous pouvons encore écrire, en posant $\alpha = x + 2y$,

$$(68)\qquad S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\,\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy.$$

Toute la difficulté de la question est ramenée à trouver la limite de cette somme lorsque le nombre entier m augmente indéfiniment. Nous supposerons pour cela que la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions suivantes :

1° Elle est en général continue entre $-\pi$ et $+\pi$, sauf pour un nombre *fini* de valeurs de x, où elle passe brusquement d'une valeur à une autre de la façon suivante. Soit c un nombre quelconque compris entre $-\pi$ et $+\pi$; quel que soit ce nombre c, on peut toujours trouver un autre nombre positif h tel que $f(x)$ soit continue entre $c-h$ et c d'une part, entre c et $c+h$ d'autre part. Lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives, $f(c+\varepsilon)$ tend vers

une limite $f(c+0)$, et $f(c-\varepsilon)$ tend de même vers une limite $f(c-0)$. Si la fonction $f(x)$ est continue pour $x=c$, on a évidemment $f(c)=f(c+0)=f(c-0)$. Mais si les deux limites $f(c+0)$ et $f(c-0)$ ont des valeurs différentes, la fonction $f(x)$ est discontinue pour $x=c$, et l'on convient de prendre pour $f(c)$ la moyenne arithmétique $\frac{f(c+0)+f(c-0)}{2}$; il est clair que cette égalité subsiste pour un point où la fonction est continue. Nous supposons de même que $f(-\pi+\varepsilon)$ et $f(\pi-\varepsilon)$ ont des limites $f(-\pi+0)$ et $f(\pi-0)$ lorsque ε tend vers zéro en restant positif. La courbe représentée par l'équation $y=f(x)$ doit avoir une forme analogue à celle de la *fig.* 11 (p. 179), s'il y a des discontinuités. Nous avons vu que la fonction $f(x)$ était intégrable dans tout intervalle compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et il en est évidemment de même du produit de $f(x)$ par une fonction continue dans le même intervalle.

2° On peut partager l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ en un nombre fini d'intervalles, dans chacun desquels la fonction est constamment croissante ou constamment décroissante.

Nous dirons, pour abréger, que la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet entre $-\pi$ et $+\pi$. Il est clair qu'une fonction continue dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, et qui n'admet qu'un nombre fini de maxima et de minima dans cet intervalle, satisfait aux conditions de Dirichlet.

196. Étude de l'intégrale $\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$. — L'expression obtenue pour la somme S_{m+1} conduit à chercher la limite de l'intégrale définie

$$\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx,$$

lorsque n augmente indéfiniment. Cette étude a été faite pour la première fois d'une façon entièrement rigoureuse par Lejeune-Dirichlet [1]. Nous suivrons à peu près la méthode de M. O. Bonnet [2].

---

(1) *Journal de Crelle*, t. IV; 1829.

(2) *Mémoires des savants étrangers* publiés par l'Académie de Belgique, t. XXIII.

Considérons d'abord l'intégrale définie

(69) $$J = \int_0^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx,$$

où h est un nombre positif inférieur à π et $\varphi(x)$ une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet dans l'intervalle $(0, h)$. Si $\varphi(x)$ se réduit à une constante C, il est facile de trouver la limite de J; on peut écrire, en effet, en posant $nx = y$,

$$J = C \int_0^{nh} \frac{\sin y}{y} dy,$$

et, lorsque n augmente indéfiniment, la limite de J est par conséquent $\frac{\pi}{2}$ C (n° 176, formule 39).

Supposons en second lieu que la fonction $\varphi(x)$ soit positive et décroissante de 0 à h. La fonction sous le signe $\int$ change de signe pour les valeurs de x de la forme $\frac{k\pi}{n}$, et nous pouvons écrire l'intégrale J

$$J = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^k u_k + \ldots + (-1)^m \theta u_m \qquad (0 < \theta < 1),$$

en posant

$$u_k = \left| \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx \right|,$$

et en supposant la limite supérieure h comprise entre $\frac{m\pi}{n}$ et $\frac{(m+1)\pi}{n}$. Les intégrales u_0, u_1, u_2, ... vont en diminuant; si nous posons, en effet, dans u_k, $nx = k\pi + y$, il vient

$$u_k = \int_0^{\pi} \varphi\left(\frac{y + k\pi}{n}\right) \frac{\sin y}{y + k\pi} dy,$$

et il est évident, d'après les hypothèses faites sur $\varphi(x)$, que cette intégrale diminue lorsque l'indice k augmente. On a donc

$$J = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \ldots,$$
$$J = u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots,$$

ce qui montre que J est compris entre u_0 et $u_0 - u_1$; J est par suite un nombre positif inférieur à u_0, c'est-à-dire à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Mais cette intégrale est elle-même inférieure à l'intégrale

$$\varphi(+0) \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin nx}{x} dx = \varphi(+0) \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = A\varphi(+0),$$

A désignant la dernière intégrale définie $\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy$.

Le même raisonnement prouve que l'intégrale définie

$$J' = \int_c^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx,$$

où c est un nombre positif quelconque inférieur à h, tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Si le nombre c est compris entre $(i-1)\frac{\pi}{n}$ et $\frac{i\pi}{n}$, on voit en effet comme tout à l'heure que la valeur absolue de J′ est inférieure à

$$\left|\int_c^{\frac{i\pi}{n}} \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx\right| + \left|\int_{\frac{i\pi}{n}}^{\frac{(i+1)\pi}{n}} \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx\right|$$

et, à plus forte raison, inférieure à

$$\frac{\varphi(c)}{c}\left(\frac{i\pi}{n} - c\right) + \frac{\varphi\left(\frac{i\pi}{n}\right)}{\frac{i\pi}{n}} \frac{\pi}{n} < \frac{2\pi}{n} \frac{\varphi(c)}{c};$$

elle tend donc vers zéro lorsque n augmente indéfiniment (¹).

La méthode ne nous apprend rien si $c = 0$. Pour trouver la

(¹) On arrive encore plus simplement à ce résultat en employant le second théorème de la moyenne (n° 75). La fonction $\varphi(x)$ étant décroissante, on a, d'après cette formule,

$$\int_c^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\varphi(c)}{c} \int_c^{\xi} \sin nx\, dx = \frac{1}{n} \frac{\varphi(c)}{c} (\cos nc - \cos n\xi),$$

et le second membre tend évidemment vers zéro.

limite de l'intégrale J, prenons un nombre c compris entre o et h, tel que $\varphi(x)$ soit continue de o à c, et posons $\varphi(x) = \varphi(c) + \psi(x)$; $\psi(x)$ est une fonction positive et décroissante dans l'intervalle $(0, c)$, décroissant de $\varphi(+0) - \varphi(c)$ à zéro lorsque x croît de o à c. Écrivons J de la façon suivante

$$J = \varphi(c)\int_0^c \frac{\sin nx}{x}\,dx + \int_0^c \psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx + \int_c^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

ou, en retranchant $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$ des deux membres,

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} J - \frac{\pi}{2}\varphi(+0) = \varphi(c)\left[\int_0^c \frac{\sin nx}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}\right] + \frac{\pi}{2}[\varphi(c) - \varphi(+0)] \\ + \int_0^c \psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx + \int_c^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Pour démontrer que J a pour limite $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$, il suffit de prouver que l'on peut déterminer un nombre entier m tel que, pour toute valeur de n supérieure à m, la valeur absolue de chacun des termes du second membre soit inférieure à un nombre positif choisi à l'avance $\frac{\varepsilon}{4}$. D'après la remarque de tout à l'heure, la valeur absolue de l'intégrale

$$\int_0^c \psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx$$

est inférieure à $A\psi(+0) = A[\varphi(+0) - \varphi(c)]$. Puisque $\varphi(x)$ tend vers $\varphi(+0)$ lorsque x tend vers zéro, on peut d'abord choisir le nombre c assez voisin de zéro pour que $A[\varphi(+0) - \varphi(c)]$ et $\frac{\pi}{2}[\varphi(+0) - \varphi(c)]$ soient inférieurs à $\frac{\varepsilon}{4}$. Le nombre c étant choisi de cette façon, les deux termes restants ont pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment. On peut donc prendre n assez grand pour qu'ils soient inférieurs en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{4}$, et l'on a

$$(71)\qquad \lim_{n=\infty} J = \frac{\pi}{2}\varphi(+0).$$

La formule précédente n'a été démontrée qu'en imposant à la fonction $\varphi(x)$ un certain nombre de restrictions dont nous allons maintenant nous débarrasser. Si $\varphi(x)$ est décroissante sans être

positive, on peut toujours lui ajouter une constante positive C de façon que la somme $\psi(x) = \varphi(x) + C$ soit positive et décroissante de o à h. La formule s'applique à cette fonction $\psi(x)$ et l'on peut écrire

$$\int_0^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx = \int_0^h \psi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx - C\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\, dx;$$

le second membre a pour limite $\frac{\pi}{2}\psi(+0) - \frac{\pi}{2}C$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$. Si la fonction $\varphi(x)$ est croissante de o à h, $-\varphi(x)$ est décroissante et l'on a

$$\int_0^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx = -\int_0^h - \varphi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx;$$

l'intégrale a encore pour limite $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$.

Supposons enfin simplement que la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet dans l'intervalle $(0, h)$. Nous pouvons partager cet intervalle en un nombre fini d'intervalles partiels $(0, a)$, (a, b), (b, c), ..., (l, h) dans chacun desquels la fonction $\varphi(x)$ est croissante ou décroissante. L'intégrale de o à a a pour limite $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$; quant aux autres intégrales, telles que

$$H = \int_a^b \varphi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

elles tendent toutes vers zéro. Supposons, pour fixer les idées, la fonction $\varphi(x)$ croissante de a à b; nous pouvons, d'une infinité de manières, construire une fonction $\psi(x)$ croissante de o à b, continue de o à a, et coïncidant avec $\varphi(x)$ de a à b. Les deux intégrales

$$\int_0^a \psi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx, \quad \int_0^b \psi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx$$

ont l'une et l'autre pour limite $\psi(+0)$ lorsque n augmente indéfiniment; leur différence, qui n'est autre que H, tend par conséquent vers zéro. La formule (71) est donc établie pour toutes les fonctions $\varphi(x)$ qui satisfont aux conditions de Dirichlet dans l'intervalle $(0, h)$.

Considérons maintenant l'intégrale définie

(72) $$I = \int_0^h f(x) \frac{\sin n x}{\sin x} dx \qquad (0 < h < \pi),$$

où la fonction $f(x)$ est positive et croissante de 0 à h. On peut encore écrire cette intégrale

$$I = \int_0^h \left[f(x) \frac{x}{\sin x} \right] \frac{\sin n x}{x} dx,$$

et la fonction $\varphi(x) = f(x) \frac{x}{\sin x}$ est positive et croissante de 0 à h; on a d'ailleurs $f(+0) = \varphi(+0)$ et, par conséquent,

(73) $$\lim_{n=\infty} I = \frac{\pi}{2} f(+0).$$

La formule étant établie lorsque la fonction $f(x)$ est positive et croissante de 0 à h, on démontre ensuite de proche en proche, comme tout à l'heure, qu'elle subsiste pour toute fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions de Dirichlet dans l'intervalle $(0, h)$.

197. Séries de Fourier. — Les séries trigonométriques dont les coefficients a_m et b_m sont déterminés par les formules (67) sont généralement appelées *séries de Fourier*. C'est, en effet, Fourier qui a énoncé le premier ce théorème que toute fonction *donnée arbitrairement* dans un intervalle d'étendue 2π pouvait être représentée par une série de cette espèce; le mot *fonction arbitraire* signifiait pour lui une fonction représentée graphiquement par plusieurs arcs de courbe appartenant à des courbes que l'on regarde habituellement comme distinctes. Nous précisons cette définition un peu vague en nous bornant aux fonctions qui satisfont aux conditions de Dirichlet.

Pour démontrer qu'une fonction de cette espèce peut être représentée par une série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, il nous faut trouver la limite de l'intégrale (68) lorsque m augmente indéfiniment. Partageons cette intégrale en deux autres, ayant respectivement pour limites 0 et $\frac{\pi - x}{2}$, $-\frac{\pi + x}{2}$ et 0, et

posons dans la seconde $y = -z$, nous pouvons encore écrire

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}\,dz.$$

Si x est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, $\frac{\pi-x}{2}$ et $\frac{\pi+x}{2}$ sont compris entre o et π et, d'après les résultats du numéro précédent, le second membre a pour limite, lorsque m augmente indéfiniment,

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}f(x+0)+\frac{\pi}{2}f(x-0)\right] = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

la série est donc convergente et a pour somme $f(x)$, pour toute valeur de x comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Supposons maintenant que x soit égal à l'une des limites, $-\pi$ par exemple. On peut écrire

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy. \end{aligned}$$

La première intégrale du second membre a pour limite

$$\frac{1}{2}f(-\pi+0);$$

la seconde intégrale devient, en remplaçant y par $\pi - z$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}\,dz,$$

et a pour limite $\frac{1}{2}f(\pi-0)$. La somme de la série trigonométrique est donc égale à $\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$ pour $x=-\pi$; il est clair que la somme est la même pour $x=\pi$.

Si, au lieu de considérer x comme une longueur portée sur une

droite, on considère x comme un arc porté sur la circonférence de rayon *un*, la somme de la série en un point quelconque m de la circonférence est la moyenne arithmétique des deux limites vers lesquelles tendent les deux sommes de la série en deux points m', m'' de la circonférence, pris de part et d'autre du point m, lorsque ces points m', m'' se rapprochent indéfiniment du point m. Si les deux valeurs limites $f(-\pi+0)$, $f(\pi-0)$ sont différentes, le point de la circonférence diamétralement opposé à l'origine des arcs est un point de discontinuité.

En résumé, *toute fonction définie dans l'intervalle* $(-\pi, +\pi)$ *et satisfaisant aux conditions de Dirichlet peut être représentée par une série de Fourier dans cet intervalle.*

D'une façon générale, soit $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle $(\alpha, \alpha+2\pi)$ d'étendue 2π, et satisfaisant aux conditions de Dirichlet. Il existe évidemment une fonction $F(x)$, et une seule, admettant la période 2π et coïncidant avec $f(x)$ dans l'intervalle $(\alpha, \alpha+2\pi)$; cette fonction $F(x)$ est représentée, pour toute valeur de x, par la somme d'une série trigonométrique dont les coefficients a_m et b_m sont donnés par les formules (67)

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos mx\,dx, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin mx\,dx.$$

Le coefficient a_m, par exemple, peut encore s'écrire, en supposant α compris entre $2h\pi-\pi$ et $2h\pi+\pi$,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha-2h\pi}^{\pi} F(x)\cos mx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\alpha-2h\pi} F(x)\cos mx\,dx;$$

la fonction $F(x)$ admettant la période 2π et coïncidant avec $f(x)$ dans l'intervalle $(\alpha, \alpha+2\pi)$, on a encore

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2h\pi+\pi} f(x)\cos mx\,dx + \int_{2h\pi+\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos mx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos mx\,dx. \end{aligned}\right.$$

On trouverait de même

$$(75)\qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin mx\,dx.$$

Lorsqu'une fonction $f(x)$ est donnée dans un intervalle quelconque d'étendue 2π, les formules précédentes permettent de calculer les coefficients du développement en série de Fourier, sans qu'il soit nécessaire de ramener les limites de l'intervalle à être $-\pi$ et $+\pi$.

198. *Exemples.* — 1° Proposons-nous de trouver une série de Fourier dont la somme soit égale à -1 pour x compris entre $-\pi$ et 0 et à -1 pour x compris entre 0 et π. Les formules (67) nous donnent

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} - dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 0,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} - \cos mx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos mx\, dx = 0,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} - \sin mx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin mx\, dx = \frac{2 - \cos m\pi - \cos(-m\pi)}{m\pi};$$

b_m est nul si m est pair, et égal à $\frac{4}{m\pi}$ si m est impair. En multipliant tous les coefficients par $\frac{\pi}{4}$, on voit que la série

$$(76)\qquad y = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1} + \ldots$$

a pour somme $-\frac{\pi}{4}$, si x est compris entre $-\pi$ et 0, et $+\frac{\pi}{4}$ si x est compris entre 0 et π. Le point $x = 0$ est un point de discontinuité, et, pour $x = 0$, la somme de la série est 0, comme cela doit être. D'une façon générale, la somme de la série (76) est égale à $\frac{\pi}{4}$ lorsque $\sin x$ est positif, à $-\frac{\pi}{4}$ lorsque $\sin x$ est négatif, et à 0 lorsque $\sin x = 0$.

La courbe représentée par l'équation (76) se compose d'une infinité de segments de droite de longueur π sur les parallèles $y = \pm\frac{\pi}{4}$ à l'axe des x, et d'une infinité de points isolés ($y = 0$, $x = k\pi$) sur l'axe des x.

2° Soit à trouver le développement de x en série de Fourier dans l'intervalle de 0 à 2π. On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\, dx = 2\pi,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x \cos mx\, dx = \left[\frac{x \sin mx}{m\pi}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{m\pi}\int_{0}^{2\pi} \sin mx\, dx = 0,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x \sin mx\, dx = -\left[\frac{x \cos mx}{m\pi}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{m\pi}\int_{0}^{2\pi} \cos mx\, dx = -\frac{2}{m}.$$

On déduit de là la formule

$$(77) \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \ldots,$$

qui est exacte pour toutes les valeurs de x comprises entre o et 2π. Si l'on remplace, dans la formule précédente, le premier membre par y, la courbe représentée par l'équation obtenue se compose d'une infinité de segments de droites parallèles à la droite $y = \frac{x}{2}$ et d'une infinité de points isolés.

Remarque. — Lorsqu'une fonction définie dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ est paire, c'est-à-dire telle que $f(-x) = f(x)$, tous les coefficients b_m sont nuls, car on a évidemment

$$\int_{-\pi}^{0} f(x) \sin mx\,dx = -\int_{0}^{\pi} f(x) \sin mx\,dx.$$

Au contraire, si la fonction $f(x)$ est impaire, c'est-à-dire telle que

$$f(-x) = -f(x),$$

tous les coefficients a_m sont nuls, y compris a_0. Une fonction $f(x)$ étant définie dans l'intervalle de o à π seulement, on peut la prolonger dans l'intervalle de $-\pi$ à o en convenant de poser

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{ou} \qquad f(-x) = -f(x).$$

La fonction $f(x)$ peut donc être représentée soit par une série de sinus, soit par une série de cosinus, dans l'intervalle de o à π.

199. Développement d'une fonction continue. Théorème de Weierstrass. — Soit $y = f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). On doit à M. Weierstrass une proposition remarquable dont voici l'énoncé : *ε étant un nombre positif donné à l'avance, on peut déterminer un polynome* $P(x)$ *tel que la différence* $f(x) - P(x)$ *soit inférieure à* ε *en valeur absolue pour toute valeur de x dans l'intervalle* (a, b).

Parmi les nombreuses démonstrations proposées pour ce théorème, une des plus simples est due à M. Lebesgue [1]. Considérons d'abord le cas particulier suivant. Soit $\psi(x)$ une fonction continue dans l'intervalle de -1 à $+1$, définie de la manière suivante : pour $-1 \leq x \leq 0$, on a $\psi(x) = 0$, et pour $0 \leq x \leq 1$, on a $\psi(x) = 2kx$, k étant un facteur constant donné. Nous pouvons écrire $\psi(x) = k[x + |x|]$. D'autre part, pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, on a

$$|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)},$$

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques* p. 278; 1898.

et, pour ces mêmes valeurs de x, le radical peut être développé en série *uniformément convergente* ordonnée suivant les puissances de $(1-x^2)$; $|x|$, et par suite $\psi(x)$, peut donc être représentée dans cet intervalle, avec telle approximation qu'on voudra, par un polynome. Prenons maintenant une fonction quelconque continue dans l'intervalle (a, b) et imaginons cet intervalle décomposé en n intervalles partiels (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a_n), où $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$, de façon que l'oscillation de $f(x)$ dans chacun de ces intervalles soit moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$. Soit L la ligne brisée obtenue en joignant de proche en proche les points de la courbe $y = f(x)$ d'abscisses a_0, a_1, a_2, ..., b. L'ordonnée d'un point de cette ligne brisée est évidemment une fonction continue de l'abscisse $\varphi(x)$ et la différence $f(x) - \varphi(x)$ est en valeur absolue moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$. En effet, dans l'intervalle $(a_{\mu-1}, a_\mu)$, par exemple, on peut écrire

$$f(x) - \varphi(x) = [f(x) - f(a_{\mu-1})][1-\theta] + [f(x) - f(a_\mu)]\theta,$$

où $x - a_{\mu-1} = \theta(a_\mu - a_{\mu-1})$. Le facteur θ étant positif et inférieur à l'unité, la différence $f - \varphi$ est moindre en valeur absolue que $\frac{\varepsilon}{2}(1 - \theta + \theta) = \frac{\varepsilon}{2}$. Cette fonction $\varphi(x)$ peut être décomposée en une somme de n fonctions analogues à la fonction $\psi(x)$ de tout à l'heure. Soient, en effet, A_0, A_1, A_2, ..., A_n les sommets consécutifs de la ligne polygonale L; $\varphi(x)$ est égale à la fonction continue ψ_1 représentée dans l'intervalle (a, b) par la droite qui porte le côté A_0A_1, plus une fonction φ_1 représentée par une ligne polygonale $A'_0A'_1 \ldots A'_n$ dont le premier côté $A'_0A'_1$ est sur l'axe Ox; $\varphi_1(x)$ est à son tour la somme de deux fonctions continues ψ_2 et φ_2 dont la première, ψ_2, est nulle entre a et a_1 et est représentée par la droite qui porte $A'_1A'_2$ entre a_1 et b, tandis que φ_2 est représentée par une ligne polygonale $A''_0A''_1A''_2 \ldots A''_n$ dont les sommets A''_0, A''_1, A''_2 sont sur Ox. On arrive finalement à remplacer $\varphi(x)$ par une somme de n fonctions $\varphi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n$, où ψ_i est une fonction continue nulle entre a et a_i, représentée par un segment de droite entre a_{i-1} et b. Si l'on fait le changement de variable $X = mx + n$, en choisissant convenablement m et n, ψ_i sera défini dans l'intervalle $(-1, +1)$ par l'égalité

$$\psi_i = k[X + |X|],$$

et par conséquent pourra être représentée par un polynome avec telle approximation que l'on voudra. Chacune des fonctions ψ_i pouvant être représentée par un polynome dans l'intervalle (a, b) avec une approximation inférieure à $\frac{\varepsilon}{2n}$, il est clair que la somme de ces polynomes différera de $f(x)$ de moins de ε.

De ce théorème on déduit que *toute fonction continue dans un intervalle (a, b) peut être représentée par une série uniformément con-*

vergente de polynomes dans cet intervalle. Prenons, en effet, une suite de nombres positifs décroissants $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ le terme général ε_n tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. D'après le théorème précédent, à chaque nombre ε_i de cette suite nous pouvons faire correspondre un polynome $P_i(x)$ tel que la différence $f(x) - P_i(x)$ soit inférieure en valeur absolue à ε_i dans tout l'intervalle (a, b). Cela étant, la série

$$P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + \ldots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)] + \ldots$$

est convergente et a pour somme $f(x)$, lorsque x reste compris dans l'intervalle (a, b). Il est clair, en effet, que la somme S_n des n premiers termes est égale à $P_n(x)$; la différence $f(x) - S_n$, qui est inférieure à ε_n, tend donc vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. D'ailleurs, la série est uniformément convergente, puisqu'en prenant n assez grand la différence $f(x) - S_n$ sera moindre qu'un nombre donné à l'avance pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle (a, b).

200. Fonction continue sans dérivée. — Nous terminerons ce Chapitre en donnant un exemple, dû à Weierstrass, de fonction continue qui n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable. Soient b une constante positive inférieure à l'unité et a un nombre entier impair; la fonction $F(x)$, qui est égale à la somme de la série convergente

$$(78) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x).$$

est continue pour toute valeur de x, car la série est uniformément convergente dans tout intervalle. Si le produit ab est inférieur à un, il en est de même de la série formée par les dérivées; la fonction $F(x)$ admet donc une dérivée, qui est elle-même une fonction continue. Nous allons démontrer qu'il en est tout autrement si le produit ab est supérieur à une certaine limite.

Nous pouvons écrire, en désignant par m un nombre entier quelconque,

$$(79) \qquad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = R_m + S_m,$$

en posant

$$R_m = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{m-1} b^n \{\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos(a^n \pi x)\},$$

$$S_m = \frac{1}{h} \sum_{n=m}^{+\infty} b^n \{\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos(a^n \pi x)\}.$$

La formule des accroissements finis appliquée à la fonction $\cos(a^n \pi x)$ montre que la différence $\cos[a^n \pi(x+h)] - \cos(a^n \pi x)$ est inférieure en

valeur absolue à $\pi a^n|h|$. La valeur absolue de R_m est donc inférieure à

$$\pi \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1},$$

et, *a fortiori*, à $\pi \frac{(ab)^m}{ab-1}$, si l'on suppose $ab > 1$. Nous chercherons maintenant une limite inférieure de la valeur absolue de S_m, en donnant à l'accroissement h une valeur particulière. On a toujours

$$a^m x = \alpha_m + \xi_m,$$

α_m étant un nombre entier et ξ_m étant compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. Nous poserons

$$h = \frac{e_m - \xi_m}{a^m},$$

e_m étant égal à ± 1; il est clair que h est du même signe que e_m, et inférieur en valeur absolue à $\frac{3}{2a^m}$. Le nombre h étant choisi de cette façon, on a

$$a^n \pi(x+h) = a^{n-m} a^m \pi(x+h) = a^{n-m}\pi(\alpha_m + e_m);$$

a étant impair et $e_m = \pm 1$, le produit $a^{n-m}(\alpha_m + e_m)$ est de même parité que $\alpha_m + 1$ et, par suite,

$$\cos[a^n \pi(x+h)] = (-1)^{\alpha_m + 1}.$$

On a aussi

$$\cos(a^n \pi x) = \cos(a^{n-m} a^m \pi x) = \cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m + \xi_m)]$$
$$= \cos(a^{n-m}\alpha_m \pi)\cos(a^{n-m}\xi_m \pi);$$

$a^{n-m}\alpha_m$ est de même parité que α_m et l'on a encore

$$\cos(a^n \pi x) = (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\xi_m \pi).$$

Nous pouvons donc écrire

$$S_m = \frac{(-1)^{\alpha_m + 1}}{h} \sum_{n=m}^{+\infty} b^n [1 + \cos(a^{n-m}\xi_m \pi)];$$

tous les termes de la série étant positifs, la somme de cette série est supérieure à son premier terme et, par suite, à b^m puisque ξ_m est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. Par suite, nous avons

$$|S_m| > \frac{b^m}{|h|}$$

ou encore, en tenant compte de la valeur de h,

$$|S_m| > \frac{2}{3}(ab)^m.$$

Supposons que l'on ait

$$\frac{2}{3}(ab)^m > \frac{\pi(ab)^m}{ab-1};$$

il suffira pour cela que l'on ait

$$(80) \qquad ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

et la relation (79) prouve que l'on aura alors

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right| > |S_m| - |R_m| > \frac{2}{3}(ab)^m \frac{ab-1-\frac{3\pi}{2}}{ab-1}.$$

Lorsque le nombre entier m augmente indéfiniment, il en est de même de cette expression, tandis que la valeur absolue de h tend vers zéro. Il est donc possible, quelque petit que soit un nombre ε, de trouver un accroissement h inférieur à ε en valeur absolue et tel que $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ soit supérieur en valeur absolue à tout nombre donné à l'avance. La fonction $F(x)$ n'a donc de dérivée pour aucune valeur de x, pourvu que la relation (80) soit vérifiée.

EXERCICES.

1. Appliquer la formule de Lagrange au développement, suivant les puissances de x, de la racine de l'équation $y^2 = ay + x$ qui est égale à a pour $x = 0$.

2. Même problème pour l'équation $y - a + xy^{m+1} = 0$.

Application à l'équation du second degré $a - bx + cx^2 = 0$.

Développer, suivant les puissances de c, la racine qui tend vers $\frac{a}{b}$ lorsque c tend vers zéro.

3. Établir la formule

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \ldots,$$

4. Si x est plus grand que $-\frac{1}{2}$, on a

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots.$$

5. Si $|x| < 1$, on a

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2.4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5 + \ldots.$$

Quelle est la somme de la série lorsque $|x| > 1$?

6. Démontrer la formule

$$(a+x)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left[1 - \frac{nx}{a+x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3 + \ldots\right].$$

7. Les déterminations de $\sin mx$ et de $\cos mx$, qui se réduisent à 0 et à 1 lorsque $\sin x$ est nul, sont développables en série suivant les puissances de $\sin x$

$$\sin mx = m\left[\sin x - \frac{m^2-1}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \ldots\right],$$

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \ldots.$$

On se sert de l'équation différentielle

$$(1-y^2)\frac{d^2u}{dy^2} - y\frac{du}{dy} + m^2 u = 0,$$

qui est vérifiée par $\cos mx$ et $\sin mx$, considérés comme fonctions de

$$y = \sin x.$$

8. Déduire des formules précédentes les développements de

$$\cos(n \operatorname{arc} \cos x), \quad \sin(n \operatorname{arc} \cos x).$$

CHAPITRE X.

COURBES PLANES.

Les courbes et les surfaces que l'on étudie dans la Géométrie proprement dite sont des courbes et des surfaces analytiques. Cependant l'existence des éléments géométriques que nous allons définir suppose seulement l'existence des dérivées jusqu'à celles d'un certain ordre. Ainsi, une courbe plane représentée par l'équation $y = f(x)$ a une tangente si la fonction $f(x)$ a une dérivée $f'(x)$, un rayon de courbure si $f'(x)$ a elle-même une dérivée $f''(x)$, et ainsi de suite.

I. — COURBES ENVELOPPES.

201. Recherche des enveloppes. — Étant donnée l'équation d'une courbe plane C

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

dépendant d'un paramètre arbitraire a, cette courbe varie en général d'une manière continue, de forme et de position, quand on fait varier ce paramètre. Si toutes ces courbes C restent tangentes à une courbe déterminée E, cette courbe E s'appelle l'*enveloppe* des courbes C, qui sont dites les *enveloppées*. Les courbes C étant données, nous nous proposons de reconnaître si elles admettent une enveloppe et de la déterminer.

L'existence de cette enveloppe E étant admise, soient (x, y) les coordonnées du point de contact M de la courbe E avec la courbe enveloppée C qui correspond à la valeur a du paramètre. Ces coordonnées x, y sont des fonctions inconnues du paramètre a, qui satisfont à l'équation (1). Pour achever de les déterminer, il nous faut exprimer que la tangente à la courbe décrite par le point M quand a varie coïncide avec la tangente à la

courbe C. Désignons par δx et δy les paramètres directeurs de la tangente à la courbe enveloppée, par $\frac{dx}{da}$ et $\frac{dy}{da}$ les dérivées des fonctions inconnues $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$; il faudra que l'on ait

$$\frac{\frac{dx}{da}}{\delta x} = \frac{\frac{dy}{da}}{\delta y}. \tag{2}$$

Or la courbe C étant représentée par l'équation (1), où a a une valeur constante, on a la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y = 0, \tag{3}$$

qui détermine la tangente à cette courbe. D'autre part, les fonctions inconnues $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$ vérifient aussi l'équation

$$f(x, y, a) = 0,$$

où a désigne maintenant la variable indépendante, et, par suite, on a aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da} + \frac{\partial f}{\partial a} = 0. \tag{4}$$

L'équation de condition (2) devient, en tenant compte des relations (3) et (4),

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0; \tag{5}$$

cette équation, jointe à la relation (1), détermine les deux fonctions inconnues $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$. *On obtiendra donc l'équation de l'enveloppe, si elle existe, en éliminant le paramètre* a *entre les deux équations* $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$.

Soit $R(x, y) = 0$ le résultat de l'élimination; nous allons examiner si cette courbe représente bien une enveloppe. Soient C_0 la courbe particulière correspondant à la valeur a_0 du paramètre, et (x_0, y_0) les coordonnées d'un point d'intersection M_0 des deux courbes

$$f(x, y, a_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a_0} = 0; \tag{6}$$

les équations (1) et (5) définissent deux fonctions $x = \varphi(a)$,

$y = \psi(a)$, qui se réduisent respectivement à x_0, y_0 pour $a = a_0$, et l'on a évidemment, pour $a = a_0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\left(\frac{dx}{da}\right)_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0}\left(\frac{dy}{da}\right)_0 = 0;$$

cette relation, rapprochée de la relation (3), nous montre qu'au point (x_0, y_0) la tangente à la courbe C_0 coïncide avec la tangente à la courbe décrite par le point (x, y), à moins que l'on n'ait à la fois $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0} = 0$, c'est-à-dire à moins que le point (x_0, y_0) ne soit un point singulier de la courbe C_0. *L'équation* $R(x, y) = 0$ *représente donc, soit l'enveloppe des courbes* C, *soit un lieu de points singuliers de ces courbes.*

On peut compléter ce résultat. Si chacune des courbes C possède un ou plusieurs points singuliers, le lieu de ces points singuliers fait certainement partie de la courbe $R(x, y) = 0$. Soient en effet (x, y) les coordonnées de l'un de ces points singuliers; x et y sont des fonctions de a qui vérifient à la fois les trois relations

$$f(x, y, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

et par suite aussi la relation $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$; x et y satisfont donc à l'équation $R = 0$ que l'on obtient en éliminant a entre les deux relations $f = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$. Dans le cas le plus général, la courbe $R(x, y) = 0$ se compose de deux parties analytiquement distinctes, dont l'une est l'enveloppe proprement dite, tandis que l'autre est le lieu des points singuliers.

Exemple. — Soit $f(x, y, a) = y^4 - y^2 + (x - a)^2 = 0$; on a $\frac{\partial f}{\partial a} = -2(x - a)$, et en éliminant a entre $f = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, on est conduit à l'équation $y^4 - y^2 = 0$, qui représente les trois lignes droites $y = 0$, $y = +1$, $y = -1$. Les courbes considérées se déduisent de la courbe $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ en la faisant glisser parallèlement à Ox; or, cette courbe a un point double à l'origine, et elle est tangente aux deux droites $y = \pm 1$, aux points de rencontre avec l'axe des y. La droite $y = 0$ est donc un lieu de

points doubles, tandis que les deux droites $y = \pm 1$ constituent l'enveloppe proprement dite.

202. Lorsque la courbe C a une enveloppe E, les points de contact de la courbe C avec son enveloppe sont *les positions limites des points d'intersection de cette courbe avec une courbe infiniment voisine de la même famille*. Soient, en effet,

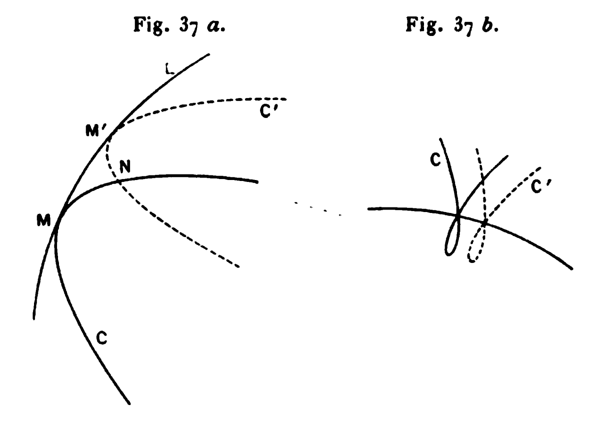
$$(7) \qquad f(x, y, a) = 0, \qquad f(x, y, a+h) = 0,$$

les équations des deux courbes voisines; le système (7) qui détermine les coordonnées des points communs peut évidemment être remplacé par le système équivalent

$$f(x, y, a) = 0, \qquad \frac{f(x, y, a+h) - f(x, y, a)}{h} = 0,$$

dont la dernière équation se réduit à $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, lorsque h tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque la seconde courbe se rapproche indéfiniment de la première. Cette propriété est du reste à peu près évidente géométriquement ; on voit, en effet, sur la *fig.* 37 (*a*) que

Fig. 37 *a*. Fig. 37 *b*.



deux courbes voisines C, C' ont un point d'intersection N qui se rapproche indéfiniment du point de contact M lorsque la seconde courbe C' vient se confondre avec C. On voit de même sur la *fig.* 37 (*b*) que, lorsque les courbes (1) ont un point double, un des points d'intersection des deux courbes voisines C, C' vient se

confondre avec le point double quand la courbe C′ se rapproche indéfiniment de la courbe C.

La remarque précédente explique bien pourquoi l'on doit trouver le lieu des points singuliers en même temps que l'enveloppe. Supposons, pour fixer les idées, que $f(x, y, a)$ soit un polynome de degré m en a. Pour un point M_0 pris au hasard dans le plan, de coordonnées (x_0, y_0), l'équation

$$f(x_0, y_0, a) = 0 \tag{8}$$

admet en général m racines distinctes; il passe donc par ce point m courbes différentes de la famille considérée. Mais si le point M_0 appartient à la courbe $R(x, y) = 0$, on a à la fois

$$f(x_0, y_0, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

et l'équation (8) a une racine double. On peut donc dire que la courbe $R(x, y) = 0$ est le lieu des points du plan pour lesquels deux des courbes de la famille (1) qui y passent sont venues se confondre. Or les *fig.* 37 (*a*) et 37 (*b*) montrent précisément que lorsqu'un point se rapproche indéfiniment, soit d'un point de l'enveloppe, soit d'un point de la courbe qui est le lieu des points singuliers, deux des courbes C qui passent par ce point diffèrent très peu l'une de l'autre et viennent se confondre à la limite.

Remarque. — Il arrive fréquemment que l'on a à chercher l'enveloppe d'une courbe

$$F(x, y, a, b) = 0, \tag{9}$$

dont l'équation renferme deux paramètres variables a et b, liés par une relation $\varphi(a, b) = 0$. Ce cas n'est pas distinct du cas général, car on peut considérer b comme une fonction de a définie par la relation $\varphi = 0$. D'après la règle établie, il faut joindre à l'équation (9) celle que l'on obtient en égalant à zéro la dérivée du premier membre par rapport au paramètre a

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da} = 0;$$

mais de la relation $\varphi(a, b) = 0$ on tire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0,$$

et la formule précédente devient, en éliminant $\frac{db}{da}$,

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0. \tag{10}$$

On obtiendra donc l'équation de l'enveloppe en éliminant a et b entre les équations $F = 0$, $\varphi = 0$, et l'équation précédente (10).

203. Enveloppe d'une droite. — Prenons l'équation d'une droite D sous la forme normale

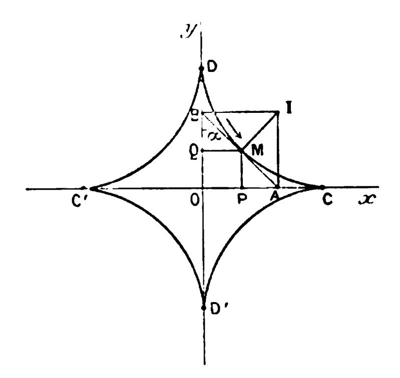
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - f(\alpha) = 0, \tag{11}$$

le paramètre variable étant l'angle α. En prenant la dérivée par rapport à ce paramètre, il vient

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha - f'(\alpha) = 0, \tag{12}$$

et l'on tire des deux équations (11) et (12) les coordonnées du point de

Fig. 38.



contact de la droite mobile avec son enveloppe

$$\left\{\begin{array}{l} x = f(\alpha)\cos\alpha - f'(\alpha)\sin\alpha, \\ y = f(\alpha)\sin\alpha + f'(\alpha)\cos\alpha. \end{array}\right. \tag{13}$$

Il est facile de vérifier que la tangente à la courbe E décrite par ce point (x, y) est la droite D; on tire en effet des équations (13)

$$\left\{\begin{array}{l} dx = -[f(\alpha) + f''(\alpha)]\sin\alpha\, d\alpha, \\ dy = [f(\alpha) + f''(\alpha)]\cos\alpha\, d\alpha, \end{array}\right. \tag{14}$$

et par suite

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\alpha,$$

ce qui est précisément le coefficient angulaire de la droite D. Des équations (14), on tire aussi, en appelant s l'arc de la courbe enveloppe,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm [f(\alpha) + f''(\alpha)]\, d\alpha,$$

et, par conséquent,

$$s = \pm \left[\int f(\alpha)\, d\alpha + f'(\alpha) \right];$$

il suffira donc, pour avoir une courbe rectifiable, de prendre pour $f(\alpha)$ la dérivée d'une fonction connue [1].

Prenons, par exemple, $f(\alpha) = l \sin\alpha \cos\alpha$; en faisant successivement $y = 0$, et $x = 0$ dans l'équation (11), il vient (*fig.* 38) $OA = l \sin\alpha$, $OB = l \cos\alpha$, et par suite $AB = l$. La courbe cherchée est donc l'enveloppe d'une droite de longueur constante l, dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires. Les formules (13) deviennent ici

$$x = l \sin^3\alpha, \qquad y = l \cos^3\alpha,$$

et l'équation de l'enveloppe est

$$\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

c'est une hypocycloïde à quatre rebroussements, qui a la forme indiquée sur la figure. Lorsque α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le point de contact décrit l'arc DC. La longueur de l'arc, compté à partir de D, a pour expression

$$s = \int_0^\alpha 3l \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha = \frac{3l}{2} \sin^2\alpha.$$

Soient I le sommet du rectangle construit sur OA et OB, et M le pied de la perpendiculaire abaissée du point I sur AB. Les triangles AMI, APM

---

[1] Dans la formule qui donne l'arc

$$s = f'(\alpha) + \int f(\alpha)\, d\alpha,$$

toutes les quantités qui figurent au second membre ont une signification géométrique : α est l'angle que fait avec Ox la perpendiculaire ON menée de l'origine sur la droite mobile, $f(\alpha)$ est la distance ON de l'origine à cette droite, $f'(\alpha)$ est, au signe près, la distance MN du point de contact de la droite mobile avec son enveloppe au pied N de la perpendiculaire abaissée de l'origine. On appelle quelquefois cette formule de rectification la *formule de Legendre*.

donnent successivement

$$AM = AI \cos\alpha = l \cos^2\alpha, \qquad AP = AM \sin\alpha = l \cos^2\alpha \sin\alpha,$$

et par suite $OP = OA - AP = l \sin^3\alpha$, de sorte que le point M est le point de contact de la droite AB avec son enveloppe. On a ensuite

$$BM = l - AM = l \sin^2\alpha,$$

et par conséquent arc $DM = \frac{3}{2}$ BM.

204. Enveloppe d'un cercle. — Soit

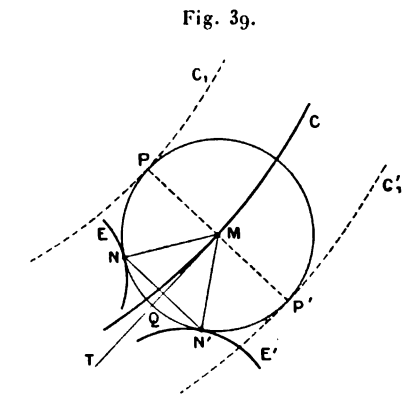
$$(15) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 - \rho^2 = 0$$

l'équation d'un cercle, a, b, ρ étant des fonctions d'un paramètre variable t. Les points de contact de ce cercle avec son enveloppe sont à l'intersection du cercle avec la droite

$$(16) \qquad (x-a)a' + (y-b)b' + \rho\rho' = 0,$$

qui est perpendiculaire à la tangente à la courbe C décrite par le centre (a, b) du cercle, et dont la distance au centre est égale à $\rho \frac{d\rho}{ds}$, s étant l'arc de la courbe C. Cette droite coupe le cercle en deux points N, N', symétriques par rapport à la tangente MT; l'enveloppe se compose

Fig. 39.



donc de deux branches E, E', qui ne sont pas en général analytiquement distinctes. Plusieurs cas particuliers sont à remarquer :

1° Si ρ est constant, la corde des contacts NN' se réduit à la normale PP', et l'enveloppe se compose des deux courbes parallèles C_1, C'_1, obtenues en portant sur la normale à la courbe C, de part et d'autre du point M, la longueur constante ρ.

2° Si $\rho = s + C$, on a $\rho \frac{d\rho}{ds} = \rho$; la corde NN′ se réduit à la tangente au cercle au point Q. Les deux branches de l'enveloppe sont confondues, et cette enveloppe Γ admet pour normales les tangentes à la courbe C; on dit que C est la *développée* de Γ, et inversement Γ est une *développante* de C (*voir* n° 206).

Lorsque $d\rho > ds$, la droite (14) ne coupe plus le cercle, et l'enveloppe est imaginaire.

Caustiques secondaires. — Supposons que le rayon du cercle variable soit proportionnel à la distance du centre à un point fixe O. Si l'on prend ce point fixe pour origine, l'équation du cercle est

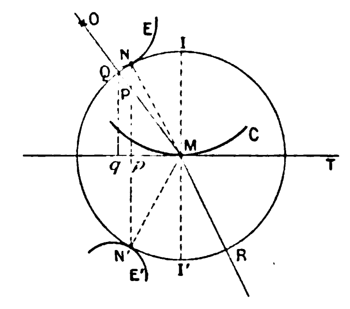
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2(a^2+b^2),$$

k étant un facteur constant, et la corde des contacts a pour équation

$$(x-a)a' + (y-b)b' + k^2(aa'+bb') = 0.$$

Soient δ et δ' les distances du centre M(a, b) du cercle à la corde des contacts et à la parallèle menée par l'origine; on tire de l'équation précédente $\delta = k^2\delta'$. On obtiendra donc la corde des contacts en prenant sur le rayon MO un point P tel que MP $= k^2$MO et abaissant du point P une perpendiculaire sur la tangente au lieu du centre. Supposons $k < 1$, et soit E la branche de l'enveloppe du cercle qui est située du même côté

Fig. 40.



que le point O par rapport à la tangente à la courbe C. Appelons i et r les angles que font avec la normale MI les droites MO et MN; on a (*fig.* 40)

$$\sin i = \frac{Mq}{MQ}, \qquad \sin r = \frac{Mp}{MN}, \qquad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{Mq}{Mp} = \frac{MQ}{MP} = \frac{1}{k}.$$

Cela posé, imaginons que le point O soit un foyer lumineux, et que la courbe C soit la limite de séparation entre le milieu où est le point O et

un nouveau milieu dont l'indice de réfraction par rapport au premier soit égal à $\frac{1}{k}$. Après la réfraction, le rayon incident OM se change en un rayon réfracté MR qui, d'après la loi de la réfraction, est précisément le prolongement de NM. Tous les rayons réfractés MR sont donc normaux à l'enveloppe E, qu'on appelle la *caustique secondaire* par réfraction. La caustique proprement dite, enveloppe des rayons réfractés, est la développée de la caustique secondaire.

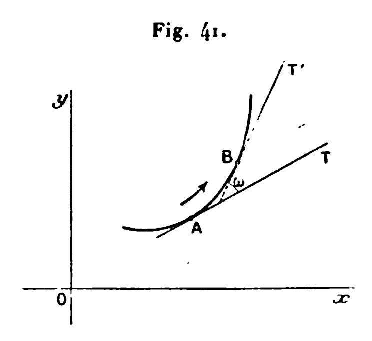
La seconde branche de l'enveloppe E' n'a évidemment aucun sens physique; elle correspondrait à un indice de réfraction négatif. Si l'on suppose $k = 1$, l'enveloppe E se réduit au point O lui-même, tandis que l'enveloppe E' est le lieu des symétriques du point O par rapport aux tangentes de la courbe C. Cette courbe est aussi la caustique secondaire *par réflexion* pour les rayons lumineux issus du point O se réfléchissant sur la courbe C. On démontrera de la même façon que, si de chaque point d'une courbe C comme centre on décrit un cercle dont le rayon soit proportionnel à la distance du centre à une droite fixe, on obtient pour enveloppes les caustiques secondaires relativement aux rayons lumineux issus d'un foyer à l'infini.

II. — COURBURE.

205. Rayon de courbure. — D'après l'idée vulgaire de la courbure, on considère la courbure d'une courbe comme d'autant plus prononcée qu'elle s'écarte plus vite de sa tangente. Pour passer de cette notion un peu vague à une définition précise, considérons d'abord un cercle. Sa courbure augmente quand le rayon diminue; il est donc naturel de choisir pour mesure de sa courbure la fonction du rayon la plus simple, qui augmente quand le rayon diminue, c'est-à-dire l'inverse du rayon $\frac{1}{R}$. Soit, sur un cercle de rayon R, un arc AB correspondant à un angle au centre ω; l'angle des deux tangentes aux extrémités A et B a aussi pour valeur ω, et la longueur de l'arc AB a pour valeur $s = R\omega$. La courbure du cercle est donc aussi mesurée par le quotient $\frac{\omega}{s}$. Or cette nouvelle définition peut s'étendre à un arc de courbe plane quelconque. Soient AB un arc de courbe plane sans point d'inflexion, et ω l'angle que font les directions des tangentes aux deux extrémités, ces directions correspondant à un sens de parcours déterminé, par exemple le sens de parcours de A

vers B; le quotient $\frac{\omega}{\text{arc AB}}$ est ce qu'on appelle la *courbure moyenne* de l'arc AB. Lorsque le point B se rapproche indéfiniment du point A, ce quotient tend en général vers une limite qu'on appelle la *courbure au point* A. Le rayon de courbure est le rayon d'un

Fig. 41.



cercle qui aurait même courbure que la courbe donnée au point A, il est donc égal à l'inverse de la courbure. Soient s l'arc de la courbe compté à partir d'un point fixe, α l'angle que fait la direction de la tangente avec une direction fixe, l'axe Ox par exemple. Il est clair que la courbure moyenne de l'arc AB est égale à la valeur absolue du quotient $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$; on a donc, pour valeur du rayon de courbure R,

$$R = \pm \lim \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = \pm \frac{ds}{d\alpha}.$$

Supposons l'équation de la courbe proposée résolue par rapport à y, soit $y = f(x)$; on a

$$\alpha = \text{arc tang} y', \qquad d\alpha = \frac{y'' dx}{1 + y'^2}, \qquad ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

et par conséquent

$$(17) \qquad R = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Le rayon de courbure étant une quantité essentiellement positive, le signe $\pm$ indique qu'il faut prendre la valeur absolue. Imaginons que sur la normale à la courbe on porte, à partir du point A et dans le sens de la concavité de la courbe, une longueur

égale au rayon de courbure; le point I ainsi obtenu est le *centre de courbure*, et le cercle décrit du point I comme centre, avec un rayon égal à R, est le *cercle de courbure*. Soient (x_1, y_1) les coordonnées du centre de courbure; ces coordonnées satisfont aux deux relations

$$(x_1-x)+(y_1-y)y'=0, \qquad (x_1-x)^2+(y_1-y)^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2},$$

qui expriment que ce point est sur la normale et à une distance du point A égale à R. On tire de ces deux équations, en éliminant x_1,

$$y_1-y=\pm\frac{1+y'^2}{y''};$$

pour savoir le signe que l'on doit prendre, remarquons que, si y'' est positif, comme dans le cas de la *fig.* 41, y_1-y doit être positif, et il faut prendre le signe +. Si y'' était négatif, on verrait de même que y_1-y est négatif, et il faut encore prendre le signe +. Les coordonnées du centre de courbure sont par suite données par les formules

$$(18) \qquad y_1-y=\frac{1+y'^2}{y''}, \qquad x_1-x=-y'\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Lorsque les coordonnées (x, y) d'un point de la courbe sont exprimées en fonction d'un paramètre variable t, on a (nº 33)

$$y'=\frac{dy}{dx}, \qquad y''=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3},$$

et les formules (17) et (18) deviennent

$$(19) \qquad \begin{cases} R=\pm\dfrac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}, \qquad y_1-y=\dfrac{dx(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}, \\[2ex] x_1-x=-\dfrac{dy(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}. \end{cases}$$

En un point d'inflexion, $y''=0$, et le rayon de courbure est infini. En un point de rebroussement de première espèce, y peut se développer suivant les puissances de $x^{\frac{1}{2}}$, commençant par un terme en x; y' a une valeur finie, tandis que y'' est infini : le rayon de courbure est nul.

Remarque. — Lorsque les coordonnées sont exprimées en fonction de l'arc de la courbe pris pour variable indépendante

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s),$$

les fonctions φ et ψ satisfont à la relation

$$\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) = 1,$$

puisque l'on a $dx^2 + dy^2 = ds^2$, et par suite aussi à la relation

$$\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0.$$

On déduit de là, en les résolvant par rapport à φ' et ψ',

$$\varphi' = \varepsilon \frac{\psi''}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2}}, \qquad \psi' = -\varepsilon \frac{\varphi''}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2}},$$

où $\varepsilon = \pm 1$, et la formule qui donne le rayon de courbure prend la forme élégante

$$\frac{1}{R^2} = [\varphi''(s)]^2 + [\psi''(s)]^2. \tag{20}$$

206. Développées. — Le centre de courbure en chaque point est la position limite du point de rencontre de la normale avec la normale infiniment voisine. Écrivons, en effet, l'équation de la normale

$$X - x + (Y - y)y' = 0,$$

X et Y étant les coordonnées courantes; pour avoir le point de rencontre avec la normale infiniment voisine, il faut joindre à cette équation la dérivée du premier membre par rapport au paramètre variable x, c'est-à-dire

$$-1 - y'^2 + (Y - y)y'' = 0.$$

La valeur de Y que l'on en déduit est précisément l'ordonnée du centre de courbure, ce qui démontre la proposition. Il suit de là que le lieu des centres de courbure d'une courbe plane n'est autre que l'enveloppe des normales ou développée de cette courbe.

Pour étudier de plus près les relations d'une courbe avec sa développée, nous expliquerons d'abord quelques conventions. Sur une courbe plane comptons l'arc à partir d'un point fixe choisi pour origine dans un sens déterminé, et soit α l'angle que fait avec Ox la direction de la tangente menée dans le sens des

arcs croissants. De la formule $\tang\alpha = \pm y'$, on déduit

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \pm \frac{dx}{ds};$$

on doit prendre le signe + dans le second membre, car, si x et s croissent en même temps, l'angle α est aigu, tandis qu'il est obtus si x et s varient en sens contraire (n° 81). On a de même, en désignant par β l'angle de Oy avec la tangente, $\cos\beta = \frac{dy}{ds}$, et ces formules peuvent encore s'écrire

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds},$$

l'angle α étant compté comme en Trigonométrie. Observons encore que, sur un arc n'offrant pas de point d'inflexion, on peut choisir un sens de parcours tel que s et α varient dans le même sens, de façon que l'on ait $R = \frac{ds}{d\alpha}$. Lorsqu'il en est ainsi, la direction du segment ayant pour origine le point de la courbe et pour extrémité le centre de courbure fait (comme il est aisé de s'en assurer, en examinant les deux cas possibles pour la figure) un angle $\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$ avec l'axe des x. Les coordonnées (x_1, y_1) du centre de courbure sont alors données par les formules

$$x_1 = x + R\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = x - R\sin\alpha,$$

$$y_1 = y + R\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = y + R\cos\alpha;$$

d'où l'on déduit

$$dx_1 = \cos\alpha\, ds - R\cos\alpha\, d\alpha - \sin\alpha\, dR = -\sin\alpha\, dR,$$
$$dy_1 = \sin\alpha\, ds - R\sin\alpha\, d\alpha + \cos\alpha\, dR = \cos\alpha\, dR.$$

On tire d'abord de ces formules $\frac{dy_1}{dx_1} = -\cot\alpha$, ce qui prouve que la tangente à la développée est la normale à la courbe proposée, comme on l'a démontré directement. On a ensuite la relation

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2,$$

ou $ds_1 = \pm dR$. Supposons, pour fixer les idées, que, lorsqu'on se déplace sur la courbe C de M_1 en M_2, le rayon de courbure aille

constamment en croissant, et comptons l'arc de la développée de façon qu'il aille en croissant avec R. La formule précédente donne $ds_1 = dR$, on en tire $s_1 = R + C$ et, par suite, arc $I_1 I_2 = R_2 - R_1$; *l'arc de la développée est donc égal à la différence des rayons de courbure de la courbe* (C) *correspondant aux deux extrémités.*

Cette propriété fournit un moyen mécanique pour décrire d'un trait continu la *développante* (C) connaissant la développée (D). Imaginons, en effet, qu'un fil soit enroulé sur la développée (D) à partir d'un point arbitraire A et s'en détache au point I_2 pour

Fig. 42.

suivre la tangente $I_2 M_2$; il suffira de couper le fil en M_2 et de l'enrouler sur la développée en le maintenant toujours tendu : l'extrémité décrira la développante (C).

Cette construction peut encore s'énoncer comme il suit : Soit s l'arc AI de la développée; sur chaque tangente à la développée on porte une longueur $IM = l$, telle que $l + s =$ const. En faisant varier cette constante, on obtient une infinité de développantes qui se déduisent toutes de l'une d'elles en portant sur la normale une longueur constante arbitraire.

Du reste, ces propriétés se déduisent très aisément de la formule générale qui donne la différentielle de la longueur d'un segment (n° 82)

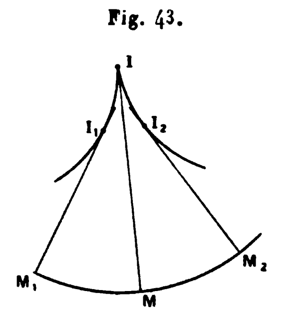
$$dl = -d\sigma_1 \cos\omega_1 - d\sigma_2 \cos\omega_2;$$

si la droite est tangente à la courbe décrite par l'une de ses extrémités et normale à la courbe décrite par l'autre extrémité, on peut

prendre $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $dl - d\sigma_1 = 0$. Si la droite est normale à l'une des deux courbes, et la longueur l constante, on a $dl = 0$, $\cos\omega_1 = 0$, et par suite $\cos\omega_2 = 0$.

L'énoncé précédent, relatif à l'arc de la développée, suppose essentiellement que le rayon de courbure varie dans le même sens entre les deux extrémités. Dans le cas contraire, l'énoncé doit être modifié; remarquons d'abord que si, en un point, le rayon de courbure est maximum ou minimum, on a $d\mathrm{R} = 0$, et par suite

Fig. 43.



$dx_1 = dy_1 = 0$; la développée présente donc un point de rebroussement. Supposons, par exemple, que le rayon de courbure soit maximum pour le point M; on a

$$\text{arc}\, \mathrm{II}_1 = \mathrm{IM} - \mathrm{I}_1\mathrm{M}_1,$$
$$\text{arc}\, \mathrm{II}_2 = \mathrm{IM} - \mathrm{I}_2\mathrm{M}_2,$$

et par suite

$$\text{arc}\, \mathrm{I}_1\mathrm{I}\,\mathrm{I}_2 = 2\,\mathrm{IM} - \mathrm{I}_1\mathrm{M}_1 - \mathrm{I}_2\mathrm{M}_2.$$

La différence $\mathrm{I}_1\mathrm{M}_1 - \mathrm{I}_2\mathrm{M}_2$ représente la différence des deux arcs II_1, II_2 et non leur somme.

207. Cycloïde. — La cycloïde est la courbe décrite par un point d'une circonférence qui roule sans glisser sur une droite fixe. Prenons pour axe des x la droite fixe, pour origine le point de cette droite où la circonférence lui est tangente au début du mouvement, et pour axe des y la droite perpendiculaire. Lorsque la circonférence mobile est tangente en I, le point de cette circonférence qui était d'abord en O est venu en M, et l'on a arc IM = OI. Prenons pour variable indépendante l'angle φ que fait le rayon CM avec CI; on a, pour les coordonnées du point M (voir *fig.* 44),

P et Q étant les projections du point M sur OI et IT,

$$x = \mathrm{OI} - \mathrm{IP} = \mathrm{R}\varphi - \mathrm{R}\sin\varphi, \qquad y = \mathrm{MP} = \mathrm{IC} + \mathrm{CQ} = \mathrm{R} - \mathrm{R}\cos\varphi,$$

et il est facile de s'assurer que ces formules sont exactes, quelle que soit la valeur de l'angle φ. Après un tour complet, le point décrivant a décrit

Fig. 44.

l'arc $\mathrm{OBO_1}$, et, si le mouvement se continuait indéfiniment, on aurait une infinité d'arcs égaux à celui-là.

Des formules précédentes on tire

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{R}(\varphi - \sin\varphi), & dx &= \mathrm{R}(1 - \cos\varphi)\,d\varphi, & d^2x &= \mathrm{R}\sin\varphi\, d\varphi^2, \\ y &= \mathrm{R}(1 - \cos\varphi), & dy &= \mathrm{R}\sin\varphi\, d\varphi, & d^2y &= \mathrm{R}\cos\varphi\, d\varphi^2; \end{aligned}$$

le coefficient angulaire de la tangente peut s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \cot\frac{\varphi}{2},$$

ce qui montre que la tangente en M est précisément la droite MT, car, dans le triangle isoscèle MTC, l'angle en T est la moitié de l'angle extérieur $\mathrm{MCI} = \varphi$. La normale en M est donc la droite MI qui joint le point M au point de contact du cercle avec la droite fixe.

Pour avoir l'arc de la cycloïde, nous avons la formule

$$ds^2 = \mathrm{R}^2 d\varphi^2[\sin^2\varphi + (1 - \cos\varphi)^2] = 4\mathrm{R}^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi^2,$$

ou

$$ds = 2\mathrm{R}\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi,$$

si l'on compte l'arc de façon qu'il augmente avec φ. On en tire, en pre-

nant le point O pour origine des arcs,

$$s = 4R\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right);$$

la longueur de l'arc OBO_1 s'obtient en faisant $\varphi = 2\pi$, ce qui donne $8R$. L'arc OMB, compris entre l'origine O et le point le plus haut B, est donc égal à $4R$, et l'arc BM de la figure a pour expression $4R\cos\frac{\varphi}{2}$. Mais le triangle MTC donne $MT = 2R\cos\frac{\varphi}{2}$; on a donc arc $BM = 2MT$.

On a de même pour l'aire de la cycloïde

$$\mathcal{A} = \int_0^\varphi y\,dx = \int_0^\varphi R^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi$$
$$= R^2\int_0^\varphi \left(\frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{A} = \left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) R^2;$$

l'aire comprise entre l'arc OBO_1 et la base OO_1 est donc égale à $3\pi R^2$, c'est-à-dire à *trois fois l'aire du cercle générateur*. (Galilée.)

La formule qui donne le rayon de courbure d'une courbe plane devient ici

$$\rho = \frac{8R^3\sin^3\frac{\varphi}{2}\,d\varphi^3}{2R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi^3} = 4R\sin\frac{\varphi}{2};$$

or le triangle MCI donne la relation $MI = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$. On a donc $\rho = 2MI$, et le centre de courbure s'obtiendra en prolongeant la droite MI au delà du point I d'une longueur égale à elle-même. Cette propriété permet de trouver la développée. Considérons, en effet, le cercle symétrique du cercle mobile par rapport au point I, et le point M′ où la droite MI coupe ce cercle; on a évidemment $M'I = MI$, de sorte que M′ est précisément le centre de courbure. Or on a

$$\text{arc}\,T'M' = \pi R - \text{arc}\,IM' = \pi R - \text{arc}\,IM = \pi R - OI,$$

ou encore

$$\text{arc}\,T'M' = OH - OI = IH = T'B'.$$

Le point M′ décrit donc un arc d'une cycloïde égale à la première dont le point de rebroussement serait en B′ et le sommet en O. Lorsque M décrit l'arc BO_1, le point M′ décrit un autre arc symétrique du premier par rapport à BB′.

208. Chaînette. — La chaînette est la courbe plane représentée, dans un système d'axes rectangulaires convenablement choisi, par l'équation

$$(21)\qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

elle présente la forme indiquée en MAM' sur la figure (*fig.* 45).

Fig. 45.

De l'équation (21) on déduit

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2},$$

$$1 + y'^2 = \frac{\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4} = \frac{y^2}{a^2};$$

soit φ l'angle de la tangente TM avec Ox; de la valeur de y' on tire

$$\sin\varphi = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}, \qquad \cos\varphi = \frac{2}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}} = \frac{a}{y}.$$

Le rayon de courbure R a pour expression

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{y^2}{a};$$

or, dans le triangle MPN on a $MP = MN\cos\varphi$, et par suite

$$MN = \frac{MP}{\cos\varphi} = \frac{y^2}{a}.$$

Le rayon de courbure de la chaînette est donc égal à la normale MN; il serait facile d'en déduire la développée. L'arc AM de la chaînette est

égal à

$$s = \int_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\, dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

ce qui peut encore s'écrire $s = y \sin\varphi$; si du point P on abaisse une perpendiculaire Pm sur la tangente MT, le triangle PMm donne

$$\mathrm{M}m = \mathrm{MP} \sin\varphi = s.$$

L'arc AM est donc égal à la longueur Mm.

209. Tractrice. — La courbe décrite par le point m est appelée *tractrice;* c'est une développante de la chaînette, ayant un point de rebroussement en A. La tangente en m à cette courbe est précisément la droite mP; mais le triangle MPm donne aussi $m\mathrm{P} = y \cos\varphi = a$, de sorte que la longueur mP de la tangente à la tractrice, comprise entre le point de contact m et l'axe des x, est constante et égale à a. La tractrice est d'ailleurs la seule courbe jouissant de cette propriété.

Le triangle MTP donne également la relation $\mathrm{M}m \times m\mathrm{T} = a^2$, de sorte que, dans une tractrice, le produit du rayon de courbure par la normale est constant; mais cette propriété appartient à une infinité d'autres courbes planes.

Soient (x_1, y_1) les coordonnées du point m; on a

$$x_1 = x - s\cos\varphi = x - a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}},$$

$$y_1 = y - s\sin\varphi = \frac{2a}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}},$$

et, en posant $e^{\frac{x}{a}} = \tang\frac{\theta}{2}$, ces formules deviennent

$$(22) \qquad x_1 = a\cos\theta + a\log\left(\tang\frac{\theta}{2}\right), \qquad y_1 = a\sin\theta.$$

Lorsque le paramètre θ varie de $\frac{\pi}{2}$ à π, le point (x_1, y_1) décrit l'arc Amn asymptote à Ox; θ variant de $\frac{\pi}{2}$ à o, le point (x_1, y_1) décrira l'arc A$m'n'$, symétrique du premier par rapport à Oy, et correspondant à la branche AM' de la chaînette.

210. Équation intrinsèque. — Proposons-nous de déterminer une courbe plane, connaissant le rayon de courbure en fonction de l'arc, $\mathrm{R} = \varphi(s)$. En désignant par α l'angle que fait avec Ox la direction de la

tangente, on a $R = \pm \frac{ds}{d\alpha}$, et par suite

$$d\alpha = \pm \frac{ds}{R} = \pm \frac{ds}{\varphi(s)};$$

on en tire α par une quadrature

$$\alpha = \alpha_0 \pm \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

On a ensuite x et y par deux nouvelles quadratures

$$x = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\alpha\, ds, \qquad y = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\alpha\, ds.$$

Ces courbes dépendent de trois constantes x_0, y_0, α_0; mais, si l'on n'a égard qu'à la forme et non à la position, on n'obtient en réalité qu'une seule courbe. Considérons, en effet, la courbe particulière C représentée par les formules

$$X = \int_{s_0}^{s} \cos\left[\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\varphi(s)}\right] ds, \qquad Y = \int_{s_0}^{s} \sin\left[\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\varphi(s)}\right] ds,$$

les formules générales peuvent s'écrire, en prenant d'abord le signe $+$,

$$x = x_0 + X\cos\alpha_0 - Y\sin\alpha_0,$$
$$y = y_0 + X\sin\alpha_0 + Y\cos\alpha_0;$$

ce sont les formules qui définissent une transformation de coordonnées. En prenant, de même, le signe $-$ devant $\varphi(s)$, on obtiendrait une courbe symétrique de la courbe C. Une courbe plane est donc complètement déterminée, quant à la forme, si l'on connaît le rayon de courbure en fonction de l'arc. L'équation $R = \varphi(s)$ s'appelle l'*équation intrinsèque* de la courbe. D'une façon plus générale, si l'on connaît une relation entre deux des quantités R, s, α, la courbe est complètement définie de forme, et l'on peut obtenir les coordonnées par des quadratures. Ainsi, si l'on connaît R en fonction de l'angle α, $R = f(\alpha)$, on a $ds = f(\alpha)\,d\alpha$, puis

$$dx = \cos\alpha f(\alpha)\,d\alpha,$$
$$dy = \sin\alpha f(\alpha)\,d\alpha;$$

et l'on obtient x et y par deux quadratures. Par exemple, si R est constant, on déduit de ces formules

$$x = x_0 + R\sin\alpha, \qquad y = y_0 - R\cos\alpha;$$

la courbe cherchée est donc un cercle de rayon R, résultat évident d'après la propriété de la développée. L'arc de cette développée devant être nul, il est clair, en effet, qu'elle doit se réduire à un point.

Proposons-nous encore de trouver une courbe plane dont le rayon de courbure soit inversement proportionnel à l'arc, $R = \frac{a^2}{s}$; on a d'abord

$$\alpha = \int_0^s \frac{s\,ds}{a^2} = \frac{s^2}{2a^2},$$

puis

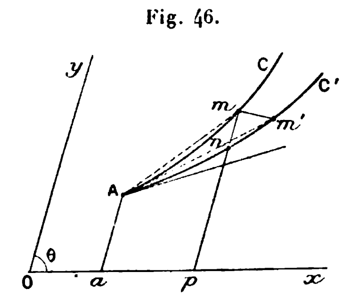
$$x = \int_0^s \cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds, \qquad y = \int_0^s \sin\frac{s^2}{2a^2}\,ds.$$

Quoiqu'on ne puisse pas obtenir ces intégrales sous forme explicite, il est facile de se faire une idée de la forme de cette courbe. Lorsque s croît de o à $+\infty$, x et y tendent vers une limite finie, en passant par une infinité de maxima et de minima; la courbe a donc la forme d'une spirale, avec un point asymptote sur la droite $y = x$.

III. — CONTACT DES COURBES PLANES.

211. Ordre du contact. — Soient C et C′ deux courbes planes tangentes en un point A. A chaque point m de la courbe C voisin du point A imaginons qu'on fasse correspondre, d'après une loi quelconque, un point m' de la courbe C′, de telle façon que le point m' vienne en A en même temps que le point m. En prenant comme infiniment petit principal l'arc Am, ou, ce qui revient au

Fig. 46.



même, la corde Am, nous allons d'abord chercher quel mode de correspondance il faut adopter pour que l'ordre infinitésimal de mm' par rapport à Am soit le plus grand possible. Rapportons pour cela les deux courbes à deux axes de coordonnées, rectangulaires ou obliques, l'axe des y n'étant pas parallèle à la tangente

commune AT. Soient

(C) $$y = f(x),$$

(C') $$Y = F(x),$$

les équations des deux courbes, et (x_0, y_0) les coordonnées du point A; les coordonnées du point m seront $x_0 + h$ et $f(x_0 + h)$, et celles du point m' seront de même $x_0 + k$ et $F(x_0 + k)$, k désignant une fonction de h qui tend vers zéro avec h, et qui définit le mode de correspondance adopté entre les points des deux courbes. Observons encore qu'on peut remplacer l'infiniment petit principal Am par $h = ap$, car le rapport $\frac{ap}{Am}$ tend vers une limite finie différente de zéro lorsque le point m se rapproche indéfiniment du point A.

Cela posé, admettons que, pour un certain mode de correspondance adopté, mm' soit un infiniment petit d'ordre $r + 1$ par rapport à h; $\overline{mm'}^2$ est alors un infiniment petit d'ordre $2r + 2$.

Or on peut écrire, θ désignant l'angle des axes,

$$\overline{mm'}^2 = [F(x_0 + k) - f(x_0 + h) + (k - h)\cos\theta]^2 + (k - h)^2 \sin^2\theta;$$

il faut donc que chacune des différences $k - h$ et

$$F(x_0 + k) - f(x_0 + h)$$

soit un infiniment petit d'ordre $r + 1$ au moins, c'est-à-dire que l'on ait

$$k = h + \alpha h^{r+1}, \qquad F(x_0 + k) - f(x_0 + h) = \beta h^{r+1},$$

α et β étant des fonctions de h qui restent finies lorsque h tend vers zéro. La dernière formule peut s'écrire

$$F(x_0 + h + \alpha h^{r+1}) - f(x_0 + h) = \beta h^{r+1};$$

si l'on imagine $F(x_0 + h + \alpha h^{r+1})$ développé suivant les puissances de α, la partie qui dépend de α est un infiniment petit d'ordre $r + 1$ au moins, la différence

$$\Delta = F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$$

est donc un infiniment petit d'ordre au moins égal à $r + 1$, mais peut être d'ordre supérieur. Or cette différence Δ représente la distance mn des points des deux courbes C, C', qui sont situés sur

une même parallèle à l'axe Oy. Puisqu'en remplaçant le point m' par le point n on ne peut qu'augmenter l'ordre infinitésimal de mm', on en conclut que *la distance de deux points correspondants des deux courbes est de l'ordre infinitésimal le plus grand possible lorsque les points correspondants sont situés sur une parallèle à l'axe* Oy. Si cet ordre est égal à $r+1$, on dit que les deux courbes ont *un contact d'ordre* r au point A.

Remarques. — Cette définition donne lieu à un certain nombre de remarques. L'axe Oy est en définitive une droite assujettie à le seule condition de ne pas être parallèle à la tangente commune AT; on peut donc, pour évaluer l'ordre du contact, faire correspondre les points des deux courbes situés sur une droite parallèle à une droite fixe D, non parallèle à la tangente. Le raisonnement précédent prouve que l'ordre infinitésimal obtenu ne dépend pas de la direction de la droite D; c'est ce qu'il est aisé de vérifier. Supposons, en effet, que par un point m de la courbe C on mène deux droites mm' et mn (*fig.* 46) parallèles à deux directions fixes autres que la tangente. Dans le triangle $mm'n$, on a

$$\frac{mm'}{mn} = \frac{\sin \widehat{mnm'}}{\sin \widehat{mm'n}};$$

lorsque le point m se rapproche du point A, les angles $\widehat{mnm'}$, $\widehat{mm'n}$ ont des limites différentes de o et de π, car la corde $m'n$ a pour limite la tangente AT, et par conséquent mm' est du même ordre que mn. Le même calcul prouve que mm' ne peut pas être un infiniment petit d'ordre supérieur à mn, quelle que soit la construction dont on déduit le point m' du point m, puisque le numérateur $\sin \widehat{mnm'}$ a une limite finie différente de zéro.

On a pris pour infiniment petit principal l'arc Am ou la corde Am; on aurait obtenu le même résultat en prenant pour infiniment petit l'arc An de la courbe C', car Am et An sont du même ordre.

Lorsque deux courbes C, C' ont un contact d'ordre r, on peut imaginer une infinité de correspondances entre les points m, m' des deux courbes de façon que mm' soit un infiniment petit d'ordre $r+1$. Il suffit de prendre $k = h + \alpha h^{s+1}$, s étant $\geqq r$,

et α étant une fonction de h qui conserve une valeur finie lorsque $h = 0$. Si l'on avait $s < r$, mm' serait d'ordre $s+1$ seulement.

212. Pour avoir l'ordre du contact des deux courbes C, C', il faut, d'après cela, évaluer l'ordre infinitésimal de

$$Y - y = F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$$

par rapport à h. Les deux courbes étant tangentes au point A, on a d'abord $F(x_0) = f(x_0)$, $F'(x_0) = f'(x_0)$, mais il peut se faire qu'un certain nombre d'autres dérivées des deux fonctions soient égales pour x_0. Supposons, pour prendre le cas général, que l'on ait

$$(23) \quad \begin{cases} F(x_0) = f(x_0), & F'(x_0) = f'(x_0), \\ F''(x_0) = f''(x_0), \quad \ldots, & F^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0), \end{cases}$$

les dérivées suivantes $F^{(n+1)}(x_0)$ et $f^{(n+1)}(x_0)$ étant inégales. En appliquant la formule de Taylor aux deux fonctions $F(x)$ et $f(x)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} Y = F(x_0) + \frac{h}{1} F'(x_0) + \ldots \\ + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} [F^{(n+1)}(x_0) + \varepsilon], \\ y = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \ldots \\ + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} [f^{(n+1)}(x_0) + \varepsilon'], \end{aligned}$$

et, en retranchant membre à membre,

$$(24) \quad Y - y = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} [F^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0) + \varepsilon - \varepsilon'],$$

ε, ε' étant infiniment petits. *L'ordre du contact des deux courbes est donc égal à l'ordre des plus hautes dérivées des fonctions $f(x)$ et $F(x)$, qui sont égales pour $x = x_0$.*

Les conditions (23), données par Lagrange, expriment aussi que l'équation $F(x) = f(x)$ admet $x = x_0$ pour racine multiple d'ordre $n+1$. Or cette équation détermine les abscisses des points communs aux deux courbes C, C'; on peut donc dire que deux courbes, qui ont un contact d'ordre n, ont $n+1$ points d'intersection *confondus en un seul.*

La formule (24) montre que $Y - y$ change de signe avec h lorsque n est pair, et ne change pas de signe lorsque n est impair. Donc *deux courbes qui ont un contact d'ordre impair ne se traversent pas au point de contact, et deux courbes qui ont un contact d'ordre pair se traversent.* Il est aisé de s'en rendre compte. Considérons, pour fixer les idées, une courbe C' traversant la courbe C en trois points voisins du point A; si cette courbe C' se déforme d'une manière continue, de façon que les trois points d'intersection viennent se confondre au point A, la position limite de C' a un contact du second ordre avec C, et il suffit de faire la figure pour voir que les deux courbes se traversent au point A. Le raisonnement est évidemment général.

Lorsque les équations des deux courbes ne sont pas résolues par rapport aux ordonnées y et Y, ce qui est le cas général, les règles du calcul des dérivées permettent toujours de former les conditions nécessaires pour que les deux courbes aient un contact d'ordre n. Le problème n'offre donc aucune difficulté spéciale. Nous examinerons seulement quelques cas particuliers, d'une application fréquente. Supposons d'abord que les coordonnées d'un point de chaque courbe soient exprimées en fonction d'un paramètre variable

$$(C) \qquad \begin{cases} x = f(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases}$$

$$(C') \qquad \begin{cases} X = f(u), \\ Y = \psi(u), \end{cases}$$

et que pour une valeur particulière t_0 on ait à la fois $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$, $\psi'(t_0) = \varphi'(t_0)$, de façon que les deux courbes soient tangentes au point A, de coordonnées $f(t_0)$, $\varphi(t_0)$. Si $f'(t_0)$ n'est pas nul, ce que nous supposerons, la tangente commune n'est pas parallèle à Oy, et l'on obtient les points des deux courbes qui ont même abscisse en posant $u = t$. D'autre part, $x - x_0$ est du premier ordre par rapport à $t - t_0$, et nous sommes encore ramenés à évaluer l'ordre infinitésimal de $\psi(t) - \varphi(t)$ par rapport à $t - t_0$. Pour que les deux courbes aient un contact d'ordre n, il faut et il suffit que l'on ait

$$(25) \quad \psi(t_0) = \varphi(t_0), \qquad \psi'(t_0) = \varphi'(t_0), \qquad \ldots, \qquad \psi^{(n)}(t_0) = \varphi^{(n)}(t_0),$$

et le contact est d'ordre n seulement, si les deux dérivées $\psi^{(n+1)}(t_0)$ et $\varphi^{(n+1)}(t_0)$ sont inégales.

Considérons encore le cas où la courbe C est représentée par les deux équations

$$(26) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

la courbe C' ayant pour équation $F(x, y) = 0$. Ce cas peut se ramener au précédent; remplaçons x par $f(t)$ dans $F(x, y)$ et soit $y = \psi(t)$ la fonction implicite définie par la relation

$$(27) \qquad F[f(t), \psi(t)] = 0,$$

de sorte qu'on peut aussi regarder la courbe C' comme représentée par le système des deux équations

$$(28) \qquad x = f(t), \qquad y = \psi(t).$$

Pour que les deux courbes C, C' aient un contact d'ordre n au point A qui correspond à la valeur t_0 du paramètre, il faut que les relations (25) trouvées plus haut soient satisfaites. Or les dérivées successives de la fonction implicite $\psi(t)$ se déduisent des équations

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x} f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \psi'(t) = 0, \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} [f'(t)]^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f'(t) \psi'(t) \\ & \qquad + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} [\psi'(t)]^2 + \frac{\partial F}{\partial x} f''(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \psi''(t) = 0, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ & \frac{\partial^n F}{\partial x^n} [f'(t)]^n + \dots + \frac{\partial F}{\partial y} \psi^{(n)}(t) = 0; \end{aligned} \right.$$

on obtiendra les conditions du contact en faisant, dans ces formules, $t = t_0$, $x = f(t_0)$, $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$, $\psi'(t_0) = \varphi'(t_0)$, ..., $\psi^{(n)}(t_0) = \varphi^{(n)}(t_0)$. Ces conditions peuvent s'énoncer comme il suit. Posons $\mathcal{F}(t) = F[f(t), \varphi(t)]$; *pour que les deux courbes aient un contact d'ordre n au point $t = t_0$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(30) \qquad \mathcal{F}(t_0) = 0, \qquad \mathcal{F}'(t_0) = 0, \qquad \dots, \qquad \mathcal{F}^{(n)}(t_0) = 0.$$

L'équation $\mathcal{F}(t) = 0$ donne les valeurs du paramètre t qui correspondent aux points d'intersection des deux courbes. Les condi-



tions du contact expriment encore que cette équation admet $t=$ pour racine multiple d'ordre $n+1$, c'est-à-dire que les deux courbes ont $n+1$ points communs confondus en un seul.

213. Courbes osculatrices. — Étant donnée une courbe déterminée C, et une courbe C′, dépendant de $n+1$ paramètres $a, b, c, \ldots, l$,

$$F(x, y, a, b, c, \ldots, l) = 0, \tag{31}$$

on peut choisir les valeurs de ces $n+1$ paramètres de façon que la courbe C′ ait avec la courbe C, en un point donné à l'avance, un contact d'ordre n. Soient $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ les coordonnées d'un point de C; les conditions pour que les deux courbes C, C′ aient un contact d'ordre n au point $t=t_0$ sont données par les équations (30), où l'on a posé

$$\mathcal{F}(t) = F[f(t), \varphi(t), a, b, c, \ldots, l].$$

La valeur t_0 du paramètre étant donnée, ces $n+1$ équations déterminent les $n+1$ paramètres $a, b, c, \ldots, l$. La courbe C′ ainsi obtenue est dite *osculatrice* à la courbe C.

Appliquons cette théorie aux courbes les plus simples. L'équation d'une droite $y=ax+b$ dépend de deux paramètres a et b; la droite osculatrice a donc un contact du premier ordre. Si $y=f(x)$ est l'équation de la courbe C, les paramètres a et b doivent vérifier les deux relations

$$f(x_0) = ax_0 + b, \qquad f'(x_0) = a;$$

on retrouve l'équation de la tangente, comme on devait s'y attendre. L'équation d'un cercle

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0 \tag{32}$$

dépend de trois paramètres a, b, R; le cercle osculateur a donc un contact du second ordre. Soit $y=f(x)$ l'équation de la courbe donnée; on déterminera a, b, R en écrivant que le cercle rencontre cette courbe en trois points confondus, ce qui donne, avec l'équation (32), les deux conditions

$$x - a + (y-b)y' = 0, \qquad 1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0. \tag{33}$$

Les valeurs de a et b que l'on déduit de ces deux relations sont

identiques aux coordonnées du centre de courbure (n° 205); donc *le cercle osculateur coïncide avec le cercle de courbure.* Le contact étant du second ordre, nous pouvons en conclure que *le cercle de courbure d'une courbe plane traverse cette courbe au point de contact.*

Tous ces résultats pouvaient être prévus *a priori*. En effet, les coordonnées du centre de courbure ne dépendent que de x, y, y', y''; deux courbes qui ont un contact du second ordre ont donc même centre de courbure. Or le centre de courbure du cercle osculateur est évidemment le centre de ce cercle lui-même; donc il y a identité entre le cercle de courbure et le cercle osculateur. Considérons, d'autre part, deux cercles de courbure voisins; la différence des rayons, qui est égale à l'arc de la développée compris entre les deux centres, est supérieure à la distance des centres. L'un des deux cercles est donc tout entier intérieur à l'autre, ce qui ne pourrait avoir lieu si les cercles étaient tous les deux intérieurs ou tous les deux extérieurs à la courbe C, dans le voisinage du point de contact. Il faut donc qu'ils traversent la courbe C.

Il y a cependant sur une courbe plane certains points particuliers où le cercle osculateur ne traverse pas la courbe, et cette remarque se rattache à une propriété générale. Étant donnée une courbe C' dépendant de $n+1$ paramètres, on peut ajouter aux $(n+1)$ équations (30) la nouvelle équation

$$\mathcal{F}^{(n+1)}(t_0) = 0,$$

à condition de regarder t_0 comme une nouvelle inconnue à déterminer. Il y a donc, en général, sur une courbe plane C, un certain nombre de points où le contact avec la courbe osculatrice C' est d'ordre $n+1$. Ainsi, il y a des points où la tangente a un contact du second ordre; ce sont les points d'inflexion, pour lesquels $y'' = 0$. Pour avoir les points où le cercle osculateur a un contact du troisième ordre, il faut différentier la dernière des équations (33), ce qui donne

$$3y'y'' + (y - b)y''' = 0,$$

et, en éliminant $y - b$, on est conduit à la condition

$$(34) \qquad (1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$$

Les points qui satisfont à cette condition sont ceux pour lesquels on a $\frac{dR}{dx} = 0$, c'est-à-dire où le rayon de courbure est maximum ou minimum. Pour une ellipse, ce sont les sommets; pour une cycloïde, les points où la tangente est parallèle à la base.

214. Une courbe osculatrice peut être regardée comme la position limite d'une courbe C', qui rencontre la courbe C en $n+1$ points infiniment voisins, lorsque tous ces points sont venus se confondre. Prenons, pour fixer les idées, une famille de courbes dépendant de trois paramètres a, b, c, et soient $t_0 + h_1$, $t_0 + h_2$, $t_0 + h_3$ trois valeurs voisines de t_0; la courbe C' qui rencontre la courbe C aux trois points correspondants est déterminée par les trois équations

$$(35) \qquad \mathfrak{F}(t_0 + h_1) = 0, \qquad \mathfrak{F}(t_0 + h_2) = 0, \qquad \mathfrak{F}(t_0 + h_3) = 0.$$

Retranchons la première équation de chacune des deux autres, et appliquons aux deux différences la formule des accroissements finis, nous obtenons le système équivalent

$$(36) \qquad \mathfrak{F}(t_0 + h_1) = 0, \qquad \mathfrak{F}'(t_0 + k_1) = 0, \qquad \mathfrak{F}'(t_0 + k_2) = 0,$$

où k_1 est compris entre h_1 et h_2, k_2 entre h_1 et h_3. En retranchant de nouveau la seconde équation de la troisième, et appliquant la formule des accroissements finis, on arrive à un nouveau système

$$(37) \qquad \mathfrak{F}(t_0 + h_1) = 0, \qquad \mathfrak{F}'(t_0 + k_1) = 0, \qquad \mathfrak{F}''(t_0 + l_1) = 0,$$

l_1 étant compris entre k_1 et k_2. Lorsque h_1, h_2, h_3 tendent vers zéro, il en est de même de k_1, k_2, l_1, et ces équations deviennent à la limite

$$\mathfrak{F}(t_0) = 0, \qquad \mathfrak{F}'(t_0) = 0, \qquad \mathfrak{F}''(t_0) = 0;$$

ce sont justement les équations qui déterminent la courbe osculatrice. Le raisonnement est le même, quel que soit le nombre des paramètres, et l'on pourrait aussi définir la courbe osculatrice comme la limite d'une courbe C' tangente en p points à la courbe C, et la coupant en q autres points (où $2p + q = n+1$), lorsque ces $p+q$ points viennent se confondre en un seul.

Par exemple, le cercle osculateur est la position limite d'un cercle passant par trois points de la courbe C infiniment voisins

du point de contact. C'est aussi la position limite d'un cercle tangent à la courbe C au point donné et passant par un autre point de la courbe C infiniment voisin du premier. Je m'arrêterai un instant sur cette propriété, facile à vérifier.

Prenons pour origine le point donné, pour axe des x la tangente, et pour direction positive de Oy la direction de la normale qui va vers le centre de courbure. Nous avons à l'origine $y' = 0$ et, par suite, $R = \frac{1}{y''}$, et nous pouvons écrire, d'après la formule de Taylor,

$$y = x^2\left(\frac{1}{2R} + \varepsilon\right),$$

ε étant infiniment petit avec x. On déduit de là que R est la limite de l'expression $\frac{x^2}{2y} = \frac{\overline{OP}^2}{2MP}$ lorsque le point M se rapproche du point O. Soit, d'autre part, R_1 le rayon du cercle C_1 tangent à

Fig. 47.

l'origine à l'axe des x et passant par le point M. On a

$$\overline{OP}^2 = \overline{Mm}^2 = MP(2R_1 - MP)$$

ou

$$\frac{\overline{OP}^2}{2MP} = R_1 - \frac{MP}{2};$$

la limite du rayon R_1 est donc bien égale au rayon de courbure R.

EXERCICES.

1. Appliquer les formules générales à la recherche de la développée de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole.

2. Le rayon de courbure d'une conique est proportionnel au cube de la portion de normale comprise entre le point d'incidence et le point de rencontre avec un axe de symétrie.

3. Le rayon de courbure de la parabole est égal au double de la portion de normale comprise entre le point d'incidence et le point de rencontre avec la directrice.

4. Soient F et F′ les foyers d'une ellipse, M un point de cette ellipse, MN la normale et N le point de rencontre de la normale avec l'axe focal. Si du point N on mène une perpendiculaire NK sur MN et que, par le point de rencontre K de cette droite avec MF on élève une perpendiculaire KO à MF, le point de rencontre O de KO avec MN est le centre de courbure de l'ellipse au point M.

5. Pour les sommets d'une ellipse situés sur l'axe focal, la construction précédente ne donne rien. Démontrer la construction suivante : soient AOA′ l'axe focal, BOB′ le petit axe ; on trace le rectangle OAEB construit sur OA et sur OB et du sommet E on abaisse une perpendiculaire sur AB ; les points C et D où cette droite coupe les axes sont les centres de courbure relatifs aux sommets A et B.

6. La développée de la spirale logarithmique $\rho = ae^{m\omega}$ est une spirale égale à la première.

7. On appelle *épicycloïde* ou *hypocycloïde* la courbe décrite par un point d'une circonférence qui roule sans glisser sur une circonférence fixe. Démontrer que la développée de cette courbe est une courbe semblable.

8. Soit AB un arc de courbe sur lequel il n'y a ni points singuliers, ni points d'inflexion. En chaque point m de l'arc, on porte sur la normale, à partir de m, de part et d'autre, les longueurs mm_1, mm_2 égales à une ligne donnée l ; le point m décrivant l'arc AB, les points m_1, m_2 décrivent deux arcs correspondants A_1B_1, A_2B_2. Démontrer les relations suivantes : $S_1 = S - l\theta$, $S_2 = S + l\theta$, dans lesquelles S, S_1, S_2 représentent les longueurs des arcs AB, A_1B_1, A_2B_2, θ l'angle des normales extrêmes. On suppose que l'arc A_1B_1, situé du côté de l'arc AB où se trouve sa développée, ne rencontre pas cette développée.

[LICENCE : Paris ; juillet 1879.]

9. Déterminer une courbe C de façon que le rayon de courbure ρ en un point quelconque M de cette courbe et l'arc $s = $ AM, compté à partir d'un

point fixe A, vérifient la relation $as = \rho^2 + a^2$, dans laquelle a désigne une ligne donnée.

[LICENCE : Paris; juillet 1883.]

10. Soit C une courbe du troisième degré donnée, ayant un point double en O. Un angle droit MON tourne autour du point O, et ses côtés rencontrent respectivement la courbe C en M et N. Déterminer l'enveloppe de la droite MN. Considérer, en particulier, le cas où la courbe C a pour équation $\lambda y^2 = x^3$, ou $x^3 + y^3 = \mu xy$.

[LICENCE : Bordeaux; juillet 1885.]

11. Trouver les points où la courbe représentée par les équations

$$x = a(n\omega - \sin\omega), \qquad y = a(n - \cos\omega)$$

a un contact d'ordre supérieur au second avec le cercle osculateur.

[LICENCE : Grenoble, juillet 1885.]

12. Soient m, m_1, m_2 trois points voisins sur une courbe plane. Trouver la valeur limite du rayon du cercle circonscrit au triangle que forment les tangentes en ces trois points, lorsqu'ils viennent se confondre.

13. Si une courbe fermée sans point d'inflexion a une développée fermée, la longueur totale de cette développée est égale au double de la différence entre la somme des rayons de courbure maxima et la somme des rayons de courbure minima, pour tous les points de la courbe proposée.

14. Si l'on mène par chaque point d'une courbe une droite de longueur donnée faisant un angle constant avec la normale, la normale à la courbe, lieu des extrémités de cette droite, passe par le centre de courbure de la proposée.

15. Soient r le rayon vecteur mené d'un pôle fixe à un point d'une courbe plane, p la distance de ce pôle à la tangente; le rayon de courbure R a pour expression $R = \pm r \dfrac{dr}{dp}$.

16. Le lieu des foyers des paraboles qui, en un point donné, ont un contact du second ordre avec une courbe donnée, est un cercle.

17. Lieu des centres des ellipses dont les axes ont une direction donnée, et qui ont, en un point donné, un contact du second ordre avec une courbe donnée.



CHAPITRE XI.

COURBES GAUCHES.

I. — PLAN OSCULATEUR.

215. Définition et équation. — Soit M un point d'une courbe gauche Γ, MT la tangente en ce point; le plan passant par la droite MT et par un autre point M' de Γ, infiniment voisin du point M, tend en général vers une position limite quand le point M' se rapproche de plus en plus du point M; on appelle ce plan limite le *plan osculateur* à la courbe Γ au point M. Nous allons d'abord chercher son équation.

Soient

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t) \tag{1}$$

les formules qui donnent les coordonnées d'un point de Γ en fonction d'un paramètre, les points M et M' correspondant aux valeurs t et $t+h$ de ce paramètre. Le plan MTM' a pour équation

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

les coefficients A, B, C devant vérifier les relations

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0, \tag{2}$$

$$A[f(t+h)-f(t)]+B[\varphi(t+h)-\varphi(t)]+C[\psi(t+h)-\psi(t)]=0. \tag{3}$$

Remplaçons, dans la relation (3), $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$ par leurs développements déduits de la formule de Taylor, elle peut encore s'écrire

$$A\left\{hf'(t)+\frac{h^2}{1.2}[f''(t)+\varepsilon_1]\right\}+B\left\{h\varphi'(t)+\frac{h^2}{1.2}[\varphi''(t)+\varepsilon_2]\right\}+\ldots=0;$$

en retranchant la relation (2) multipliée par h, et divisant le

résultat par $\frac{h^2}{2}$, on voit que le système des relations (2) et (3) est équivalent au suivant

$$A f'(t) + B\varphi'(t) + C\psi'(t) = 0,$$

$$A[f''(t) + \varepsilon_1] + B[\varphi''(t) + \varepsilon_2] + C[\psi''(t) + \varepsilon_3] = 0,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ étant infiniment petits avec h. Lorsque h tend vers zéro, cette dernière relation se réduit à

$$(4) \qquad A f''(t) + B\varphi''(t) + C\psi''(t) = 0.$$

L'équation du plan osculateur est donc

$$(5) \qquad A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

les coefficients A, B, C étant assujettis à vérifier les deux relations

$$(6) \qquad \begin{cases} A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \\ A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0. \end{cases}$$

On écrit aussi quelquefois l'équation du plan osculateur sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

De tous les plans passant par la tangente, *le plan osculateur est celui dont la courbe* Γ *se rapproche le plus* dans le voisinage du point de contact. Considérons d'abord un plan, autre que le plan osculateur, passant par la tangente, et soit $F(t)$ le résultat de la substitution de $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$ à la place des coordonnées courantes X, Y, Z dans le premier membre de l'équation (5); nous avons

$$F(t) = \frac{h^2}{1.2}\,[A f''(t) + B\varphi''(t) + C\psi''(t) + \eta],$$

η étant infiniment petit avec h. La distance d'un point de Γ, voisin du point M, est donc infiniment petite *du second ordre;* de plus, $F(t)$ conservant toujours le même signe lorsque h est très petit, on voit que la courbe Γ est tout entière du même côté du plan tangent dans le voisinage du point de contact.

Il n'en est plus de même avec le plan osculateur; pour ce plan,

on a $Af''' + B\varphi''' + C\psi''' = 0$, et il faut pousser le développement des coordonnées d'un point de Γ jusqu'aux termes du troisième ordre en h, ce qui donne après la substitution

$$F(t) = \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z}{dt^3} + \eta\right).$$

On voit que la distance d'un point de Γ au plan osculateur est infiniment petite *du troisième ordre;* en outre, $F(t)$ change de signe lorsque h change de signe, ce qui prouve que *la courbe gauche traverse le plan osculateur au point de contact.* Ces propriétés distinguent nettement le plan osculateur de tous les autres plans passant par la tangente.

216. Plans osculateurs stationnaires. — Les conclusions précédentes sont en défaut dans le cas où les coefficients A, B, C de l'équation du plan osculateur vérifient la relation

(7) $$A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z = 0;$$

dans ce cas, il faut pousser le développement des coordonnées jusqu'aux termes du quatrième ordre, et l'on obtient un résultat de la forme

$$F(t) = \frac{h^4}{1.2.3.4}\left(\frac{A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z}{dt^4} + \eta\right).$$

On dit qu'en ces points le plan osculateur est *stationnaire;* si $A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z$ n'est pas nul, ce qui est le cas général, $F(t)$ ne change pas de signe avec h et *la courbe ne traverse pas son plan osculateur*. De plus, la distance d'un point de la courbe au plan osculateur est du quatrième ordre. Si l'on avait encore $A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z = 0$, il faudrait pousser le développement jusqu'aux termes du cinquième ordre, et ainsi de suite.

En éliminant A, B, C entre les trois relations (6) et (7), on est conduit à l'équation

(8) $$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0;$$

les racines de cette équation en t donnent les points de la courbe Γ où le plan osculateur est stationnaire. Il y a ainsi, d'une façon

normale, sur toute courbe gauche, un certain nombre de points jouissant de cette propriété.

Ceci nous amène à examiner s'il existe des courbes Γ dont tous les plans osculateurs soient stationnaires. D'une façon précise, cherchons toutes les fonctions x, y, z d'une variable t, continues ainsi que leurs dérivées jusqu'au troisième ordre, telles que le déterminant précédent Δ soit identiquement nul lorsque t varie entre deux limites a et b $(a < b)$.

Supposons d'abord que l'un des mineurs de Δ relatifs aux éléments de la troisième ligne, par exemple $dx\,d^2y - dy\,d^2x$, ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b). Les deux relations

$$(9)\qquad \begin{cases} dz = C_1\,dx + C_2\,dy, \\ d^2z = C_1\,d^2x + C_2\,d^2y, \end{cases}$$

déterminent pour C_1 et C_2 des fonctions continues de t dans cet intervalle; puisque $\Delta = 0$, ces fonctions satisfont aussi à la relation

$$(10)\qquad d^3z = C_1\,d^3x + C_2\,d^3y.$$

Différentions maintenant les équations (9) en tenant compte de la formule (10); nous obtenons les nouvelles équations

$$dC_1\,dx + dC_2\,dy = 0, \qquad dC_1\,d^2x + dC_2\,d^2y = 0,$$

d'où nous tirons $dC_1 = dC_2 = 0$. Les coefficients C_1, C_2 sont donc constants et, en intégrant la première des équations (9), il vient

$$z = C_1 x + C_2 y + C_3,$$

C_3 étant une nouvelle constante. La courbe Γ est donc une courbe plane.

Si le déterminant $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ s'annule pour une valeur c de la variable t comprise entre a et b, le raisonnement ne prouve plus rien, car les expressions de C_1 et de C_2 deviennent infinies ou indéterminées pour cette valeur c de t. Supposons, pour fixer les idées, que ce déterminant ne s'annule que pour cette valeur de t dans l'intervalle (a, b) et que, pour $t = c$, le déterminant analogue $dx\,d^2z - dz\,d^2x$ ne soit pas nul. Le raisonnement qui précède prouve que tous les points de la courbe Γ obtenus en faisant varier t de a à c sont dans un même plan P, et que tous les points obtenus en faisant varier t de c à b sont dans un même plan Q. D'autre part, le mineur $dx\,d^2z - dz\,d^2x$ n'étant pas nul pour

$t = c$, choisissons un nombre h assez petit pour que ce mineur ne s'annule pas en faisant varier t de $c-h$ à $c+h$. Tous les points de la courbe Γ obtenus en faisant varier t de $c-h$ à $c+h$ sont encore dans un même plan R; ce plan R doit avoir une infinité de points communs avec les plans P et Q et, par suite, ces trois plans coïncident.

En généralisant ce raisonnement, on en conclut que tous les points de la courbe Γ sont dans un même plan, lorsque les trois déterminants

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x, \quad dx\,d^2z - dz\,d^2x, \quad dy\,d^2z - dz\,d^2y,$$

ne s'annulent pas simultanément dans l'intervalle (a, b). Si ces trois déterminants s'annulent en même temps, il peut arriver que la courbe Γ se compose de plusieurs arcs de courbes planes situés dans des plans distincts, qui se rejoignent en des points où l'équation du plan osculateur est indéterminée ([1]).

Lorsque les trois mineurs précédents sont identiquement nuls dans un certain intervalle, la courbe Γ est une ligne droite, ou se compose de portions de droites. Si, par exemple, $\frac{dx}{dt}$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b), on peut écrire

$$\frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{(dx)^2} = 0, \qquad \frac{d^2z\,dx - dz\,d^2x}{(dx)^2} = 0,$$

et l'on en conclut que l'on a

$$dy = C_1\,dx, \qquad dz = C_2\,dx,$$

C_1 et C_2 étant deux constantes; une nouvelle intégration donne ensuite

$$y = C_1 x + C'_1, \qquad z = C_2 x + C'_2,$$

ce qui montre que la courbe Γ est une ligne droite.

217. Tangentes stationnaires. — Ce qui précède nous conduit à étudier sur une courbe gauche certains points exceptionnels que nous n'avons pas encore définis; ce sont les points où l'on a

$$(11) \qquad \frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{d^2z}{dz};$$

on dit qu'en ces points la tangente est *stationnaire*. On démontre aisément, en appliquant la formule qui donne la distance d'un point à une droite, que la distance d'un point de Γ à la tangente en un point voisin, qui est en général du second ordre, est du troisième ordre pour une tangente stationnaire. Si la courbe Γ se réduit à une courbe plane, les tan-

([1]) Ce cas singulier paraît avoir été signalé pour la première fois par M. Peano. Il n'offre évidemment qu'un intérêt purement analytique.



gentes stationnaires sont les tangentes d'inflexion. Le calcul que nous venons de faire prouve que la seule courbe dont toutes les tangentes soient stationnaires est la ligne droite.

En un point où la tangente est stationnaire, on a $\Delta = 0$, et l'équation du plan osculateur se présente sous forme indéterminée. Mais cette indétermination n'est qu'apparente. En effet, si nous reprenons les calculs faits au début du n° 215, en poussant le développement des coordonnées du point M' jusqu'aux termes du troisième ordre, et utilisant les relations (11), nous trouvons que l'équation du plan passant par la tangente en M et par le point voisin M' peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f'''(t) + \varepsilon_1 & \varphi'''(t) + \varepsilon_2 & \psi'''(t) + \varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ε_1, ε_2, ε_3 tendant vers zéro avec h. Ce plan tend donc vers une position limite parfaitement déterminée; on obtiendra l'équation du plan osculateur en remplaçant la seconde des conditions (6) par la suivante

$$A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z = 0.$$

Si l'on avait aussi

$$\frac{d^3x}{dx} = \frac{d^3y}{dy} = \frac{d^3z}{dz},$$

il faudrait remplacer la seconde des relations (6) par

$$A\,d^qx + B\,d^qy + C\,d^qz = 0,$$

q étant le plus petit nombre entier, tel que cette relation soit distincte de $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$. Nous laisserons au lecteur le soin de le démontrer, et d'étudier la position de la courbe par rapport au plan osculateur. Dans le cas général, où l'on n'a pas

$$A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z = 0,$$

un plan tangent quelconque est traversé par la courbe gauche, sauf le plan osculateur qui n'est pas traversé.

218. Application à quelques courbes. — Considérons en particulier les courbes gauches Γ qui satisfont à une relation de la forme

$$x\,dy - y\,dx = K\,dz, \tag{12}$$

K étant une constante donnée; de cette relation on déduit encore

$$\left\{\begin{aligned} x\,d^2y - y\,d^2x &= K\,d^2z, \\ x\,d^3y - y\,d^3x + dx\,d^2y - dy\,d^2x &= K\,d^3z. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Étant donnée une courbe de cette espèce, proposons-nous de trouver les

plans osculateurs qui passent par un point donné (a, b, c) de l'espace. Les coordonnées du point de contact (x, y, z) doivent satisfaire à l'équation

$$\begin{vmatrix} a-x & b-y & c-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

qui devient, en tenant compte des relations (12) et (13),

$$(14) \qquad ay - bx + K(c - z) = 0;$$

les points de contact sont donc à l'intersection de la courbe gauche Γ et du plan représenté par l'équation (14), plan qui passe par le point (a, b, c).

L'équation $\Delta = 0$, qui détermine les points où le plan osculateur est stationnaire, devient de même, en remplaçant dz, d^2z et d^3z par leurs valeurs,

$$\Delta = \frac{1}{K}(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = 0;$$

on aura donc, pour ces points,

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{y\,d^2x - x\,d^2y}{y\,dx - x\,dy} = \frac{d^2z}{dz},$$

ce qui montre que la tangente est stationnaire.

Il est facile d'avoir des courbes gauches satisfaisant à la relation (12); il suffit, par exemple, de poser

$$x = A t^m, \qquad y = B t^n, \qquad z = C t^{m+n},$$

A, B, C, m, n étant constants. Les courbes les plus simples sont la cubique gauche $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, et la courbe gauche du quatrième ordre $x = t$, $y = t^3$, $z = t^4$. L'hélice circulaire

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = Kt$$

répond aussi à la question.

Pour obtenir toutes les courbes gauches satisfaisant à la relation (12), écrivons-la

$$d(xy - Kz) = 2y\,dx;$$

si l'on a

$$x = f(t), \qquad xy - Kz = \varphi(t),$$

cette relation nous donne $2yf'(t) = \varphi'(t)$. En résolvant ces trois équations par rapport à x, y, z, nous obtenons les expressions générales des coordonnées en fonction d'un paramètre variable

$$(15) \qquad x = f(t), \qquad y = \frac{\varphi'(t)}{2f'(t)}, \qquad Kz = \frac{f(t)\varphi'(t)}{2f'(t)} - \varphi(t).$$

Ces formules dépendent de deux fonctions arbitraires f et φ, mais il est clair qu'on peut prendre pour l'une de ces fonctions une forme particulière, par exemple poser $f(t) = t$.

II. — SURFACES ENVELOPPES.

Avant d'étudier la courbure des courbes gauches, nous ferons une digression sur la théorie des surfaces enveloppes.

219. Surfaces à un paramètre. — Soit

$$f(x, y, z, a) = 0 \tag{16}$$

l'équation d'une surface S, dépendant d'un paramètre arbitraire a. S'il existe une surface E tangente à chacune des surfaces S le long d'une courbe C, cette surface E est appelée l'*enveloppe* des surfaces S, et la courbe de contact C des deux surfaces S et E est la *caractéristique*.

Pour reconnaître s'il existe une enveloppe, il faut donc examiner s'il est possible de déterminer sur chacune des surfaces S une courbe C telle que le lieu de ces courbes soit tangent à la surface S le long de C. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de la caractéristique; si ce point n'est pas un point singulier de la surface S, l'équation du plan tangent à cette surface est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

D'autre part, quand on se déplace sur l'enveloppe E, x, y, z, a sont des fonctions de deux variables indépendantes vérifiant l'équation (16) et, entre leurs différentielles, on a la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial a}da = 0; \tag{17}$$

pour que le plan tangent à la surface E soit identique au plan tangent à S, il faut et il suffit que l'on ait entre les différentielles dx, dy, dz, la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

condition qui devient, en tenant compte de la précédente,

$$(18) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

On démontrera inversement, comme pour les courbes planes (n° **201**), que la surface $R(x, y, z) = 0$, obtenue par l'élimination du paramètre a entre les deux équations (16) et (18), représente, soit l'enveloppe des surfaces S, soit le lieu des points singuliers. La caractéristique C représentée par les équations (16) et (18) est encore la position limite de la courbe d'intersection de la surface S avec une surface infiniment voisine de la même famille.

220. Surfaces à deux paramètres. — Considérons maintenant une équation

$$(19) \qquad f(x, y, z, a, b) = 0,$$

qui représente des surfaces S dépendant de deux paramètres a et b. Il n'existe pas en général de surface tangente à toutes les surfaces de cette famille tout le long d'une courbe; en effet, si l'on établit entre les deux paramètres a et b une relation $b = \varphi(a)$, on a des surfaces ne dépendant plus que d'un paramètre a, et la caractéristique est représentée par l'équation (19) jointe à l'équation

$$(20) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a) = 0.$$

Cette caractéristique dépend en général de $\varphi'(a)$, de sorte que sur chaque surface S il y a une infinité de caractéristiques; elles n'engendrent donc pas une surface lorsque a et b varient. Nous allons chercher s'il existe une surface E touchant chacune des surfaces en un point seulement, ou en quelques points, et non tout le long d'une courbe. Si cette surface existe, les coordonnées (x, y, z) d'un point de contact de la surface S avec l'enveloppe E sont des fonctions des deux paramètres variables a et b qui satisfont à la relation (19) et dont les différentielles dx, dy, dz vérifient par conséquent la relation

$$(21) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db = 0.$$

Pour que la surface, lieu du point (x, y, z), soit tangente à la

surface S, il faut encore que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0,$$

relation qui devient, en tenant compte de la précédente,

$$\frac{\partial f}{\partial a}\,da + \frac{\partial f}{\partial b}\,db = 0.$$

Comme a et b sont deux variables indépendantes, il faudra que l'on ait à la fois, pour le point de contact,

$$(22) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

On obtiendra donc l'équation de l'enveloppe en éliminant a et b entre les trois relations (19) et (22). Le raisonnement prouve bien que la surface ainsi trouvée est tangente à la surface S, sauf si l'on a à la fois, pour les solutions communes aux équations (19) et (22),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

cette surface est donc soit l'enveloppe, soit le lieu des points singuliers des surfaces S.

Nous avons donc, en définitive, deux espèces de surfaces enveloppes, suivant que les surfaces enveloppées dépendent de un ou deux paramètres. Par exemple, le plan tangent à une sphère ou à un hyperboloïde dépend de deux paramètres, et ce plan touche la surface en un point seulement. Au contraire, le plan tangent à un cône ou à un cylindre ne dépend que d'un paramètre variable, mais ce plan touche son enveloppe tout le long d'une génératrice.

221. Surfaces développables. — La surface enveloppée par un plan ne dépendant que d'un paramètre variable est appelée *surface développable*.

Soit

$$(23) \qquad z = \alpha x + y f(\alpha) + \varphi(\alpha)$$

l'équation du plan mobile P, α étant un paramètre variable, $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ deux fonctions quelconques de ce paramètre. La caractéristique est définie par l'équation (23) jointe à l'équation

$$(24) \qquad x + y f'(\alpha) + \varphi'(\alpha) = 0,$$

obtenue en différentiant par rapport à α; c'est donc une ligne droite G, et la surface développable est une surface réglée. Nous allons démontrer que toutes ces droites G sont tangentes à une courbe gauche. Pour cela, différentions encore une fois par rapport à α; la nouvelle équation obtenue

$$yf''(\alpha) + \varphi''(\alpha) = 0 \tag{25}$$

détermine sur la caractéristique G un point particulier M. Le lieu de ces points M, lorsque α varie, est une courbe gauche Γ, dont la tangente est la droite G elle-même. La courbe Γ est, en effet, représentée par les trois équations (23), (24), (25), dont on pourrait tirer les coordonnées x, y, z en fonction de α. Si l'on différentie les deux premières de ces équations, en ayant égard à la dernière, il vient

$$dz = \alpha\, dx + f(\alpha)\, dy, \qquad dx + f'(\alpha)\, dy = 0, \tag{26}$$

relations qui expriment que la tangente à la courbe Γ est parallèle à la caractéristique G. D'ailleurs ces deux droites ont un point commun; donc elles se confondent.

Le plan osculateur à la courbe Γ est précisément le plan P lui-même. Il suffit, pour le prouver, de démontrer que l'on a

$$dz = \alpha\, dx + f(\alpha)\, dy,$$
$$d^2 z = \alpha\, d^2 x + f(\alpha)\, d^2 y,$$

dx, dy, dz, $d^2 x$, $d^2 y$, $d^2 z$ étant les différentielles du premier et du deuxième ordre de x, y, z par rapport à α. La première de ces relations a déjà été établie, car c'est la première des relations (26); si on la différentie de nouveau, il vient

$$d^2 z = \alpha\, d^2 x + f(\alpha)\, d^2 y + [dx + f'(\alpha)\, dy]\, d\alpha,$$

ce qui donne la dernière relation à établir, en tenant compte de la seconde des relations (26). *Toute surface développable peut donc être définie comme la surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche* Γ. Cette courbe Γ peut, comme cas exceptionnel, se réduire à un point, à distance finie ou à l'infini; la surface est alors un cône ou un cylindre. C'est ce qui arrive lorsque $f''(\alpha) = 0$.

Réciproquement, toute surface engendrée par les tangentes à

une courbe gauche Γ est une surface développable. Soient

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

les coordonnées d'un point de Γ; le plan osculateur

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

dépend d'un seul paramètre variable t; nous allons vérifier que la caractéristique de ce plan est précisément la tangente. Cette caractéristique est l'intersection du plan osculateur avec le plan

$$dA(X-x) + dB(Y-y) + dC(Z-z) = 0,$$

qui passe également par le point x, y, z. Pour démontrer qu'elle se confond avec la tangente, il suffit de prouver que l'on a

$$\begin{aligned} A\,dx + B\,dy + C\,dz &= 0, \\ dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz &= 0; \end{aligned}$$

la première de ces relations est une des relations (6) qui déterminent les coefficients A, B, C. La seconde s'obtient en différentiant la première et tenant compte de la dernière des formules (6),

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0.$$

Ce mode de génération d'une surface développable permet de se faire une idée assez nette de la forme de la surface. Soit AB un arc de courbe gauche; par chaque point M de l'arc AB menons la tangente, et ne considérons que la portion de tangente qui correspond à une direction déterminée, par exemple celle de A vers B. Le lieu de ces demi-droites est une nappe de surface S_1 limitée par l'arc AB et les deux tangentes en A et B, s'étendant d'autre part jusqu'à l'infini. En prenant de même les autres portions de tangentes, on obtient une autre nappe de surface analogue S_2, qui se raccorde avec S_1 le long de l'arc AB; les deux nappes de surface paraissent se recouvrir partiellement pour un observateur placé au-dessus. Il est clair que tout plan passant par un point O de l'arc AB coupe les deux nappes S_1 et S_2 suivant deux branches de courbe qui viennent se raccorder au point O, en formant un rebroussement; cette propriété explique le nom d'*arête de rebroussement* donné à la courbe gauche Γ.

Il est aisé de le vérifier par le calcul. Prenons le point O pour

origine, le plan sécant pour plan des xy, la tangente pour axe des z, le plan osculateur pour plan des xz; si l'on a pris z pour la variable indépendante, les développements de x et de y sont de la forme

$$x = a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \qquad y = b_3 z^3 + \ldots,$$

car on doit avoir, pour l'origine,

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dy}{dz} = \frac{d^2 y}{dz^2} = 0,$$

et les équations de la tangente en un point voisin de l'origine s'écrivent

$$\frac{X - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \ldots}{2 a_2 z + \ldots} = \frac{Y - b_3 z^3 - \ldots}{3 b_3 z^2 + \ldots} = Z - z.$$

Si l'on y fait $Z = 0$, on a les coordonnées X, Y du point de rencontre de la tangente avec le plan sécant; les développements de ces coordonnées commencent respectivement par un terme en z^2 et par un terme en z^3. On a donc bien un rebroussement à l'origine.

Exemple. — Prenons pour arête de rebroussement la cubique gauche $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. L'équation du plan osculateur est

$$(27) \qquad t^3 - 3t^2 X + 3tY - Z = 0;$$

on obtiendra l'équation de la surface développable en écrivant que l'équation précédente, considérée comme une équation en t, admet une racine double, ce qui revient à éliminer t entre les deux équations

$$(28) \qquad \begin{cases} t^2 - 2tX + Y = 0, \\ Xt^2 - 2tY + Z = 0. \end{cases}$$

Le résultat de l'élimination est

$$(XY - Z)^2 - 4(X^2 - Y)(Y^2 - XZ) = 0;$$

la surface développable est donc du quatrième ordre.

On peut remarquer que les équations (28) représentent la tangente à la cubique gauche.

222. Si $z = F(x, y)$ est l'équation d'une surface développable, *la fonction* $F(x, y)$ *satisfait à l'équation* $s^2 - rt = 0$, r, s, t désignant, suivant l'usage, les trois dérivées partielles du deuxième ordre de la fonction $F(x, y)$.

En effet, le plan tangent à cette surface, qui a pour équation

$$Z = pX + qY + z - px - qy,$$

ne doit dépendre que d'un paramètre; des trois quantités p, q, $z - px - qy$, il y en a donc une seule d'arbitraire, et en particulier il y a une relation entre p et q, $f(p, q) = 0$. On déduit de là que le jacobien $\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = rt - s^2$ doit être identiquement nul.

Inversement, si l'on a $rt - s^2 = 0$, q et p sont liés par une relation au moins. S'il y a deux relations distinctes, p et q sont des constantes $p = a$, $q = b$, et la fonction $F(x, y)$ est égale à $ax + by + c$; la surface est un plan. S'il y a une seule relation entre p et q, on peut l'écrire $q = \varphi(p)$, *p ne se réduisant pas à une constante*. Mais on a aussi

$$y(rt - s^2) = \frac{D(z - px - qy, p)}{D(x, y)},$$

de sorte que $z - px - qy$ est aussi une fonction de p, soit $\psi(p)$, lorsque $rt - s^2 = 0$. La fonction inconnue $z = F(x, y)$ et ses dérivées partielles p et q vérifient donc les deux relations

$$q = \varphi(p), \qquad z - px - \varphi(p)y = \psi(p);$$

différentions la seconde par rapport à x et à y, il vient

$$[x + y\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad [x + y\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Puisque p ne se réduit pas à une constante, on doit avoir

$$x + y\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

L'équation de la surface s'obtiendra donc en éliminant p entre cette relation et

$$z = px + y\varphi(p) + \psi(p),$$

ce qui donnera précisément l'enveloppe du plan précédent, où l'on regarde p comme le paramètre variable.

223. Enveloppe d'une famille de courbes gauches. — Une famille de courbes gauches, dépendant d'un paramètre variable, n'admet pas en général de courbe enveloppe. Considérons d'abord

une famille de droites

$$(29) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

a, b, p, q étant des fonctions données d'un paramètre variable α; nous allons chercher à quelle condition cette droite est tangente dans toutes ses positions à une courbe gauche Γ. Soit $z = \varphi(\alpha)$ la coordonnée z du point M où la droite mobile D touche son enveloppe Γ; la courbe cherchée Γ sera représentée par les équations (29), auxquelles on ajoutera la relation $z = \varphi(\alpha)$, et les paramètres directeurs de la tangente à cette courbe auront pour expressions

$$\frac{dx}{d\alpha} = a\varphi'(\alpha) + a'\varphi(\alpha) + p',$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = b\varphi'(\alpha) + b'\varphi(\alpha) + q', \qquad \frac{dz}{d\alpha} = \varphi'(\alpha),$$

a', b', p', q' étant les dérivées de a, b, p, q. Pour que cette tangente soit la droite D elle-même, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{dx}{d\alpha} = a\frac{dz}{d\alpha}, \qquad \frac{dy}{d\alpha} = b\frac{dz}{d\alpha},$$

c'est-à-dire

$$a'\varphi(\alpha) + p' = 0, \qquad b'\varphi(\alpha) + q' = 0.$$

La fonction inconnue $\varphi(\alpha)$ doit donc satisfaire à deux relations distinctes, et par conséquent la droite mobile n'a une enveloppe que si ces relations sont compatibles, c'est-à-dire si l'on a

$$a'q' - b'p' = 0.$$

Lorsque cette relation est vérifiée, on obtiendra la courbe enveloppe en prenant $\varphi(\alpha) = -\dfrac{p'}{a'} = -\dfrac{q'}{b'}$.

Il est facile de généraliser le raisonnement. Considérons une famille de courbes gauches (C), dépendant d'un paramètre variable α, représentées par les équations

$$(30) \qquad F(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, \alpha) = 0;$$

si ces courbes C sont tangentes à une courbe Γ, les coordonnées (x, y, z) du point de contact M de la courbe C, qui correspond à la valeur α du paramètre, avec l'enveloppe sont des fonctions du paramètre α qui vérifient les équations (30), et une autre relation

distincte de celles-là. Soient dx, dy, dz les différentielles relatives à un déplacement du point M sur la courbe C; α restant constant sur la courbe C, on a entre ces différentielles les deux relations

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0,\\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz = 0. \end{aligned}\right.$$

Soient d'autre part δx, δy, δz, $\delta\alpha$ les différentielles de x, y, z, α, relatives à un déplacement du point M sur la courbe Γ; ces différentielles vérifient les relations

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = 0,\\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour que les courbes C et Γ soient tangentes, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{dx}{\delta x} = \frac{dy}{\delta y} = \frac{dz}{\delta z},$$

et ces conditions deviennent, en tenant compte des relations (31) et (32),

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = 0.$$

Les coordonnées x, y, z du point de contact doivent donc vérifier les équations

$$(33)\qquad F = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0.$$

Pour que les courbes C admettent une enveloppe, il faut donc que les quatre équations précédentes soient compatibles, quelle que soit la valeur du paramètre α. Réciproquement, si ces équations admettent une solution commune en x, y, z, quel que soit α, le raisonnement prouve que la courbe Γ décrite par ce point x, y, z est tangente en chacun de ces points à la courbe C correspondante. Ceci suppose toutefois que le point de coordonnées (x, y, z) n'est pas un point singulier de la courbe C, c'est-à-dire que les relations (31) déterminent les rapports des différentielles dx, dy, dz.

Remarque. — Lorsque les courbes C sont les caractéristiques d'une famille de surfaces à un paramètre $F(x, y, z, \alpha) = 0$, les équations (33) se réduisent à trois équations distinctes

$$(34) \qquad F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0;$$

la courbe représentée par ces équations est donc l'enveloppe des caractéristiques. C'est la généralisation de la propriété établie plus haut pour les génératrices d'une surface développable.

Les équations d'une droite mobile se présentent quelquefois sous la forme

$$(35) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

x_0, y_0, z_0, a, b, c étant des fonctions d'un paramètre variable α. Il est aisé de trouver directement la condition pour que cette droite ait une enveloppe. Désignons par l la valeur commune des rapports précédents; les coordonnées d'un point quelconque de la droite ont pour expressions

$$x = x_0 + la, \qquad y = y_0 + lb, \qquad z = z_0 + lc,$$

et il s'agit de voir s'il est possible de prendre pour l une fonction de α telle que la courbe décrite par le point (x, y, z) soit tangente à la droite mobile. Il faut pour cela que l'on ait

$$(36) \qquad \frac{x'_0 + a'l}{a} = \frac{y'_0 + b'l}{b} = \frac{z'_0 + c'l}{c};$$

en désignant par m une nouvelle indéterminée égale aux rapports précédents, et éliminant l et m entre les trois équations linéaires obtenues, on est conduit à l'équation de condition

$$(37) \qquad \begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

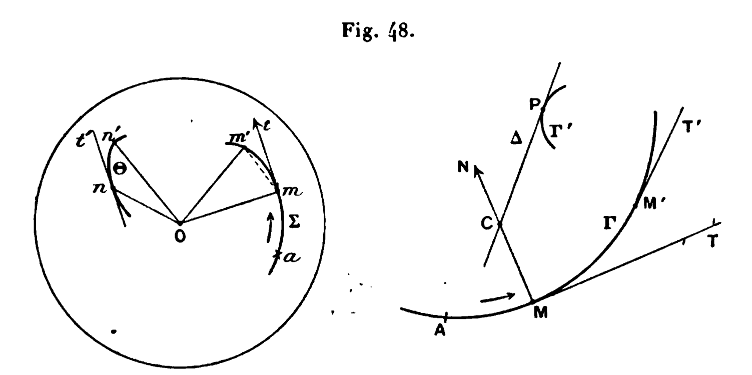
Si cette condition est satisfaite, les relations (36) donneront l et par suite l'enveloppe.

III. — COURBURE ET TORSION DES COURBES GAUCHES.

224. Indicatrice sphérique. — Sur une courbe gauche Γ adoptons un sens de parcours déterminé, et désignons par s l'arc de la courbe AM, compris entre un point A choisi pour origine et un

point quelconque M, précédé du signe + ou du signe — suivant que la direction de A en M est la direction positive ou la direction opposée. Soit MT la direction *positive* de la tangente en M, c'est-à-dire celle qui correspond à des arcs croissants. Si par un point O de l'espace on mène des parallèles à ces demi-droites, on forme un cône S, qui est le cône directeur de la surface développable engendrée par les tangentes à la courbe Γ. Du point O comme centre, avec un rayon égal à l'unité de longueur, décrivons une sphère et soit Σ l'intersection de cette sphère avec le cône précédent, la courbe Σ est appelée l'*indicatrice sphérique* de la courbe Γ. Ces deux courbes se correspondent point par point; à un point M de Γ correspond le point m, où la parallèle à la direction MT perce la sphère. Lorsque le point M décrit Γ dans le sens positif, le point m décrit la courbe Σ dans un certain sens, que nous adopterons comme sens positif sur la courbe Σ, de façon que les arcs correspondants s et σ des deux courbes croissent en même temps (*fig.* 48).

Fig. 48.



Il est évident que, si l'on déplace le centre O de la sphère, la courbe Σ subit la même translation; nous supposerons dans la suite que le centre O coïncide avec l'origine des coordonnées. De même, si l'on change le sens positif sur la courbe Γ, la courbe Σ est remplacée par la courbe symétrique relativement au point O; mais il est à remarquer que la direction positive mt de la tangente à Σ ne dépend pas du sens du parcours adopté sur Γ.

Le plan tangent au cône suivant la génératrice Om *est paral-*

lèle au plan osculateur en M. Soit, en effet,

$$AX + BY + CZ = 0$$

l'équation du plan Omm', le centre O de la sphère étant à l'origine; ce plan étant parallèle aux deux tangentes en M et M', on doit avoir, les points M et M' correspondant aux valeurs t et $t + h$ du paramètre,

$$(38) \qquad Af'(t) + B\varphi'(t) + C\psi'(t) = 0;$$

$$(39) \qquad Af'(t+h) + B\varphi'(t+h) + C\psi'(t+h) = 0,$$

la seconde de ces relations peut être remplacée par la suivante

$$A\,\frac{f'(t+h) - f'(t)}{h} + B\,\frac{\varphi'(t+h) - \varphi'(t)}{h} + C\,\frac{\psi'(t+h) - \psi'(t)}{h} = 0,$$

qui devient, lorsque h tend vers zéro,

$$(40) \qquad Af''(t) + B\varphi''(t) + C\psi''(t) = 0,$$

et les équations (38) et (40) auxquelles on parvient sont précisément celles qui déterminent le plan osculateur.

225. Rayon de courbure. — Soit ω l'angle des directions positives MT, M'T' des deux tangentes aux points infiniment voisins M, M' de la courbe Γ. La limite du quotient $\frac{\omega}{\text{arc}\,MM'}$, lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M, s'appelle encore la courbure de Γ au point M; le rayon de courbure est l'inverse de la courbure, c'est-à-dire la limite du quotient $\frac{\text{arc}\,MM'}{\omega}$. On peut encore définir le rayon de courbure comme la limite du rapport des arcs infiniment petits MM', mm'; nous avons en effet

$$\frac{\text{arc}\,MM'}{\omega} = \frac{\text{arc}\,MM'}{\text{arc}\,mm'} \times \frac{\text{arc}\,mm'}{\text{corde}\,mm'} \times \frac{\text{corde}\,mm'}{\omega},$$

et chacun des rapports $\frac{\text{arc}\,mm'}{\text{corde}\,mm'}$, $\frac{\text{corde}\,mm'}{\omega}$ a pour limite l'unité lorsque m' se rapproche de m. Les arcs s, σ variant dans le même sens, on a donc

$$(41) \qquad R = \frac{ds}{d\sigma}.$$

Soient

$$(42) \qquad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

les coordonnées d'un point de la courbe Γ dans un système d'axes rectangulaires ayant le point O pour origine. Les coordonnées du point m sont précisément les cosinus directeurs de MT

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds};$$

on déduit de ces formules

$$d\alpha = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^2}, \quad d\beta = \frac{ds\, d^2y - dy\, d^2s}{ds^2}, \quad d\gamma = \frac{ds\, d^2z - dz\, d^2s}{ds^2},$$

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{(ds\, d^2x - dx\, d^2s)^2 + (ds\, d^2y - dy\, d^2s)^2 + (\ldots)^2}{ds^4},$$

ou, en développant les carrés et tenant compte des relations qui donnent ds^2 et $ds\, d^2s$,

$$d\sigma^2 = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)^2}{ds^4}.$$

L'emploi de l'identité de Lagrange permet encore d'écrire

$$d\sigma^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{ds^4},$$

en posant, comme nous le ferons dans la suite,

$$(43) \qquad \begin{cases} A = dy\, d^2z - dz\, d^2y, \qquad B = dz\, d^2x - dx\, d^2z, \\ \qquad\qquad C = dx\, d^2y - dy\, d^2x, \end{cases}$$

et la formule (41) qui donne le rayon de courbure devient alors

$$(44) \qquad R^2 = \frac{ds^6}{A^2 + B^2 + C^2};$$

R^2 est, comme on le voit, une fonction rationnelle de x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''. Quant au rayon de courbure lui-même, son expression est irrationnelle, mais c'est une quantité essentiellement positive.

Remarque. — Lorsque la variable indépendante est l'arc de la courbe Γ elle-même, les fonctions $f(s)$, $\varphi(s)$, $\psi(s)$ vérifient la relation $f'^2(s) + \varphi'^2(s) + \psi'^2(s) = 1$, et la formule qui donne le rayon de courbure prend une forme élégante. Si l'on reprend, en

effet, le calcul précédent, on a, s étant la variable indépendante,

$$(45)\quad \begin{cases} \alpha = f'(s), & \beta = \varphi'(s), \qquad \gamma = \psi'(s), \\ d\alpha = f''(s)\,ds, & d\beta = \varphi''(s)\,ds, \qquad d\gamma = \psi''(s)\,ds, \\ d\sigma^2 = \left\{[f''(s)]^2 + [\varphi''(s)]^2 + [\psi''(s)]^2\right\} ds^2 \end{cases}$$

et, par suite,

$$(44\ bis)\qquad \frac{1}{R^2} = [f''(s)]^2 + [\varphi''(s)]^2 + [\psi''(s)]^2.$$

226. Normale principale. Centre de courbure. — Par le point M de la courbe Γ, menons une droite parallèle à la tangente en m à la courbe Σ et considérons sur cette droite la direction MN parallèle à la direction positive mt. La droite ainsi obtenue s'appelle la *normale principale* à Γ; c'est la normale située dans le plan osculateur, puisque mt est perpendiculaire sur Om et que le plan Omt est parallèle au plan osculateur (n° 224). La direction MN est la *direction positive de la normale principale*. C'est une direction bien définie, puisque la direction de mt ne dépend pas du sens de parcours adopté sur Γ. Nous verrons tout à l'heure comment on pourrait définir cette direction sans se servir de l'indicatrice.

Si l'on porte sur la direction MN, à partir du point M, une longueur MC égale au rayon de courbure, l'extrémité C s'appelle le *centre de courbure*, et le cercle décrit du point C comme centre avec le rayon MC dans le plan osculateur s'appelle le *cercle de courbure*. Soient α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale principale; les coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre de courbure ont pour expressions

$$x_1 = x + R\alpha', \qquad y_1 = y + R\beta', \qquad z_1 = z + R\gamma'.$$

Or, on a

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{d\sigma} = R\frac{d\alpha}{ds} = R\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3}$$

et des formules analogues pour β' et γ'. En remplaçant α' par sa valeur dans x_1, il vient

$$x_1 = x + R^2\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3};$$

le coefficient de R^2 peut encore s'écrire

$$\frac{ds^2 d^2x - dx\, ds\, d^2s}{ds^4} = \frac{d^2x(dx^2+dy^2+dz^2)-dx(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)}{ds^4},$$

ou, en introduisant les coefficients A, B, C,

$$\frac{B\,dz - C\,dy}{ds^4}.$$

Les valeurs de y_1 et de z_1 se déduisent de celles de x_1 par symétrie et l'on a, en définitive, pour les coordonnées du centre de courbure,

$$(46)\quad \begin{cases} x_1 = x + R^2\dfrac{B\,dz - C\,dy}{ds^4}, \qquad y_1 = y + R^2\dfrac{C\,dx - A\,dz}{ds^4}, \\ z_1 = z + R^2\dfrac{A\,dy - B\,dx}{ds^4}; \end{cases}$$

ces formules sont rationnelles en $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$.

Si l'on mène par le point M un plan Q perpendiculaire sur MN, ce plan passe par la tangente MT et ne traverse pas la courbe Γ au point M. Nous allons montrer que le centre de courbure et les points de Γ voisins de M sont du même côté de ce plan Q. Pour établir cette propriété, supposons que la variable indépendante soit l'arc s de la courbe Γ compté à partir du point M; on a, pour les coordonnées X, Y, Z d'un point M' voisin de M,

$$X = x + \frac{s}{1}\frac{dx}{ds} + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \varepsilon\right),$$

et deux développements analogues pour Y et Z. Mais, la variable indépendante étant s, on a

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R}\alpha',$$

et la formule qui donne X devient

$$X = x + \alpha s + \left(\frac{\alpha'}{R} + \varepsilon\right)\frac{s^2}{1.2}.$$

Si l'on remplace X, Y, Z par leurs valeurs dans le premier membre de l'équation du plan perpendiculaire à MN,

$$\alpha'(X - x) + \beta'(Y - y) + \gamma'(Z - z) = 0,$$

le résultat de la substitution est

$$\frac{s}{1}(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')+\frac{s^2}{1.2}\left(\frac{1}{R}+\eta\right)=\frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{R}+\eta\right),$$

η étant infiniment petit en même temps que s; ce résultat est positif pour les valeurs de s voisines de zéro. De même en remplaçant X, Y, Z par les coordonnées $x+R\alpha'$, ..., du centre de courbure, le résultat de la substitution est R, quantité essentiellement positive, ce qui démontre la propriété énoncée.

227. Droite polaire. Surface polaire. — La perpendiculaire Δ au plan osculateur menée par le centre de courbure s'appelle la *droite polaire*. Cette droite est la caractéristique du plan normal à Γ. Il est évident d'abord que l'intersection des deux plans normaux aux points voisins M, M' est une droite D perpendiculaire aux deux droites MT, M'T' et, par suite, au plan mOm'. Lorsque le point M' se rapproche de M, le plan mOm' devient parallèle au plan osculateur, la droite D a donc pour limite une droite perpendiculaire au plan osculateur. Pour démontrer que cette droite passe par le centre de courbure, supposons qu'on ait pris pour variable indépendante l'arc s de Γ; le plan normal a pour équation

$$(47)\qquad \alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=0,$$

et la caractéristique est définie par les équations (47) et (48)

$$(48)\qquad \frac{\alpha'}{R}(X-x)+\frac{\beta'}{R}(Y-y)+\frac{\gamma'}{R}(Z-z)-1=0.$$

La nouvelle équation représente un plan perpendiculaire à la normale principale et passant par le centre de courbure. L'intersection de ces deux plans est donc la droite polaire.

La surface réglée, lieu des droites polaires, est la *surface polaire*. D'après ce qu'on vient de démontrer, c'est aussi la surface développable enveloppe du plan normal à Γ. Lorsque la courbe Γ est une courbe plane, la surface polaire est le cylindre ayant pour section droite la développée de Γ, et les propriétés précédentes deviennent évidentes.

228. Torsion. — En remplaçant dans la définition de la courbure la tangente par le plan osculateur, on est conduit à un nouvel

élément géométrique qui mesure en quelque sorte la façon plus ou moins rapide dont tourne le plan osculateur. Soit ω' l'angle des deux plans osculateurs aux deux points infiniment voisins M, M'; on appelle *torsion* au point M la limite du quotient $\frac{\omega'}{\text{arc MM}'}$, lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M. Le rayon de torsion T est l'inverse de la torsion.

Menons par le point M une perpendiculaire au plan osculateur, et, sur cette droite appelée *binormale,* adoptons une direction déterminée (que nous fixerons plus tard), de cosinus α'', β'', γ''. La parallèle menée par l'origine perce la sphère de rayon un en un point n, que nous ferons encore correspondre au point M de Γ.

Le lieu du point n est une courbe sphérique Θ, et l'on montre, comme plus haut, que le rayon de torsion T peut encore être défini comme la limite du rapport des deux arcs infiniment petits correspondants, arc MM', arc nn', des deux courbes Γ et Θ. On a donc

$$T^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2},$$

τ désignant l'arc de la courbe Θ.

Les coordonnées du point n sont α'', β'', γ'', c'est-à-dire

$$\alpha'' = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \beta'' = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \gamma'' = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

le radical étant pris dans les trois formules avec le même signe. On déduit de là les valeurs de $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$; on a, par exemple,

$$d\alpha'' = \pm\frac{(A^2+B^2+C^2)dA - A(A\,dA + B\,dB + C\,dC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et la formule $d\tau^2 = d\alpha''^2 + d\beta''^2 + d\gamma''^2$ nous donne

$$d\tau^2 = \frac{(A^2+B^2+C^2)(dA^2+dB^2+dC^2) - (A\,dA + B\,dB + C\,dC)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2},$$

ou, en employant de nouveau l'identité de Lagrange,

$$d\tau^2 = \frac{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

On peut simplifier le calcul du numérateur en utilisant les rela-

tions

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$
$$dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz = 0,$$

d'où l'on tire

$$(49)\qquad \frac{dx}{B\,dC - C\,dB} = \frac{dy}{C\,dA - A\,dC} = \frac{dz}{A\,dB - B\,dA} = \frac{1}{K},$$

et il vient

$$d\tau^2 = \frac{K^2\,ds^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

Quant à la valeur de K, on a, en développant,

$$K = \frac{(dz\,d^2x - dx\,d^2z)(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - (dx\,d^2y - dy\,d^2x)(dz\,d^3x - dx\,d^3z)}{dx}$$
$$= dz\,d^2x\,d^3y - dx\,d^2z\,d^3y + dy\,d^2z\,d^3x - d^2y\,dz\,d^3x + dx\,d^2y\,d^3z - dy\,d^2x\,d^3z;$$

le second membre n'est autre chose que le développement du déterminant Δ [(n° 216), formule 8]. On a donc

$$d\tau = \pm \frac{\Delta\,ds}{A^2+B^2+C^2},$$

et par suite

$$(50)\qquad T = \pm \frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}.$$

Si l'on considère le rayon de torsion T comme une quantité essentiellement positive, de même que le rayon de courbure, on prendra pour T la valeur absolue du second membre. Mais il est à remarquer que l'expression obtenue est rationnelle en x', x'', x''', $y', y'', y''', z', z'', z'''$. Il est donc naturel de considérer le rayon de torsion comme une longueur affectée d'un signe. Les deux signes correspondent à des dispositions entièrement différentes de la courbe Γ dans le voisinage du point M.

Le signe de T ne dépendant que du signe de Δ, étudions comment varie la disposition de la courbe avec ce signe. Nous supposerons que le trièdre $Oxyz$ est disposé de telle façon qu'un observateur debout sur le plan des xy, les pieds en O et la tête en z, verrait l'axe Ox tourner de 90° de droite à gauche pour coïncider avec Oy. Cela étant, choisissons sur la binormale une direction MN_b telle que le trièdre (MT, MN, MN_b) ait la même disposition que le trièdre $Oxyz$. Si l'on déplace la courbe Γ d'une

manière continue de façon à amener le point M en O, MT sur Ox, MN sur Oy, la direction MN_b viendra coïncider avec Oz. Dans ce mouvement, la valeur absolue de T reste la même; donc Δ ne peut s'annuler et, par suite, conserve un signe constant ([1]). La courbe Γ étant rapportée à ce nouveau système d'axes de coordonnées, supposons que la valeur $t = 0$ du paramètre corresponde à l'origine; les coordonnées d'un point voisin auront des expressions de la forme suivante

$$(51)\qquad \begin{cases} x = a_1 t + t^2(a_2 + \varepsilon), \\ y = b_2 t^2 + t^3(b_3 + \varepsilon'), \\ z = t^3(c_3 + \varepsilon''), \end{cases}$$

ε, ε', ε'' étant infiniment petits avec t; en effet, dans le système d'axes choisi, on doit avoir, pour $t = 0$, $dy = dz = d^2 z = 0$. On peut supposer $a_1 > 0$, car il suffirait de remplacer t par $-t$ pour changer a_1 en $-a_1$; b_2 est positif puisque y doit être positif pour les valeurs de t voisines de zéro, mais c_3 peut être positif ou négatif. Or on a, pour $t = 0$, $\Delta = 12 a_1 b_2 c_3 dt^6$, de sorte que Δ a le signe de c_3. Cela posé, deux cas sont à distinguer, suivant le signe de c_3 : 1° si $c_3 > 0$, x et z sont négatifs lorsque t varie de $-h$ à 0 et positifs lorsque t varie de 0 à $+h$ (h étant un nombre positif

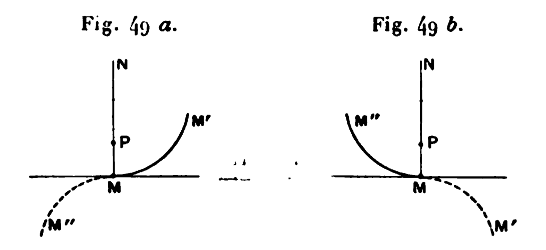


Fig. 49 *a*. Fig. 49 *b*.

très petit). Un observateur debout sur le plan osculateur, les pieds en un point P de la normale principale, verrait l'arc MM′ à sa gauche au-dessus du plan osculateur et l'arc MM″ à droite au-dessous du plan osculateur (*fig.* 49 *a*). La courbe est donc *sinistrorsum*. On aurait la disposition inverse (*fig.* 49 *b*) si c_3 était

([1]) Il est du reste facile de démontrer par un calcul direct que Δ ne change pas quand on passe d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes rectangulaires de même disposition.

négatif; la courbe serait *dextrorsum*. Ces deux dispositions sont absolument distinctes l'une de l'autre. Par exemple, deux hélices de même pas, tracées sur deux cylindres de révolution de même rayon, sont superposables si elles sont toutes les deux dextrorsum ou sinistrorsum; mais, si l'une est dextrorsum et l'autre sinistrorsum, l'une d'elles est superposable à la symétrique de l'autre par rapport à un plan.

Nous écrirons désormais la formule qui donne la torsion

$$T = -\frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}; \tag{52}$$

en un point où T est positif, la courbe est dextrorsum, et sinistrorsum en un point où T est négatif. Ce serait le contraire avec une disposition différente du trièdre $Oxyz$.

229. Formules de Frenet. — Chaque point M de la courbe Γ est le sommet d'un trièdre trirectangle, de même disposition que le trièdre $Oxyz$, formé par la tangente, la normale principale et la binormale. La direction positive de la normale principale est bien déterminée, tandis que la direction positive de la tangente peut être prise arbitrairement et détermine celle de la binormale. Les différentielles des neuf cosinus directeurs α, β, γ, ... s'expriment très simplement au moyen de R, de T et de ces cosinus eux-mêmes, par des formules dues à Frenet [1]. Nous avons déjà obtenu les formules qui donnent $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}. \tag{53}$$

Soient

$$\alpha'' = \varepsilon\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \beta'' = \varepsilon\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \gamma'' = \varepsilon\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

les cosinus de la direction positive sur la binormale. Le trièdre (MT, MN, MN_b) ayant la même disposition que le trièdre $Oxyz$, on doit avoir

$$\alpha' = \beta''\gamma - \beta\gamma'',$$

ou

$$\alpha' = \varepsilon\frac{B\gamma - C\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(1) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864; p. 284.

D'autre part, la formule qui donne $d\alpha''$ peut s'écrire

$$d\alpha'' = \varepsilon \frac{B(B\,dA - A\,dB) + C(C\,dA - A\,dC)}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, en tenant compte des relations (49) et de la valeur de K,

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \varepsilon\Delta \frac{C\beta - B\gamma}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\Delta\alpha'}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Le coefficient de α' n'est autre chose que $\frac{1}{T}$ [formule (52)]; on calculerait de même $d\beta''$ et $d\gamma''$, et nous avons les formules (¹)

$$(54) \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T},$$

tout à fait pareilles aux formules (53).

Pour avoir $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$, différentions les relations bien connues

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$
$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$
$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$

ce qui donne, en remplaçant $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$ par leurs valeurs tirées des formules (53) et (54),

$$\alpha'\,d\alpha' + \beta'\,d\beta' + \gamma'\,d\gamma' = 0,$$
$$\alpha\,d\alpha' + \beta\,d\beta' + \gamma\,d\gamma' + \frac{ds}{R} = 0,$$
$$\alpha''\,d\alpha' + \beta''\,d\beta' + \gamma''\,d\gamma' + \frac{ds}{T} = 0;$$

nous n'avons plus qu'à tirer $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$ de ces relations

$$(55) \quad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \qquad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}.$$

Les formules (53), (54), (55) sont les formules cherchées.

(¹) Si l'on avait écrit la formule qui donne la torsion, $\frac{1}{T} = \frac{\Delta}{A^2 + B^2 + C^2}$, il aurait fallu écrire les formules de Frenet

$$d\alpha'' = -\frac{\alpha'\,ds}{T}, \quad \ldots$$

Remarque. — Les formules (54) montrent que la tangente à la courbe sphérique Θ décrite par le point n de coordonnées α'', β'', γ'' est parallèle à la normale principale. C'est ce que montre aussi la géométrie. Considérons, en effet, le cône S′ de sommet O ayant pour directrice la courbe Θ; la génératrice On est perpendiculaire au plan tangent au cône S suivant Om (nº 228), et par conséquent le cône S′ est supplémentaire du cône S. Mais on sait qu'il y a réciprocité entre deux cônes de cette espèce, de sorte qu'inversement la génératrice Om de S est perpendiculaire au plan tangent au cône S′ suivant On. Cela étant, la tangente mt à la courbe Σ, étant perpendiculaire aux deux droites Om, On, est perpendiculaire au plan mOn. Pour la même raison, la tangente nt' à la courbe Θ est perpendiculaire au plan mOn. Ces deux droites sont donc parallèles.

230. **Développements de x, y, z suivant les puissances de s.** — Étant données deux fonctions d'une variable indépendante s, $R = \varphi(s)$, $T = \psi(s)$, dont la première est positive, il existe une courbe gauche Γ, qui est complètement définie, abstraction faite de sa position dans l'espace, dont le rayon de courbure et le rayon de torsion s'expriment par les formules précédentes au moyen de l'arc compté à partir d'un point de cette courbe. La démonstration rigoureuse de cette proposition ne peut être faite qu'après la théorie des équations différentielles. Nous allons montrer seulement comment on peut trouver les développements des coordonnées d'un point de la courbe cherchée suivant les puissances de s, en admettant la possibilité de ces développements. Prenons pour axes de coordonnées la tangente, la normale principale et la binormale au point O à partir duquel on compte l'arc; les coordonnées d'un point de la courbe cherchée, voisin de l'origine, ont pour expressions

$$(56)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_0 + \dfrac{s^2}{1.2}\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)_0 + \dfrac{s^3}{1.2.3}\left(\dfrac{d^3x}{ds^3}\right)_0 + \dots \\ y = \dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dy}{ds}\right)_0 + \dfrac{s^2}{1.2}\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)_0 + \dfrac{s^3}{1.2.3}\left(\dfrac{d^3y}{ds^3}\right)_0 + \dots \\ z = \dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dz}{ds}\right)_0 + \dfrac{s^2}{1.2}\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)_0 + \dfrac{s^3}{1.2.3}\left(\dfrac{d^3z}{ds^3}\right)_0 + \dots \end{cases}$$

Mais on a

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R},$$

et, en différentiant de nouveau,

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds} - \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right),$$

et, d'une façon générale, on obtient, par l'emploi répété des formules de Frenet, l'expression de $\frac{d^n x}{ds^n}$

$$\frac{d^n x}{ds^n} = L_n\alpha + M_n\alpha' + P_n\alpha'',$$

L_n, M_n, P_n étant des fonctions connues de R, T et de leurs dérivées successives par rapport à l'arc. On aurait de même les dérivées successives de y et de z en remplaçant α, α', α'' par β, β', β'' et γ, γ', γ''. Mais on a, pour l'origine, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\alpha'_0 = 0$, $\beta'_0 = 1$, $\gamma'_0 = 0$, $\alpha''_0 = 0$, $\beta''_0 = 0$, $\gamma''_0 = 1$, et les formules (56) deviennent, en se bornant aux termes en s, s^2, s^3,

$$(56\ bis)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{s}{1} - \dfrac{s^3}{6R^2} + \ldots, \\ y = \dfrac{s^2}{2R} - \dfrac{s^3}{6R^2}\dfrac{dR}{dS} + \ldots, \\ z = -\dfrac{s^3}{6RT} + \ldots, \end{cases}$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au troisième. On suppose, bien entendu, R, T, $\frac{dR}{ds}$, $\cdots$ remplacés par leurs valeurs pour $s = 0$.

Ces formules permettent de calculer aisément la partie principale de certains infiniment petits. Ainsi, la distance d'un point voisin de la courbe au plan osculateur est du troisième ordre et sa partie principale est $-\frac{s^3}{6RT}$. La distance d'un point à l'axe Ox, c'est-à-dire à la tangente, est du second ordre, et sa partie principale est $\frac{s^2}{2R}$ (*cf.* n° 214). Calculons encore la longueur d'une corde infiniment petite c. On a

$$c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = s^2 - \frac{s^4}{12R^2} + \ldots,$$

les termes non écrits étant d'un degré supérieur au quatrième. Il vient ensuite

$$c = s\left(1 - \frac{s^2}{12R^2} + \ldots\right)^{\frac{1}{2}} = s\left(1 - \frac{s^2}{24R^2} + \ldots\right);$$

la différence $s - c$ est donc un infiniment petit du *troisième ordre*, et sa partie principale est $\frac{s^3}{24R^2}$.

On démontre par un calcul tout pareil que la plus courte distance entre la tangente à l'origine et la tangente en un point infiniment voisin est un infiniment petit du troisième ordre dont la partie principale est $\frac{s^3}{12RT}$. Ce théorème est dû à M. Bouquet.

231. Développantes et développées. — On dit qu'une courbe Γ_1 est une *développante* d'une autre courbe Γ, si les tangentes à la courbe Γ font partie des normales à la courbe Γ_1; inversement, la courbe Γ est dite une *développée* de Γ_1. Il est clair que toutes les développantes d'une courbe Γ sont situées sur la développable dont Γ est l'arête de rebroussement et coupent orthogonalement les génératrices.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de Γ, α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente, et l le segment MM_1 compris entre le point M et le point M_1 où une développante coupe la tangente en M; on a, pour les coordonnées de M_1,

$$x_1 = x + l\alpha, \qquad y_1 = y + l\beta, \qquad z_1 = z + l\gamma,$$

et, par suite,

$$dx_1 = dx + l\,d\alpha + \alpha\,dl, \qquad dy_1 = dy + l\,d\beta + \beta\,dl,$$
$$dz_1 = dz + l\,d\gamma + \gamma\,dl.$$

Pour que la courbe décrite par le point M_1 soit normale à MM_1, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha\,dx_1 + \beta\,dy_1 + \gamma\,dz_1 = 0$, c'est-à-dire

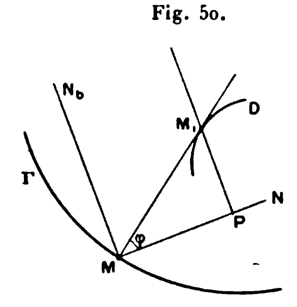
$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz + dl + l(\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma) = 0,$$

relation qui se réduit à $ds + dl = 0$. On obtient donc les développantes d'une courbe gauche Γ par la même construction qui donne les développantes d'une courbe plane (n° 206).

Proposons-nous maintenant de trouver les diverses développées

d'une courbe Γ, c'est-à-dire d'associer les normales à cette courbe suivant une loi continue, de façon à obtenir une surface développable (*fig.* 50).

Fig. 50.



Soient D une développée, φ l'angle de la normale MM_1 avec la normale principale MN, l le segment MP compris entre le point M et la projection P du point M_1 sur la normale principale. Les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point M_1 sont données par les formules

$$(57)\qquad \begin{cases} x_1 = x + l\alpha' + l\alpha'' \operatorname{tang}\varphi, \\ y_1 = y + l\beta' + l\beta'' \operatorname{tang}\varphi, \\ z_1 = z + l\gamma' + l\gamma'' \operatorname{tang}\varphi, \end{cases}$$

que l'on obtient en projetant la ligne brisée MPM_1 sur les trois axes. La tangente à la courbe décrite par le point M_1 doit être la droite MM_1 elle-même, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{dx_1}{x_1 - x} = \frac{dy_1}{y_1 - y} = \frac{dz_1}{z_1 - z};$$

désignons par K la valeur commune de ces rapports; la condition $dx_1 = K(x_1 - x)$ s'écrit, en remplaçant x_1 et dx_1 par leurs valeurs, et se servant des formules de Frenet,

$$\alpha\, ds\left(1 - \frac{l}{R}\right) + \alpha'\left(dl + l \operatorname{tang}\varphi \frac{ds}{T} - Kl\right) + \alpha''\left[d(l \operatorname{tang}\varphi) - \frac{l\,ds}{T} - Kl \operatorname{tang}\varphi\right] = 0.$$

Les conditions $dy_1 = K(y_1 - y)$, $dz_1 = K(z_1 - z)$ donneront deux relations toutes pareilles, que l'on déduira de la précédente en remplaçant $\alpha, \alpha', \alpha''$ par β, β', β'', puis par $\gamma, \gamma', \gamma''$. Le déterminant des neuf cosinus étant égal à un, le système formé par ces

trois relations est équivalent au suivant

$$(58)\qquad \begin{cases} \left(1 - \dfrac{l}{R}\right) ds = 0, \qquad dl + l \operatorname{tang}\varphi \dfrac{ds}{T} = K l, \\ d(l \operatorname{tang}\varphi) - \dfrac{l\,ds}{T} = K l \operatorname{tang}\varphi. \end{cases}$$

On tire de la première $l = R$, ce qui montre que le point P est le centre de courbure, et la droite PM_1 la droite polaire. Par conséquent, *toutes les développées d'une courbe* Γ *sont sur la surface polaire.* Pour achever de déterminer ces développées, nous n'avons plus qu'à éliminer K entre les deux dernières relations (58), en y remplaçant l par R; il reste, toutes réductions faites, $ds = T\,d\varphi$. L'angle φ s'obtient donc par une quadrature

$$(59)\qquad \varphi = \varphi_0 + \int_0^s \frac{ds}{T}.$$

Si l'on considère deux valeurs de l'angle φ, correspondant à deux valeurs différentes de la constante φ_0, la différence de ces deux angles reste constante tout le long de la courbe Γ. On voit donc que *deux normales de la courbe* Γ, *qui sont tangentes à deux développées différentes, se coupent sous un angle constant.* Si l'on connaît une famille de normales à Γ engendrant une surface développable, on obtiendra toutes les autres développables formées de normales, en faisant tourner les premières d'un angle constant, d'ailleurs arbitraire, autour du point où elles coupent Γ.

Remarque I. — Si la courbe Γ est une courbe plane, T est infini, et la formule précédente donne $\varphi = \varphi_0$. La développée qui correspond à la valeur $\varphi_0 = 0$ est la développée plane déjà étudiée, qui est aussi le lieu des centres de courbure. Les autres développées, en nombre infini, sont situées sur le cylindre ayant pour section droite la développée ordinaire : ce sont des courbes gauches, appelées *hélices*, qui seront étudiées au paragraphe suivant. Ce cas est le seul où le lieu des centres de courbure soit en même temps une développée. Pour que la relation (59) soit vérifiée en prenant $\varphi = 0$, il faut que T soit infini ou que $\Delta = 0$. La courbe est donc une courbe plane (n° **216**).

Remarque II. — Si la courbe D est une développée de Γ, in-

versement Γ est une développante de D. On a donc, en appelant s_1 l'arc de la développée compté dans un sens convenable,

$$ds_1 = d(\mathrm{MM}_1);$$

les développées d'une courbe sont donc des courbes rectifiables.

232. Hélices. — Soit C une courbe plane quelconque; si, de chaque point m de cette courbe, on porte sur la perpendiculaire au plan de C une longueur mM proportionnelle à l'arc de la courbe C, compté à partir d'un point fixe A, le lieu du point M est une courbe gauche Γ, appelée *hélice*. Prenons pour plan des xy le plan de la courbe C, et soient

$$x = f(\sigma), \qquad y = \varphi(\sigma)$$

les expressions des coordonnées d'un point m de C en fonction de l'arc σ; les coordonnées du point correspondant M de la courbe Γ seront

$$(60) \qquad x = f(\sigma), \qquad y = \varphi(\sigma), \qquad z = \mathrm{K}\sigma,$$

K étant un facteur constant. Les fonctions f et φ vérifient d'ailleurs la relation $f'^2 + \varphi'^2 = 1$. Des formules (60) on tire, en appelant s l'arc de Γ,

$$ds^2 = (f'^2 + \varphi'^2 + \mathrm{K}^2)\,d\sigma^2 = (1 + \mathrm{K}^2)\,d\sigma^2$$

et, par suite, $s = \sigma\sqrt{1 + \mathrm{K}^2} + \mathrm{H}$; si l'on compte les arcs s et σ à partir d'un même point A de la courbe C, ce qui revient à faire $\mathrm{H} = 0$, on aura $s = \sigma\sqrt{1 + \mathrm{K}^2}$. Les cosinus directeurs de la tangente à Γ ont pour valeurs

$$(61) \qquad \alpha = \frac{f'(\sigma)}{\sqrt{1 + \mathrm{K}^2}}, \qquad \beta = \frac{\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1 + \mathrm{K}^2}}, \qquad \gamma = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{1 + \mathrm{K}^2}};$$

γ étant indépendant de σ, on voit que la tangente fait un angle constant avec Oz. Cette propriété est caractéristique : *Toute courbe dont les tangentes font un angle constant avec une direction fixe est une hélice.* Pour le démontrer, prenons l'axe des z parallèle à cette direction, et soit C la projection de la courbe considérée Γ sur le plan des xy; on peut toujours écrire les équations de la courbe Γ

$$(62) \qquad x = f(\sigma), \qquad y = \varphi(\sigma), \qquad z = \psi(\sigma),$$

les fonctions f et φ satisfaisant à la relation $f'^2 + \varphi'^2 = 1$, ce qui revient à prendre pour variable indépendante l'arc σ de la courbe C. On en déduit

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\psi'(\sigma)}{\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}} = \frac{\psi'}{\sqrt{1 + \psi'^2}};$$

pour que γ soit constant, il faut et il suffit que ψ' soit constant et, par

suite, que $\psi(\sigma)$ soit de la forme $K\sigma + z_0$. Les équations de la courbe Γ seront de la forme (60), si l'on porte l'origine au point $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$.

La formule $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}$ nous donne ici, puisque γ est constant, $\gamma' = 0$. La normale principale est donc perpendiculaire aux génératrices du cylindre; comme elle est, en outre, perpendiculaire à la tangente à l'hélice, c'est la normale au cylindre, et le plan osculateur est lui-même normal au cylindre. La binormale est donc située dans le plan tangent au cylindre et perpendiculaire à la tangente; ce qui montre qu'elle fait aussi un angle constant avec Oz.

La formule $\frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}$ nous donne ensuite, puisque $\gamma' = 0$, $\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma''}{T} = 0$, ce qui prouve que, dans une hélice, le rapport $\frac{T}{R}$ est constant.

Ces diverses propriétés sont caractéristiques d'une hélice. Démontrons, par exemple, que *toute courbe, pour laquelle le rapport* $\frac{T}{R}$ *est constant, est une hélice.* (J. Bertrand.)

On tire des formules de Frenet

$$\frac{d\alpha}{d\alpha''} = \frac{d\beta}{d\beta''} = \frac{d\gamma}{d\gamma''} = \frac{T}{R} = \frac{1}{H};$$

si H est constant, on aura en intégrant

$$\alpha'' = H\alpha - A, \qquad \beta'' = H\beta - B, \qquad \gamma'' = H\gamma - C,$$

A, B, C désignant trois nouvelles constantes. Ajoutons ces trois équations après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ : il vient

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = H,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{H}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

mais $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ sont les cosinus directeurs d'une certaine droite Δ, et la relation précédente exprime que la tangente fait un angle constant avec cette direction; la courbe considérée est donc une hélice.

Calculons encore le rayon de courbure. On a, en se reportant aux valeurs trouvées plus haut (61) pour α, β,

$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{1 + K^2} f''(\sigma), \qquad \frac{\beta'}{R} = \frac{1}{1 + K^2} \varphi''(\sigma),$$

et par conséquent, puisque $\gamma' = 0$,

$$(63) \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{1}{(1+K^2)^2}\left[f''^2(\sigma) + \varphi''^2(\sigma)\right].$$

Le rapport $\frac{1+K^2}{R}$ est donc indépendant de K; or, pour $K = 0$, ce rapport se réduit à l'inverse $\frac{1}{r}$ du rayon de courbure de la section droite C, comme il est facile de le vérifier (n° 205). La formule précédente peut donc s'écrire $R = r(1+K^2)$, ce qui montre que le rayon de courbure d'une hélice est dans un rapport constant avec le rayon de courbure de la courbe C.

Il est facile de déduire de là toutes les courbes pour lesquelles R et T sont constants. En effet, le rapport $\frac{T}{R}$ étant constant, ces courbes sont des hélices, d'après le théorème de M. Bertrand. De plus, R étant constant, il en est de même du rayon de courbure r de la courbe C. Cette courbe C est donc une circonférence, et *la courbe cherchée est une hélice tracée sur un cylindre de révolution*. Cette proposition est due à M. Puiseux ([1]).

233. **Courbes de M. Bertrand.** — Les normales principales à une courbe plane sont en même temps les normales principales d'une infinité d'autres courbes planes, parallèles à la première. M. J. Bertrand s'est proposé de trouver les courbes gauches dont les normales principales sont aussi les normales principales d'une seconde courbe gauche. Supposons les coordonnées x, y, z d'un point exprimées en fonction de l'arc s; sur chaque normale principale portons une longueur l, et soient X, Y, Z les coordonnées de l'extrémité

$$(64) \qquad X = x + l\alpha', \qquad Y = y + l\beta', \qquad Z = z + l\gamma'.$$

Pour que la normale principale à la courbe Γ soit aussi la normale principale à la courbe Γ' décrite par le point (X, Y, Z), il faut et il suffit que l'on ait les deux relations

$$\alpha' dX + \beta' dY + \gamma' dZ = 0,$$

$$\alpha'(dY\, d^2Z - dZ\, d^2Y) + \beta'(dZ\, d^2X - dX\, d^2Z) + \gamma'(dX\, d^2Y - dY\, d^2X) = 0,$$

dont la signification est bien claire. On tire de la première $dl = 0$, ce qui prouve que la longueur l doit être constante. En remplaçant ensuite dans la seconde dX, d^2X, dY, ... par leurs valeurs déduites des formules de Frenet et de celles qu'on obtient en les différentiant, il reste, toutes réduc-

([1]) La démonstration suppose qu'il s'agit de courbes réelles, car on a supposé plus haut que $A^2 + B^2 + C^2$ n'était pas nul (*voir* la thèse de M. Lyon *Sur les courbes à torsion constante*, 1890).



tions faites,

$$\frac{1}{T}d\left(1-\frac{l}{R}\right)=\left(1-\frac{l}{R}\right)d\left(\frac{1}{T}\right)$$

et l'on en tire, en intégrant, la relation

$$\frac{l}{R}+\frac{l'}{T}=1, \tag{65}$$

l' désignant une nouvelle constante. *Les courbes cherchées sont donc celles pour lesquelles il existe une relation linéaire entre la courbure et la torsion.* On voit de plus que la condition est suffisante et la longueur l est donnée par la relation (65) elle-même.

Un cas particulier remarquable avait déjà été étudié par Monge; c'est celui où le rayon de courbure est constant. La relation (65) devient alors $l=R$, et la courbe Γ' représentée par les formules (64) est le lieu des centres de courbure de la courbe Γ. Des formules (64) on tire, en supposant $l=R=$ constante,

$$dX=-\frac{R}{T}\alpha''ds,\qquad dY=-\frac{R}{T}\beta''ds,\qquad dZ=-\frac{R}{T}\gamma''ds,$$

ce qui montre que la tangente à la courbe Γ' est la droite polaire de Γ. Le rayon de courbure R' de Γ' est donné à son tour par la formule

$$R'^2=\frac{dX^2+dY^2+dZ^2}{d\alpha''^2+d\beta''^2+d\gamma''^2}=R^2;$$

on voit que ce rayon de courbure est aussi constant et égal à R, et il y a réciprocité entre les deux courbes Γ, Γ'; chacune d'elles est l'arête de rebroussement de la surface polaire de l'autre. Toutes ces propriétés sont faciles à vérifier directement sur l'hélice circulaire.

Remarque. — Il est facile d'avoir des formules générales représentant toutes les courbes gauches dont le rayon de courbure est constant et égal à R. Soient α, β, γ trois fonctions d'un paramètre variable satisfaisant à la relation $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Les formules

$$X=R\int\alpha\,d\sigma,\qquad Y=R\int\beta\,d\sigma,\qquad Z=R\int\gamma\,d\sigma, \tag{66}$$

où l'on a posé $d\sigma=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}$, représentent une courbe répondant à la question, et il est aisé de démontrer qu'on les obtient toutes de cette façon. En effet, α, β, γ sont précisément les cosinus directeurs de la tangente, et σ est l'arc de l'indicatrice sphérique (n° 225).

IV. — CONTACT DES COURBES GAUCHES, DES COURBES ET DES SURFACES.

234. Contact de deux courbes. — L'ordre de contact de deux courbes gauches se définit comme pour les courbes planes. Considérons deux courbes Γ, Γ', tangentes en un point commun A; soit M un point de Γ voisin de A, auquel on fait correspondre un point M' de Γ' d'après une loi quelconque, de telle façon que les deux points M, M' tendent simultanément vers le point A. Nous allons chercher quel est l'ordre infinitésimal maximum de MM' par rapport à l'arc AM considéré comme infiniment petit principal; si cet ordre est $n+1$, nous dirons que les deux courbes ont un contact d'ordre n.

Rapportons les deux courbes à un système d'axes rectangulaires [1], le plan des yz n'étant pas parallèle à la tangente commune, et supposons d'abord leurs équations mises sous la forme suivante :

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} y=f(x), \\ z=\varphi(x), \end{cases} \qquad (\Gamma')\quad \begin{cases} Y=F(x), \\ Z=\Phi(x). \end{cases}$$

Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point de contact, les coordonnées des deux points M, M' sont respectivement

$$M[x_0+h,\ f(x_0+h),\ \varphi(x_0+h)],\quad M'[x_0+k,\ F(x_0+k),\ \Phi(x_0+k)],$$

k étant une fonction de h qui dépend de la loi de correspondance établie, et qui s'annule avec h. On peut encore prendre h pour infiniment petit principal au lieu de l'arc AM (n° 211), et, pour que MM' soit un infiniment petit d'ordre $n+1$, il faut que chacune des différences

$$k-h,\quad F(x_0+k)-f(x_0+h),\quad \Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)$$

soit un infiniment petit d'ordre $n+1$ au moins. On doit donc avoir

$$k-h=\alpha h^{n+1},\qquad F(x_0+k)-f(x_0+h)=\beta h^{n+1},$$
$$\Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)=\gamma h^{n+1},$$

α, β, γ restant finis lorsque h tend vers zéro; en remplaçant k par

---

(1) Il est facile de voir que cette hypothèse n'est nullement nécessaire pour la suite, en se reportant à la formule qui donne la distance de deux points en coordonnées obliques.

sa valeur $h + \alpha h^{n+1}$, les deux dernières conditions deviennent

$$F(x_0 + h + \alpha h^{n+1}) - f(x_0 + h) = \beta h^{n+1},$$
$$\Phi(x_0 + h + \alpha h^{n+1}) - \varphi(x_0 + h) = \gamma h^{n+1}.$$

En développant $F(x_0 + h + \alpha h^{n+1})$ et $\Phi(x_0 + h + \alpha h^{n+1})$ par la formule de Taylor, tous les termes qui dépendent de α contiendront h^{n+1} en facteur, et les différences

$$F(x_0 + h) - f(x_0 + h), \quad \Phi(x_0 + h) - \varphi(x_0 + h)$$

devront être d'ordre $n + 1$ au moins. Il s'ensuit que, si la distance MM' est d'ordre $n + 1$, la distance MN des points M, N des deux courbes qui ont même abscisse $(x_0 + h)$ est d'ordre $n + 1$ au moins. On obtiendra donc l'ordre infinitésimal maximum *en faisant correspondre les points des deux courbes qui ont même abscisse.*

Il est facile d'évaluer cet ordre. Les deux courbes étant tangentes, on a les relations

$$f(x_0) = F(x_0), \quad f'(x_0) = F'(x_0), \quad \varphi(x_0) = \Phi(x_0), \quad \varphi'(x_0) = \Phi'(x_0);$$

supposons que l'on ait en outre, pour prendre le cas général,

$$f''(x_0) = F''(x_0), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x_0) = F^{(n)}(x_0),$$
$$\varphi''(x_0) = \Phi''(x_0), \quad \ldots, \quad \varphi^{(n)}(x_0) = \Phi^{(n)}(x_0);$$

l'une au moins des différences

$$F^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0), \quad \Phi^{(n+1)}(x_0) - \varphi^{(n+1)}(x_0)$$

n'étant pas nulle. La distance MM' sera d'ordre $n + 1$, et il y aura un contact d'ordre n. Le résultat peut encore s'énoncer comme il suit : Pour avoir l'ordre de contact des deux courbes Γ, Γ', il suffit de considérer les projections (C, C') et (C_1, C'_1) de ces courbes sur les deux plans xOy et xOz, d'évaluer l'ordre de contact de C avec C', celui de C_1 avec C'_1, et de prendre le plus petit de ces deux nombres.

Lorsque les courbes Γ, Γ' sont représentées par les formules

$$(\Gamma) \qquad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$
$$(\Gamma') \qquad X = f(u), \quad Y = \Phi(u), \quad Z = \Psi(u),$$

ces courbes sont tangentes en un point si, pour $u = t = t_0$, on a

$$\Phi(t_0) = \varphi(t_0), \quad \Phi'(t_0) = \varphi'(t_0), \quad \Psi(t_0) = \psi(t_0), \quad \Psi'(t_0) = \psi'(t_0);$$

nous supposerons qu'au point de contact la tangente n'est pas parallèle au plan des yz, c'est-à-dire que $f'(t_0)$ n'est pas nul. Les points des deux courbes qui ont même abscisse correspondent à une même valeur de t. Pour qu'il y ait un contact d'ordre n, il faut et il suffit que $\Phi(t) - \varphi(t)$, $\Psi(t) - \psi(t)$ soient des infiniment petits d'ordre $n + 1$ par rapport à $t - t_0$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{aligned} &\Phi'(t_0) = \varphi'(t_0), \quad \ldots, \quad \Phi^{(n)}(t_0) = \varphi^{(n)}(t_0), \\ &\Psi'(t_0) = \psi'(t_0), \quad \ldots, \quad \Psi^{(n)}(t_0) = \psi^{(n)}(t_0), \end{aligned}$$

l'une au moins des différences

$$\Phi^{(n+1)}(t_0) - \varphi^{(n+1)}(t_0), \quad \Psi^{(n+1)}(t_0) - \psi^{(n+1)}(t_0)$$

n'étant pas nulle.

On ramène au cas précédent le cas où l'une des courbes Γ est représentée par les équations

$$(67) \qquad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

la courbe Γ' étant représentée par un système de deux équations non résolues

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0.$$

En reprenant les raisonnements du n° 212, on démontre que, pour qu'il y ait un contact d'ordre n au point de Γ qui correspond à la valeur t_0 de t, on doit avoir

$$(68) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}(t_0) = 0, & \mathcal{F}'(t_0) = 0, & \ldots, & \mathcal{F}^{(n)}(t_0) = 0, \\ \mathcal{F}_1(t_0) = 0, & \mathcal{F}'_1(t_0) = 0, & \ldots, & \mathcal{F}_1^{(n)}(t_0) = 0, \end{cases}$$

en posant

$$\mathcal{F}(t) = F[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \quad \mathcal{F}_1(t) = F_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)].$$

235. Courbes osculatrices. — Considérons, d'une part, une courbe déterminée Γ dont les coordonnées sont exprimées en fonction d'un paramètre par les formules (67); d'autre part, une famille de courbes Γ' dépendant de $2n + 2$ paramètres a, b, c, ..., l, représentées par les équations

$$(69) \quad F(x, y, z, a, b, \ldots, l) = 0, \quad F_1(x, y, z, a, b, c, \ldots, l) = 0.$$

On peut en général disposer de ces $2n+2$ paramètres de façon que l'une des courbes de cette famille ait un contact d'ordre n avec la courbe Γ en un point donné. La courbe ainsi obtenue est dite *osculatrice* à Γ. Les équations qui déterminent les paramètres $a, b, c, \ldots, l$ sont précisément les $2n+2$ équations (68) écrites plus haut. Il est à remarquer que ces équations ne peuvent être compatibles que si chacune des fonctions F, F_1 contient au moins $n+1$ paramètres. Par exemple, si les courbes Γ' sont des courbes planes, l'une des équations (69) ne renferme que trois paramètres; une courbe plane ne peut donc avoir avec une courbe gauche un contact d'ordre supérieur au second, en un point pris au hasard sur la courbe gauche.

Appliquons cette théorie aux courbes les plus simples, la droite et le cercle. Une droite dépend de quatre paramètres; la droite osculatrice aura donc un contact du premier ordre. Il est facile de vérifier qu'elle se confond avec la tangente; si nous écrivons les équations de la droite

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

les équations (68) deviennent en effet, pour un point (x_0, y_0, z_0) d'une courbe Γ,

$$x_0 = az_0 + p, \qquad x'_0 = az'_0, \qquad y_0 = bz_0 + q, \qquad y'_0 = bz'_0,$$

et l'on en tire

$$a = \frac{x'_0}{z'_0}, \qquad b = \frac{y'_0}{z'_0}, \qquad p = x_0 - \frac{x'_0}{z'_0} z_0, \qquad q = y_0 - \frac{y'_0}{z'_0} z_0;$$

on retrouve bien les équations de la tangente. Pour que la tangente eût avec la courbe un contact du second ordre, il faudrait que l'on eût $x''_0 = az''_0$, $y''_0 = bz''_0$, et par conséquent,

$$\frac{x''_0}{x'_0} = \frac{y''_0}{y'_0} = \frac{z''_0}{z'_0};$$

les points où il en est ainsi ont été signalés plus haut (nº 217).

Un cercle dans l'espace dépend de six paramètres; le *cercle osculateur* aura donc un contact du second ordre. Écrivons les équations du cercle

$$F(x, y, z) = A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0,$$
$$F_1(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0,$$

les paramètres variables étant a, b, c, R, et les rapports de deux des coefficients A, B, C au troisième. Les équations qui déterminent les valeurs de ces paramètres sont alors, en supposant x, y, z remplacées par $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ respectivement,

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0,$$

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

$$(x-a)\frac{dx}{dt}+(y-b)\frac{dy}{dt}+(z-c)\frac{dz}{dt}=0,$$

$$(x-a)\frac{d^2x}{dt^2}+(y-b)\frac{d^2y}{dt^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=0.$$

La seconde et la troisième de ces relations montrent que le plan du cercle osculateur est le plan osculateur lui-même. Quant aux deux dernières équations, elles représentent respectivement, quand on y regarde a, b, c comme des coordonnées courantes, le plan normal au point (x, y, z) et le plan normal infiniment voisin. Le centre du cercle osculateur est donc à l'intersection du plan osculateur et de la droite polaire. Le cercle osculateur se confond par conséquent avec le cercle de courbure, comme on pouvait le prévoir *a priori*, en observant que deux courbes qui ont un contact du second ordre ont même cercle de courbure, puisque y', z', y'', z'' sont les mêmes pour les deux courbes.

236. **Contact d'une courbe et d'une surface.** — Considérons une surface S et une courbe Γ tangente en un point A à cette surface. A un point M de la courbe voisin du point A, faisons correspondre, d'après une loi arbitraire, un point M′ de la surface, de façon que les deux points M et M′ tendent en même temps vers le point A. Nous allons d'abord chercher comment il faut prendre le point M′ pour que l'ordre infinitésimal de MM′ par rapport à l'arc AM soit le plus grand possible. Rapportons la figure à trois axes de coordonnées rectangulaires choisis de telle façon que la tangente à la courbe Γ ne soit pas parallèle au plan des yz, et que le plan tan-

gent à la surface ne soit pas parallèle à Oz. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A, $Z = F(x, y)$ l'équation de la surface S, $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ les équations de Γ, et imaginons que, dans un certain mode de correspondance, MM' soit un infiniment petit d'ordre $n+1$. Les coordonnées x, y, z du point M sont

$$x_0 + h, \quad f(x_0 + h), \quad \varphi(x_0 + h);$$

appelons X, Y, $Z = F(X, Y)$ les coordonnées de M'. Pour que MM' soit d'ordre $n+1$ par rapport à l'arc AM ou, ce qui revient au même, par rapport à h, il faut que chacune des différences $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ soit un infiniment petit d'ordre $n+1$ au moins. On doit donc avoir

$$X - x = \alpha h^{n+1}, \qquad Y - y = \beta h^{n+1}, \qquad Z - z = F(X, Y) - z = \gamma h^{n+1},$$

α, β, γ restant finis pour $h = 0$, et par suite

$$F(x + \alpha h^{n+1}, y + \beta h^{n+1}) - z = \gamma h^{n+1}.$$

La différence $F(x, y) - z$ sera donc elle-même d'ordre $n+1$ au moins. Ceci prouve que, si l'on fait correspondre au point M de Γ le point N de S où la parallèle à Oz perce la surface, l'ordre infinitésimal de MN est au moins égal à celui de MM'. On aura donc l'ordre de contact de la surface et de la courbe en cherchant l'ordre infinitésimal de MN par rapport à l'arc AM ou à h. On peut dire encore que *c'est l'ordre de contact de* Γ *avec la courbe* Γ' *qui est la trace sur la surface du cylindre projetant* Γ *parallèlement à* Oz. (Il est clair d'ailleurs que la direction de Oz peut être une direction quelconque non parallèle au plan tangent.)

Les équations de la courbe Γ' sont

$$y = f(x), \qquad Z = F[x, f(x)] = \Phi(x);$$

et l'on a, par hypothèse,

$$\Phi(x_0) = \varphi(x_0), \qquad \Phi'(x_0) = \varphi'(x_0);$$

si l'on a, en outre,

$$\Phi''(x_0) = \varphi''(x_0), \quad \ldots, \quad \Phi^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0), \quad \Phi^{(n+1)}(x_0) \neq \varphi^{(n+1)}(x_0),$$

la courbe et la surface ont un contact d'ordre n. Observons que l'équation $\Phi(x) = \varphi(x)$ donne les abscisses des points d'intersec-

tion de la courbe et de la surface; les conditions pour qu'il y ait un contact d'ordre n en un point A expriment qu'il y a $n+1$ points de rencontre confondus avec le point A.

Prenons encore le cas où la courbe Γ est représentée par les équations $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$, et la surface S par l'équation $F(x, y, z)=0$. La courbe Γ', définie tout à l'heure, sera représentée par les équations $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\pi(t)$, la fonction $\pi(t)$ étant définie par la relation

$$F[f(t), \varphi(t), \pi(t)]=0.$$

Pour que Γ et Γ' aient un contact d'ordre n, il faut que $\pi(t)-\psi(t)$ soit un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à $t-t_0$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\pi(t_0)=\psi(t_0), \qquad \pi'(t_0)=\psi'(t_0), \qquad \ldots, \qquad \pi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0).$$

On peut encore écrire ces conditions, $\mathfrak{F}(t)$ ayant la même signification que plus haut (n° **234**),

$$\mathfrak{F}(t_0)=0, \qquad \mathfrak{F}'(t_0)=0, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=0;$$

elles expriment que la courbe et la surface ont $(n+1)$ points communs confondus au point de contact.

Si la surface S dépend de $n+1$ paramètres $a, b, c, \ldots, l$, on peut en disposer de façon que cette surface ait un contact d'ordre n avec une courbe donnée, en un point donné; la surface ainsi obtenue est dite *osculatrice*.

Dans le cas d'un plan, on a trois paramètres; les équations qui déterminent ces paramètres sont les suivantes

$$\begin{aligned} Af(t)+B\varphi(t)+C\psi(t)+D&=0,\\ Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)&=0,\\ Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)&=0.\end{aligned}$$

On a bien les équations qui déterminent le plan osculateur, et l'on voit que le contact est en général du second ordre. Pour que le contact fût d'ordre plus élevé, il faudrait que l'on eût

$$Af'''(t)+B\varphi'''(t)+C\psi'''(t)=0,$$

c'est-à-dire que le plan osculateur fût stationnaire.

237. Sphère osculatrice. — Une sphère dépend de quatre paramètres; la sphère osculatrice a donc un contact du troisième ordre.

Pour simplifier les calculs, supposons les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe Γ exprimées en fonction de l'arc s de cette courbe. Pour que la sphère de centre (a, b, c) et de rayon ρ ait un contact du troisième ordre avec la courbe Γ en un point donné de cette courbe, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathcal{F}(s) = 0, \qquad \mathcal{F}'(s) = 0, \qquad \mathcal{F}''(s) = 0, \qquad \mathcal{F}'''(s) = 0,$$

en posant

$$\mathcal{F}(s) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - \rho^2,$$

x, y, z étant supposés exprimés en fonction de s. Les trois dernières conditions développées s'écrivent, en appliquant les formules de Frenet,

$$\mathcal{F}'(s) = (x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma = 0,$$

$$\mathcal{F}''(s) = (x-a)\frac{\alpha'}{R} + (y-b)\frac{\beta'}{R} + (z-c)\frac{\gamma'}{R} + 1 = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'''(s) = &-\frac{x-a}{R}\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right) - \frac{y-b}{R}\left(\frac{\beta}{R} + \frac{\beta''}{T}\right)\\ &-\frac{z-c}{R}\left(\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma''}{T}\right) - \frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\left[(x-a)\alpha' + (y-b)\beta' + (z-c)\gamma'\right] = 0.\end{aligned}$$

Ces trois équations déterminent a, b, c. Or la première représente, quand on y regarde a, b, c comme les coordonnées courantes, le plan normal à la courbe au point (x, y, z), et les deux autres s'en déduisent en différentiant par rapport au paramètre variable s; le centre de la sphère osculatrice coïncide donc avec le point où la droite polaire touche son enveloppe. Pour résoudre ces trois équations, observons que la dernière peut s'écrire, en tenant compte des deux autres,

$$(x-a)\alpha'' + (y-b)\beta'' + (z-c)\gamma'' = T\frac{dR}{ds},$$

et l'on en tire facilement

$$a = x + R\alpha' - T\frac{dR}{ds}\alpha'',$$

$$b = y + R\beta' - T\frac{dR}{ds}\beta'',$$

$$c = z + R\gamma' - T\frac{dR}{ds}\gamma'';$$

le rayon de la sphère osculatrice est donné par la formule

$$\rho^2 = R^2 + T^2 \left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Si R est constant, le centre de la sphère osculatrice coïncide avec le centre de courbure; ce qui est bien d'accord avec un résultat déjà obtenu (n° 233).

238. **Droites osculatrices à une surface.** — Si les équations d'une courbe C dépendent de $n+2$ paramètres variables, on peut disposer de ces paramètres de façon que cette courbe ait, avec une surface donnée S, en un point donné M, un contact d'ordre n. En effet, en écrivant que la courbe C passe par le point M, et qu'elle y rencontre la surface S en $n+1$ points confondus, on a en tout $n+2$ équations pour déterminer les paramètres. Par exemple, une droite dépend de quatre paramètres; il existe donc, en chaque point d'une surface, une ou plusieurs droites ayant un contact du second ordre avec la surface. Pour déterminer ces droites, prenons pour origine le point considéré de la surface, l'axe des z n'étant pas dans le plan tangent, et soit $z = F(x, y)$ l'équation de la surface dans ce système d'axes. La droite cherchée passe évidemment par l'origine, et ses équations sont de la forme

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \rho;$$

l'équation $c\rho = F(a\rho, b\rho)$ doit admettre $\rho = 0$ pour racine triple, ce qui exige que l'on ait

$$c = ap + bq,$$
$$0 = a^2 r + 2abs + b^2 t,$$

p, q, r, s, t désignant les valeurs des dérivées du premier et du second ordre de $F(x, y)$ pour $x = y = 0$. La première de ces deux relations exprime que la droite cherchée est dans le plan tangent à la surface, ce qui était encore évident *a priori*. On voit de plus que le rapport $\frac{b}{a}$ est déterminé par une équation du second degré, qui a ses racines réelles pourvu que $s^2 - rt$ soit positif. En chaque point d'une surface, il y a donc en général *deux* droites, et deux seulement, qui ont un contact du second ordre

avec la surface; ces droites sont réelles ou imaginaires suivant le signe de $s^2 - rt$. Nous retrouverons ces deux droites au Chapitre suivant, dans l'étude de la courbure des surfaces.

EXERCICES.

1. Trouver en termes finis les équations des développées de la courbe qui coupe sous un angle constant les génératrices rectilignes du cône circulaire droit; discussion.

[*Licence :* Marseille, juillet 1884.]

2. Existe-t-il des courbes gauches Γ telles que les points de rencontre d'un plan fixe P avec la tangente, la normale principale et la binormale soient les sommets d'un triangle équilatéral?

3. Soit Γ l'arête de rebroussement d'une surface enveloppe de sphères (enveloppe des cercles caractéristiques); la courbe qui est le lieu du centre de la sphère variable est située sur la surface polaire de Γ. Réciproque.

4. Étant donnée une courbe gauche Γ, par un point fixe O de l'espace on mène une droite parallèle à la droite polaire en un point M de Γ, et l'on porte sur cette droite une longueur ON égale au rayon de courbure de Γ au point M. Le point N décrit une courbe gauche Γ', qui correspond à la courbe Γ'', lieu des centres de courbure de Γ, avec égalité et orthogonalité des éléments linéaires. Les rayons de courbure des deux courbes Γ' et Γ'' sont égaux aux points correspondants.

[Rouquet.]

5. Si le rayon de la sphère osculatrice à une courbe gauche Γ a une longueur constante a, cette courbe est située sur une sphère de rayon a, à moins que le rayon de courbure ne soit constant et égal à a.

6. Pour que le lieu des centres de courbure d'une hélice tracée sur un cylindre soit une autre hélice tracée sur un cylindre parallèle au premier, il faut et il suffit que la section droite de celui-ci soit un cercle ou une spirale logarithmique. Dans le dernier cas, ces hélices sont situées sur des cônes de révolution de même axe et de même sommet.

[Tissot, *Nouvelles Annales*, t. XI; 1852.]

7*. Si deux courbes gauches admettent les mêmes normales principales, les plans osculateurs de ces deux courbes aux points où elles coupent une même normale font un angle constant. Ces deux points et les centres de courbure des deux courbes déterminent quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Le produit des rayons de torsion des deux courbes aux points correspondants est constant.

[Paul Serret, Mannheim, Schell.]

8*. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point d'une courbe gauche Γ, s l'arc de cette courbe. On appelle *courbe adjointe* la courbe Γ_0 dont les coordonnées ont pour expressions

$$x_0 = \int \alpha'' ds, \qquad y_0 = \int \beta'' ds, \qquad z_0 = \int \gamma'' ds,$$

et *courbes associées* les courbes représentées par les équations

$$X = x \cos\theta + x_0 \sin\theta, \qquad Y = y \cos\theta + y_0 \sin\theta, \qquad Z = z \cos\theta + z_0 \sin\theta,$$

où θ est un angle constant. Trouver la disposition du trièdre fondamental pour ces nouvelles courbes, ainsi que les rayons de courbure et de torsion.

Si la courbe Γ est à courbure constante, la courbe Γ_0 est à torsion constante, et les courbes associées sont des courbes de M. Bertrand. En déduire les équations générales de ces dernières courbes.

9. Étant données deux courbes Γ, Γ', tangentes en un point A, on prend sur ces courbes, à partir du point A, et dans le même sens, deux arcs égaux très petits AM, AM'. Trouver la position limite de la droite MM'.

[Cauchy.]

10. Pour qu'une droite invariablement liée au trièdre fondamental d'une courbe gauche Γ, et passant par le sommet du trièdre, engendre une surface développable, il faut que cette droite se confonde avec la tangente, à moins que la courbe Γ ne soit une hélice. Dans ce cas, il y a une infinité de droites répondant à la question.

Pour une courbe de M. Bertrand, il existe deux paraboloïdes hyperboliques, invariablement liés au trièdre fondamental, dont toutes les génératrices engendrent des surfaces développables.

[Cesàrò, *Rivista di Matematica,* t. II, 1892; p. 155.]

11*. Pour que les normales principales d'une courbe gauche soient les binormales d'une autre courbe gauche, on doit avoir entre le rayon de courbure et le rayon de torsion une relation de la forme

$$A\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}\right) = \frac{B}{R},$$

A et B étant des constantes.

[Mannheim; *Comptes rendus,* 1877.]

Les cas où une droite menée par un point d'une courbe gauche, et invariablement liée au trièdre fondamental, reste la normale principale ou la binormale d'une autre courbe gauche ont été étudiés par Pellet (*Comptes rendus,* mai 1887), par Cesàrò (*Nouvelles Annales,* 1888; p. 147), par Balitrand (*Mathesis,* 1894; p. 159).

12. Si le plan osculateur à une courbe gauche Γ reste tangent à une sphère fixe, de centre O : 1° le plan mené par la tangente, perpendiculaire à la normale principale, passe par le point O : 2° le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion est une fonction linéaire de l'arc. Réciproques.

CHAPITRE XII.

SURFACES.

I. — COURBURE DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

239. Formule fondamentale. Théorème de Meusnier. — Pour étudier la courbure d'une surface en un point M non singulier, nous la supposerons rapportée à un système de trois axes rectangulaires, l'axe des z n'étant pas parallèle au plan tangent. Si la surface est analytique, elle sera représentée par une équation de la forme

$$(1) \qquad z = F(x, y),$$

la fonction $F(x, y)$ étant développable en série entière ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$ et de $y - y_0$ dans le voisinage du point considéré (x_0, y_0, z_0) (n° 194). Mais les raisonnements qui vont suivre n'exigent pas que la surface soit analytique; nous supposerons seulement que la fonction $F(x, y)$ et ses dérivées partielles du premier et du second ordre, que nous désignerons, suivant la notation de Monge, par p, q, r, s, t, sont continues dans le voisinage des valeurs x_0, y_0. D'après l'équation du plan tangent, les cosinus directeurs de la normale à la surface sont proportionnels à p, q, -1; si l'on adopte comme direction positive celle qui fait un angle aigu avec Oz, les cosinus directeurs λ, μ, ν sont donnés sans ambiguïté par les formules

$$(2) \quad \lambda = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \mu = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Soit C une courbe située sur la surface et passant au point M; les coordonnées d'un point de cette courbe sont des fonctions d'un paramètre variable qui vérifient identiquement l'équation (1), et dont les différentielles satisfont par conséquent aux deux rela-

tions

$$(3)\qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$(4)\qquad d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2;$$

la première de ces relations exprime que la tangente à la courbe C est située dans le plan tangent à la surface. Pour interpréter la seconde, nous exprimerons les différentielles au moyen d'éléments ayant une signification géométrique; or, si la variable indépendante est l'arc σ de la courbe C, on a

$$\frac{dx}{d\sigma} = \alpha, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \beta, \quad \frac{dz}{d\sigma} = \gamma, \quad \frac{d^2x}{d\sigma^2} = \frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d^2y}{d\sigma^2} = \frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d^2z}{d\sigma^2} = \frac{\gamma'}{R},$$

α, β, γ, α', β', γ', R ayant la signification habituelle (n° **229**). La formule (4) devient alors, en divisant les deux membres par $\sqrt{1+p^2+q^2}$,

$$\frac{\gamma' - p\alpha' - q\beta'}{R\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ce qui peut encore s'écrire, d'après les formules (2),

$$\frac{\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma'}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Mais le numérateur $\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma'$ représente précisément le cosinus de l'angle θ que fait la direction de la normale principale à la courbe C avec la direction positive de la normale à la surface, et nous obtenons ainsi la formule fondamentale

$$(5)\qquad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

qui est entièrement équivalente à la relation (4), et qui renferme par conséquent tout ce qui concerne la courbure des courbes situées sur la surface. Dans cette formule, le rayon de courbure R et le radical $\sqrt{1+p^2+q^2}$ sont des quantités positives, de sorte que $\cos\theta$ est du même signe que $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$; le signe de cette quantité indique donc si l'angle θ est aigu ou obtus.

Considérons d'abord toutes les courbes situées sur la surface, passant au point M, et ayant en ce point le même plan osculateur (distinct du plan tangent). Toutes ces courbes ont même tan-

gente, l'intersection du plan osculateur avec le plan tangent à la surface; les cosinus α, β, γ sont donc les mêmes pour toutes ces courbes. D'autre part, si l'on mène dans le plan osculateur une perpendiculaire à la tangente, la direction de la normale principale coïncide avec l'une des deux directions que l'on peut considérer sur cette droite. Soit ω l'angle de la normale à la surface avec l'une de ces directions; on doit avoir $\theta = \omega$, ou $\theta = \pi - \omega$. Mais le signe de $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ indique si l'angle θ est aigu ou obtus; il s'ensuit que la direction de la normale principale est la même pour toutes les courbes considérées. L'angle θ étant le même, il s'ensuit que le rayon de courbure R a aussi la même valeur et, par conséquent, *toutes les courbes de la surface passant au point* M, *et ayant en ce point le même plan osculateur, ont aussi le même centre de courbure.*

Il suffit donc d'étudier la courbure des sections planes faites dans la surface. Nous étudierons d'abord comment varie la courbure des diverses sections planes faites dans la surface par des plans passant par une même tangente MT. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que l'on a, pour cette tangente, $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 > 0$, car il suffit de changer la direction positive de Oz pour que r, s, t changent de signe. Pour toutes ces sections planes, on a donc $\cos\theta > 0$, et l'angle θ est aigu. En particulier, soit R_1 le rayon de courbure de la section faite par le plan normal passant par MT; l'angle θ correspondant est nul, et l'on a

$$\frac{1}{R_1} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Pour une section oblique dont le plan fait un angle θ avec le plan de la section normale, le rayon de courbure R est donné par la formule (5). La comparaison de ces deux formules montre que l'on a

$$(6) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{\cos\theta}{R}$$

ou $R = R_1 \cos\theta$, relation qui exprime que *le centre de courbure de la section oblique est la projection du centre de courbure de la section normale*. C'est le théorème de Meusnier.

La formule précédente ramène l'étude de la courbure d'une

section oblique à l'étude de la courbure d'une section normale. Nous exposerons tout à l'heure les résultats dus à Euler; nous observerons d'abord que, pour une section normale, la formule (5) prendra deux formes différentes suivant le signe de $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$. Afin d'éviter cet inconvénient, nous conviendrons dorénavant de désigner par R le rayon de courbure d'une section normale affecté d'un signe, le signe + ou le signe —, suivant que la direction qui va du point M au centre de courbure coïncide avec la direction positive de la normale à la surface ou avec la direction opposée. Avec cette convention, R est donné dans les deux cas par la formule

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

qui fait connaître sans ambiguïté la position du centre de courbure.

De la formule (7) on déduit aisément la position de la surface par rapport à son plan tangent dans le voisinage du point de contact. Si l'on a $s^2 - rt < 0$, le trinome $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ conserve un signe constant, celui de r et de t, lorsque le plan sécant tourne autour de la normale; toutes les sections normales ont leur centre de courbure du même côté du plan tangent, et sont par conséquent situées du même côté de ce plan; on dit que la surface est *convexe* au point considéré. Au contraire, si l'on a $s^2 - rt > 0$, le trinome $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ s'annule pour deux positions particulières du plan sécant; les sections normales correspondantes présentent un point d'inflexion. Lorsque le plan sécant est dans l'un des angles dièdres formés par ces deux plans, R est positif, et la section est au-dessus du plan tangent; lorsque le plan sécant est dans l'angle dièdre supplémentaire, R est négatif et la section est au-dessous du plan tangent. La surface traverse donc le plan tangent dans le voisinage du point de contact; on dit qu'elle est *à courbures opposées*. Enfin, si $s^2 - rt = 0$, toutes les sections normales sont d'un même côté du plan tangent, sauf l'une d'elles qui a un rayon de courbure infini et qui traverse en général le plan tangent; on dit que le point est un point *parabolique*.

Il est facile de confirmer ces résultats par l'étude directe de la différence $u = z - z'$ des valeurs de z pour un point de la sur-

face et le point du plan tangent en M qui se projettent en un même point (x, y) sur le plan des xy. En effet, on a

$$z' = p(x - x_0) + q(y - y_0),$$

et par suite, pour le point de contact (x_0, y_0), on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p - \frac{\partial z'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

puis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t.$$

Si $s^2 - rt < 0$, u est maximum ou minimum au point M (n° 56), et, comme u est nul en ce point, u conserve un signe constant dans les environs; au contraire, si $s^2 - rt > 0$, il n'y a ni maximum ni minimum pour u, qui, par conséquent, ne garde pas le même signe dans le voisinage du point M.

240. Théorèmes d'Euler. Indicatrice. — Pour étudier la variation en grandeur du rayon de courbure d'une section normale, imaginons qu'on ait pris pour origine le point considéré de la surface et pour plan des xy le plan tangent à cette surface. On a, dans ce système d'axes, $p = q = 0$, et la formule (7) devient

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\varphi + 2s\cos\varphi\sin\varphi + t\sin^2\varphi, \tag{8}$$

φ étant l'angle que fait avec Ox la trace du plan sécant sur le plan des xy. En égalant à zéro la dérivée du second membre, on trouve que R est maximum ou minimum pour deux directions rectangulaires. Afin d'étudier en détail la variation de R dans tous les cas particuliers possibles, il est commode d'employer la représentation géométrique suivante. Imaginons que sur la trace du plan sécant on porte une longueur Om égale à la racine carrée de la valeur absolue du rayon de courbure; ce point m décrira une courbe et il est clair que l'inspection de cette courbe supposée tracée fait connaître aussitôt la variation du rayon de courbure. Cela posé, examinons les trois cas possibles :

1° $s^2 - rt < 0$. Le rayon R a un signe constant; nous le supposerons positif. On a, pour les coordonnées du point m, $\xi = \sqrt{R}\cos\varphi$, $\eta = \sqrt{R}\sin\varphi$, et l'équation de la courbe cherchée

est par conséquent

$$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = 1; \tag{9}$$

cette courbe est une ellipse appelée *indicatrice,* qui a pour centre l'origine. On voit que R est maximum lorsque la trace du plan sécant coïncide avec le grand axe de l'ellipse et minimum lorsque cette trace coïncide avec le petit axe, et que deux plans sécants dont les traces sont également inclinées sur les axes de l'indicatrice donnent la même valeur pour R. Les sections normales passant par les axes de l'indicatrice s'appellent les *sections normales principales* et les rayons de courbure correspondants sont les *rayons de courbure principaux.* Si l'on a pris pour axes des x et des y les axes mêmes de l'indicatrice, on a, dans ce système d'axes, $s = 0$, et la formule (8) devient

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\varphi + t\sin^2\varphi;$$

les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 s'obtiennent en faisant $\varphi = 0$, ou $\varphi = \frac{\pi}{2}$. On a donc $\frac{1}{R_1} = r$, $\frac{1}{R_2} = t$, et par suite

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \tag{10}$$

2° $s^2 - rt > 0$. Les sections normales correspondant aux valeurs de l'angle φ, racines de l'équation

$$r\cos^2\varphi + 2s\cos\varphi\sin\varphi + t\sin^2\varphi = 0$$

ont un rayon de courbure infini. Soient $L_1'OL_1$, $L_2'OL_2$ les traces de ces deux plans sur xOy. Lorsque la trace du plan sécant est comprise dans l'angle L_1OL_2, par exemple, le trinome est positif et, en employant la même représentation que dans le premier cas, on voit que la portion correspondante de l'indicatrice est représentée par l'équation

$$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = 1;$$

c'est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites $L_1'OL_1$ et $L_2'OL_2$. Lorsque la trace du plan sécant est comprise dans l'angle $L_2'OL_1$, on a $R < 0$ et, pour avoir la portion correspondante de l'indicatrice, on doit poser

$$\xi = \sqrt{-R}\cos\varphi, \qquad \eta = \sqrt{-R}\sin\varphi,$$

ce qui conduit à l'équation de l'hyperbole conjuguée de la précédente

$$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = -1.$$

L'ensemble de ces deux hyperboles conjuguées permet encore de se faire une idée de la variation du rayon de courbure d'une section normale. Si l'on prend pour axes de coordonnées les axes de ces hyperboles, la formule générale (8) prend encore la forme (10), R_1 et R_2 désignant les deux rayons de courbure principaux, dont l'un est positif, l'autre négatif.

3° $s^2 - rt = 0$. Dans ce cas, le rayon de courbure R conserve un signe constant, le signe + par exemple. L'indicatrice est encore représentée par l'équation (9); mais cette courbe, étant du genre parabole et ayant pour centre l'origine, se compose forcément de deux droites parallèles. Si l'on a pris l'axe des y parallèle à ces deux droites, on doit avoir dans ce système d'axes $s = 0$, $t = 0$, et la formule générale (8) prend la forme

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\varphi,$$

ou

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1}.$$

On peut aussi la considérer comme un cas limite de la formule (10), obtenu en supposant que l'un des rayons de courbure principaux R_2 devient infini.

Les formules d'Euler peuvent aussi s'établir sans avoir besoin de la formule préliminaire (5). Le point de la surface étant pris pour origine et le plan tangent pour plan des xy, on peut écrire, en poussant le développement de z par la formule de Taylor jusqu'aux termes du troisième ordre,

$$z = \frac{rx^2 + 2sxy + ty^2}{1.2} + \dots,$$

les termes non écrits étant du troisième ordre, ou d'ordre plus élevé. Pour avoir le rayon de courbure de la section faite par le plan $y = x\tang\varphi$, on peut faire d'abord la transformation de coordonnées

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \qquad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi,$$

et poser ensuite $y' = 0$, ce qui donne le développement de z suivant les

puissances de x'

$$z = \frac{r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi}{1.2} x'^2 + \ldots$$

et, en appliquant la remarque du n° **214**, nous retrouvons la formule (8).

Remarques. — La courbe d'intersection de la surface par son plan tangent, qui a pour équation

$$0 = rx^2 + 2sxy + ty^2 + \varphi_3(x, y) + \ldots,$$

présente un point double à l'origine, et les tangentes au point double sont précisément les tangentes asymptotiques. Plus généralement, si deux surfaces S, S_1 sont tangentes à l'origine au plan des xy, la projection de la courbe d'intersection sur le plan des xy a pour équation

$$0 = (r - r_1)x^2 + 2(s - s_1)xy + (t - t_1)y^2 + \ldots,$$

r_1, s_1, t_1 ayant la même signification pour la surface S_1 que r, s, t pour la surface S. La nature du point double dépend du signe de l'expression $(s - s_1)^2 - (r - r_1)(t - t_1)$; si celle-ci est nulle, la courbe d'intersection présente en général un point de rebroussement.

En résumé, il existe en chaque point d'une surface quatre positions remarquables pour les tangentes à cette surface; deux tangentes rectangulaires pour lesquelles le rayon de courbure R est maximum ou minimum, et deux tangentes *asymptotiques* ou *tangentes principales* pour lesquelles R est infini. On obtient celles-ci en égalant à zéro le trinome $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ (*cf.* n° **238**). Nous allons montrer maintenant comment on détermine les sections normales principales et les rayons de courbure principaux dans un système d'axes rectangulaires quelconque.

241. Rayons de courbure principaux. — A une valeur donnée pour R correspondent en général deux sections normales, dont le rayon de courbure correspondant a la valeur donnée; il n'y a d'exception que si R est égal à l'un des rayons de courbure principaux, et il n'y a dans ce cas que la section normale principale correspondante qui admette ce rayon de courbure. Pour déterminer les sections normales dont le rayon de courbure est R, nous avons à déterminer α, β, γ par les trois relations

$$\frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2, \qquad \gamma = p\alpha + q\beta, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

dont il est facile de former une combinaison homogène et de degré zéro en α, β,

$$(11) \qquad \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2};$$

le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est donc fourni par l'équation

$$\alpha^2(1+p^2-rD) + 2\alpha\beta(pq-sD) + \beta^2(1+q^2-tD) = 0,$$

où l'on pose $R = D\sqrt{1+p^2+q^2}$. Si cette équation admet une racine double, cette racine annule à la fois les deux dérivées partielles du premier membre par rapport à α et à β,

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha(1+p^2-rD) + \beta(pq-sD) &= 0, \\ \alpha(pq-sD) + \beta(1+q^2-tD) &= 0; \end{aligned} \right.$$

en éliminant α et β, on obtient l'équation qui donne les rayons de courbure principaux, équation qui s'écrit, en remplaçant D par sa valeur,

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} (rt-s^2)R^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs]\,R \\ + (1+p^2+q^2)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si, au contraire, on élimine D entre les relations (12), on obtient une équation du second degré qui détermine les traces sur le plan tangent des sections normales principales

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha^2[(1+p^2)s - pqr] \\ &+ \alpha\beta[(1+p^2)t - (1+q^2)r] + \beta^2[pqt - (1+q^2)s] = 0. \end{aligned} \right.$$

D'après la nature même de la question, les racines des équations (13) et (14) sont toujours réelles; ce qu'il est aisé de vérifier par un calcul direct.

Pour que l'équation en R ait ses racines égales, il faudra que l'indicatrice soit un cercle, et toutes les sections normales auront alors le même rayon de courbure. Le second membre de la formule (11) devra donc être indépendant du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, et il faudra pour cela que l'on ait

$$(15) \qquad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

Les points qui satisfont à ces conditions s'appellent des *ombilics*. En ces points, l'équation (14) se réduit à une identité, puisque tout diamètre d'un cercle est aussi un axe de symétrie.

On peut quelquefois déterminer, par des considérations géométriques, les sections normales principales d'une surface. Par exemple, si une surface S admet un plan de symétrie passant par un point M de cette surface, il est clair que la droite d'intersection de ce plan avec le plan tangent en M est un axe de symétrie de l'indicatrice, et la section par le plan de symétrie est une des sections normales principales. Ainsi, en un point d'une surface de révolution, la méridienne est une des sections normales principales; le plan de la seconde section normale principale passe donc par la normale à la surface et la tangente au parallèle. Or on connaît le centre de courbure de l'une des sections obliques passant par la tangente au parallèle, le centre du parallèle lui-même. Il en résulte, d'après le théorème de Meusnier, que le centre de courbure de la seconde section principale est au point de rencontre de la normale à la surface avec l'axe.

En un point d'une surface développable, on a $s^2 - rt = 0$, et l'indicatrice est un système de deux droites. Une des sections principales se confond avec la génératrice elle-même, et le rayon de courbure principal correspondant est infini. Le plan de la seconde section principale est perpendiculaire à la génératrice. Tous les points d'une surface développable sont *paraboliques,* et ce sont les seules surfaces possédant cette propriété (n° **222**).

Si une surface non développable est convexe en certains points, à courbures opposées en d'autres points, elle possède, en général, une ligne de points paraboliques qui sépare les régions pour lesquelles $s^2 - rt$ est positif des régions pour lesquelles $s^2 - rt$ est négatif. Par exemple, sur le tore, cette ligne est formée des deux parallèles extrêmes.

Sur une surface convexe, il n'y a en général qu'un certain nombre d'ombilics isolés les uns des autres. On démontre comme il suit que la seule surface réelle dont tous les points sont des ombilics est la sphère. Appelons encore λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à la surface; en différentiant les formules (2), il vient

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{pqs - (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{pqt - (1+q^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{pqr - (1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{pqs - (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

relations qui deviennent, en tenant compte des formules (15),

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

La première prouve que λ ne dépend que de x, la seconde que μ ne dépend que de y; la valeur commune des dérivées $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ est donc à la fois indépendante de x et de y : c'est une constante $\frac{1}{a}$. On en tire

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a}, \qquad \mu = \frac{y - y_0}{a}, \qquad \nu = \frac{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}{a},$$

$$p = -\frac{\lambda}{\nu} = -\frac{x - x_0}{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}},$$

$$q = -\frac{\mu}{\nu} = -\frac{y - y_0}{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}},$$

et la valeur de z, obtenue par l'intégration, est

$$z = z_0 + \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2};$$

on retrouve bien l'équation d'une sphère. On verrait de même que, si l'on a $\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$, la surface est un plan. Mais les relations (15) admettent en outre une infinité de solutions imaginaires, qui satisfont à l'équation $1 + p^2 + q^2 = 0$, comme on peut le vérifier en différentiant cette relation par rapport à x et par rapport à y.

II. LIGNES ASYMPTOTIQUES. — LIGNES CONJUGUÉES.

242. Définition et propriétés des lignes asymptotiques. — Sur une surface à courbures opposées, il y a en chaque point deux tangentes pour lesquelles la section normale correspondante a un rayon de courbure infini : ce sont les asymptotes de l'indicatrice. On appelle *lignes asymptotiques* les lignes situées sur la surface qui sont tangentes en chacun de leurs points à l'une de ces asymptotes. Quand on se déplace sur une courbe située sur la surface, les différentielles dx, dy, dz sont proportionnelles aux cosinus directeurs α, β, γ de la tangente; pour une tangente asymptotique, on a $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0$, et par conséquent, tout le

long d'une ligne asymptotique, on doit avoir

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{16}$$

L'équation de la surface étant supposée résolue par rapport à z, si l'on remplace r, s, t par leurs valeurs en fonction des variables x, y, on tire de l'équation précédente deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi_2(x, y); \tag{17}$$

nous verrons plus tard que chacune de ces équations admet une infinité d'intégrales, et que chaque couple de valeurs (x_0, y_0) détermine en général une intégrale et une seule. Par chaque point de la surface il passe donc en général deux lignes asymptotiques et deux seulement; leur ensemble forme un double système de lignes sur la surface.

On peut encore définir les lignes asymptotiques par la propriété suivante qui ne fait intervenir aucune relation métrique. Ce sont les *lignes de la surface dont le plan osculateur coïncide avec le plan tangent*. En effet, pour que le plan osculateur coïncide avec le plan tangent, il faut et il suffit que l'on ait à la fois (n° 215)

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y = 0;$$

la première relation est vérifiée pour toute courbe située sur la surface et, en la différentiant, il vient

$$d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y - dp\,dx - dq\,dy = 0.$$

La seconde condition peut donc être remplacée par celle-ci, ne renfermant que les différentielles du premier ordre

$$dp\,dx + dq\,dy = 0, \tag{18}$$

qui est identique à la relation (16). D'ailleurs, il est facile de se rendre compte de l'identité des deux définitions. Le rayon de courbure de la section normale tangente à une asymptote de l'indicatrice étant infini, il en serait de même, d'après le théorème de Meusnier, du rayon de courbure de la ligne asymptotique, à moins que le plan osculateur ne soit perpendiculaire à la normale et, dans ce cas, le théorème de Meusnier devient illusoire. Le plan osculateur à une ligne asymptotique doit donc coïncider avec le

plan tangent, à moins que le rayon de courbure ne soit constamment infini; dans ce cas, on aurait une ligne droite, dont le plan osculateur est indéterminé. Il résulte évidemment de cette propriété que les lignes asymptotiques se conservent dans toute transformation homographique. On voit aussi que l'équation différentielle est la même, que les axes soient rectangulaires ou obliques, car l'équation du plan osculateur est toujours la même.

Les lignes asymptotiques d'une surface S n'existent évidemment que si la surface est à courbures opposées. Cependant, lorsque la surface est *analytique*, l'équation différentielle (16) admet toujours une infinité d'intégrales, réelles ou imaginaires, quel que soit le signe de $s^2 - rt$. Par extension, nous dirons qu'une surface convexe analytique admet deux systèmes de lignes asymptotiques imaginaires. Ainsi, les lignes asymptotiques d'un hyperboloïde à une nappe sont les deux systèmes de génératrices rectilignes; pour un ellipsoïde ou une sphère, ces génératrices sont imaginaires, mais elles satisfont encore à l'équation différentielle des lignes asymptotiques.

Exemple. — Soit à trouver les lignes asymptotiques de la surface

$$z = x^m y^n;$$

on a

$$r = m(m-1)x^{m-2}y^n, \qquad s = mnx^{m-1}y^{n-1}, \qquad t = n(n-1)x^m y^{n-2},$$

et l'équation différentielle (16) peut s'écrire

$$m(m-1)\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right)^2 + 2mn\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right) + n(n-1) = 0.$$

On en tire deux valeurs, h_1 et h_2, pour le rapport $\frac{y\,dx}{x\,dy}$; les deux familles de lignes asymptotiques se projettent sur le plan des xy suivant les courbes

$$y^{h_1} = C_1 x, \qquad y^{h_2} = C_2 x.$$

243. Équation différentielle en coordonnées quelconques. — Supposons les coordonnées d'un point d'une surface exprimées au moyen de deux paramètres variables u, v,

$$(19) \qquad x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v);$$

nous partirons de la seconde définition pour établir l'équation différentielle des lignes asymptotiques. Formons d'abord l'équa-

tion du plan tangent

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0; \tag{20}$$

les coefficients A, B, C doivent satisfaire aux deux relations

$$\left\{\begin{aligned} &A\frac{\partial f}{\partial u}+B\frac{\partial \varphi}{\partial u}+C\frac{\partial \psi}{\partial u}=0,\\ &A\frac{\partial f}{\partial v}+B\frac{\partial \varphi}{\partial v}+C\frac{\partial \psi}{\partial v}=0,\end{aligned}\right. \tag{21}$$

qui déterminent les rapports de deux des coefficients A, B, C au troisième (n° 39). Ces coefficients étant calculés, on doit avoir pour une ligne asymptotique

$$\begin{aligned} &A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,\\ &A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0;\end{aligned}$$

la première est encore satisfaite d'elle-même, et, en la différentiant, on voit que la seconde peut être remplacée par

$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0; \tag{22}$$

c'est l'équation différentielle cherchée. Si, par exemple, on prend dans les formules (21) $C=-1$, A et B représentent respectivement les dérivées partielles p et q de z par rapport à x et à y, et l'équation (22) est identique à l'équation (18).

Exemples. — Prenons par exemple la surface conoïde $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. On peut poser $x=u$, $y=uv$, $z=\varphi(v)$, et les relations (21) deviennent

$$A+Bv=0, \qquad Bu-C\varphi'(v)=0;$$

on y satisfait en prenant $C=-u$, $A=-v\varphi'(v)$, $B=\varphi'(v)$, et l'équation différentielle (22) est ici

$$u\varphi''(v)\,dv^2-2\varphi'(v)\,du\,dv=0.$$

On a d'abord la solution $v=$ const. qui donne les génératrices rectilignes; en divisant par dv, il reste l'équation

$$\frac{\varphi''(v)\,dv}{\varphi'(v)}=\frac{2\,du}{u},$$

d'où l'on tire $u^2=C\varphi'(v)$, et les projections des lignes asymptotiques du second système sur le plan des xy ont pour équation

$$x^2=C\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot$$

Citons encore les surfaces signalées par M. Jamet, dont l'équation peut être ramenée à la forme

$$xf\left(\frac{y}{x}\right) = F(z).$$

En prenant pour variables indépendantes z et $\frac{y}{x} = u$, l'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$\sqrt{\frac{F''(z)}{F(z)}}\,dz = \pm\sqrt{\frac{f''(u)}{f(u)}}\,du,$$

et s'intègre par deux quadratures.

Une surface hélicoïde est représentée par les équations

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega, \qquad z = f(\rho) + h\omega;$$

nous laissons au lecteur le soin de démontrer que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$\rho f''(\rho)\,d\rho^2 - 2h\,d\omega\,d\rho + \rho^2 f'(\rho)\,d\omega^2 = 0;$$

on en tire encore ω par une quadrature.

241. Lignes asymptotiques des surfaces réglées. — D'une façon générale, l'élimination de A, B, C entre les équations (21) et la relation $A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0$ conduit à l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation ne renferme pas les différentielles du second ordre d^2u et d^2v; on a, en effet,

$$d^2x = \frac{\partial f}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}\,d^2v + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,dv^2,$$

et l'on a pour d^2y et d^2z des expressions analogues. En retranchant de la troisième ligne du déterminant (23) la première ligne

multipliée par d^2u et la deuxième multipliée par d^2v, il reste

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} du\,dv + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0;$$

en développant par rapport aux éléments de la troisième ligne et ordonnant par rapport à du et dv, cette équation s'écrit

$$\text{(24)} \qquad D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0,$$

D, D′, D″ désignant les trois déterminants

$$\text{(25)} \quad \left\{ \begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \qquad D' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}, \\ D'' &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Considérons, pour donner une application, les surfaces réglées. Toute surface réglée est représentée par des équations de la forme

$$x = x_0 + \alpha u, \qquad y = y_0 + \beta u, \qquad z = z_0 + \gamma u,$$

x_0, y_0, z_0, α, β, γ étant des fonctions d'un second paramètre variable v. Lorsqu'on fait $u = 0$, le point (x_0, y_0, z_0) décrit une certaine courbe Γ sur la surface; au contraire, lorsque, v restant constant, on fait varier u, le point décrit une génératrice rectiligne et la variable u est proportionnelle à la distance du point (x, y, z) au point (x_0, y_0, z_0) de la courbe Γ. On voit immédiatement sur les formules (25) que dans ce cas on a $D = 0$,

tandis que D′ est indépendant de u; quant à D″,

$$D'' = \begin{vmatrix} \alpha & \dots \\ x_0'' + \alpha' u & \dots \\ x_0'' + \alpha'' u & \dots \end{vmatrix},$$

c'est un polynome du second degré en u. En divisant le premier membre de l'équation (24) par le facteur dv qui correspond aux génératrices rectilignes, il reste, pour déterminer le second système de lignes asymptotiques, une équation différentielle de la forme

$$(26) \qquad \frac{du}{dv} + Lu^2 + Mu + N = 0,$$

L, M et N étant des fonctions de la variable v. Les équations de cette espèce jouissent de propriétés remarquables, qui seront établies plus tard. Ainsi on verra que *le rapport anharmonique de quatre intégrales quelconques est constant;* il en résulte que le rapport anharmonique des quatre points de rencontre d'une génératrice quelconque de la surface avec quatre lignes asymptotiques est constant, ce qui permet de trouver toutes ces lignes asymptotiques dès qu'on en connaît trois. On verra aussi que lorsqu'on connaît une ou deux intégrales de l'équation (26), on peut trouver toutes les autres par deux quadratures ou une seule quadrature.

Si toutes les génératrices de la surface rencontrent une droite fixe, cette droite est une ligne asymptotique du second système, et l'on aura toutes les autres par deux quadratures. Si la surface admet deux directrices rectilignes, on connaît deux lignes asymptotiques, et il semblerait qu'il faudra une quadrature pour avoir les autres. Mais on peut obtenir un résultat plus précis. En effet, étant donnée une surface réglée admettant deux directrices rectilignes, on peut effectuer une transformation homographique de façon que l'une de ces directrices s'éloigne à l'infini; la surface se change en une surface conoïde, et nous avons remarqué (n° **243**) que les lignes asymptotiques d'une surface conoïde se déterminent sans aucune quadrature.

245. Lignes conjuguées. — On appelle *tangentes conjuguées* en un point d'une surface S deux droites passant par ce point,

situées dans le plan tangent, et formant un système de diamètres conjugués de l'indicatrice. A toute tangente de la surface correspond évidemment une tangente conjuguée qui coïncide avec la première, si elle est une tangente principale et dans ce cas seulement. Soit $z = F(x, y)$ l'équation de la surface; si m et m' sont les coefficients angulaires des projections de deux tangentes conjuguées sur le plan des xy, ces droites doivent être conjuguées harmoniques par rapport aux projections des deux tangentes principales de la surface, projections dont les coefficients angulaires sont racines de l'équation

$$r + 2s\mu + t\mu^2 = 0.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$(27) \qquad r + s(m + m') + tmm' = 0.$$

Étant donnée une courbe C située sur la surface S, le plan tangent à cette surface tout le long de la courbe C enveloppe une surface développable qui est tangente à la surface S tout le long de C; *en chaque point* M *de* C, *la génératrice de cette développable est la tangente conjuguée de la tangente à* C.

Tout le long de la courbe C, x, y, z, p, q sont fonctions d'un paramètre variable α; la génératrice de la surface développable est définie par les deux équations

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0,$$
$$-dz + p\,dx + q\,dy - dp(X - x) - dq(Y - y) = 0,$$

dont la dernière se réduit à

$$\frac{Y - y}{X - x} = -\frac{dp}{dq} = -\frac{r\,dx + s\,dy}{s\,dx + t\,dy}.$$

Soient m le coefficient angulaire de la projection de la tangente à C, m' le coefficient angulaire de la projection de la génératrice; la relation précédente est identique à la relation (27), car on a

$$\frac{dy}{dx} = m, \qquad \frac{Y - y}{X - x} = m';$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

On dit que deux familles de courbes de la surface, dont chacune dépend d'un paramètre variable, forment un *réseau conjugué*,

lorsque les tangentes aux courbes des deux familles qui passent par un point quelconque de la surface y sont conjuguées. Il existe évidemment une infinité de réseaux conjugués, car on peut se donner arbitrairement une des deux familles de courbes, et les courbes de la seconde famille sont déterminées par une équation différentielle du premier ordre.

Étant donnée une surface représentée par les équations (19), cherchons à quelles conditions les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ forment un réseau conjugué. Quand on se déplace sur la courbe $v = \text{const.}$, la caractéristique du plan tangent est représentée par les deux équations

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial u}(X-x)+\frac{\partial B}{\partial u}(Y-y)+\frac{\partial C}{\partial u}(Z-z)=0;$$

pour que cette droite coïncide avec la tangente à la courbe $u = \text{const.}$, dont les paramètres directeurs sont $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$A\frac{\partial x}{\partial v}+B\frac{\partial y}{\partial v}+C\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0;$$

mais, en différentiant la première de ces relations par rapport à u, on voit que la seconde peut être remplacée par la suivante

$$(28)\qquad A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0,$$

et l'élimination de A, B, C entre les équations (21) et (28) conduit finalement à la condition nécessaire et suffisante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}=0.$$

On peut dire encore que cette condition exprime que x, y, z sont trois intégrales d'une équation de la forme

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v}=M\frac{\partial \theta}{\partial u}+N\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

où M et N sont des fonctions quelconques de u et de v; il suffira donc de connaître trois intégrales distinctes d'une équation quelconque de cette forme pour avoir les équations d'une surface rapportée à un système conjugué. Si, par exemple, on prend $M = N = 0$, toute intégrale de l'équation (29) est la somme d'une fonction de u et d'une fonction de v; sur toute surface représentée par des équations de la forme

$$(30)\quad x = f(u) + f_1(v), \qquad y = \varphi(u) + \varphi_1(v), \qquad z = \psi(u) + \psi_1(v),$$

les courbes (u) et (v) forment donc un réseau conjugué.

Les surfaces de cette espèce sont appelées *surfaces de translation;* elles peuvent être engendrées de deux façons différentes par la translation d'une courbe de forme invariable Γ, dont un point décrit une autre courbe Γ'. Considérons en effet les quatre points M_0, M_1, M_2, M de la surface, correspondant respectivement aux valeurs (u_0, v_0), (u, v_0), (u_0, v), (u, v) des paramètres u, v. D'après les formules (30), ces quatre points sont les sommets d'un parallélogramme. Si, laissant v_0 fixe, on fait varier u, le point M_1 décrit une courbe Γ de la surface; de même, si u_0 reste fixe et qu'on fasse varier v, le point M_2 décrit une autre courbe Γ' de la surface. On peut donc considérer cette surface comme engendrée par la courbe Γ animée d'un mouvement de translation dans lequel le point M_2 décrit Γ', ou par la courbe Γ' animée d'un mouvement de translation dans lequel le point M_1 décrit Γ. Il est évident, d'après ce mode de génération, que ces deux familles de courbes sont conjuguées; par exemple, les tangentes aux diverses positions de Γ', en tous les points de Γ, forment un cylindre circonscrit à la surface tout le long de Γ. Les tangentes à ces courbes sont donc conjuguées.

III. — LIGNES DE COURBURE.

246. Définition et propriétés. — Étant donnée une surface S, on appelle *lignes de courbure* les lignes telles que les normales à la surface aux différents points de l'une d'elles forment une surface développable. Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface dans un système d'axes rectangulaires, les équations de la normale sont

$$(31)\quad \begin{cases} X = -pZ + (x + pz), \\ Y = -qZ + (y + qz); \end{cases}$$

pour que cette droite engendre une surface développable, il faut et il suffit que les deux équations (n° 223)

$$(32)\quad \begin{cases} -Z\,dp + d(x + pz) = 0, \\ -Z\,dq + d(y + qz) = 0, \end{cases}$$

soient vérifiées pour une même valeur de Z, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{d(x+pz)}{dp} = \frac{d(y+qz)}{dq},$$

ou, plus simplement,

$$\frac{dx+p\,dz}{dp} = \frac{dy+q\,dz}{dq}.$$

En remplaçant dz, dp, dq par leurs valeurs, on peut encore écrire cette équation

$$(33)\qquad \frac{(1+p^2)dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy} = \frac{pq\,dx+(1+q^2)dy}{s\,dx+t\,dy}.$$

On tire de cette équation deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$; ces valeurs sont toujours réelles et distinctes, si la surface est réelle. En effet, si l'on remplace dx et dy par α et β respectivement, on a précisément l'équation formée plus haut qui détermine les traces des sections normales principales sur le plan tangent. Les tangentes aux lignes de courbure passant par un point coïncident donc avec les axes de l'indicatrice. La théorie des équations différentielles nous apprend que par tout point non singulier de la surface (autre qu'un ombilic) il passe une ligne de courbure, et une seulement, tangente à chacun des axes de l'indicatrice. Ces lignes sont toujours réelles si la surface est réelle; elles forment sur la surface un réseau qui est à la fois orthogonal et conjugué.

Exemple. — Soit à déterminer les lignes de courbure du paraboloïde $z = \frac{xy}{a}$. On a

$$p = \frac{y}{a},\qquad q = \frac{x}{a},\qquad r = t = 0,\qquad s = \frac{1}{a},$$

et l'équation différentielle (33) devient ici

$$(a^2+y^2)\,dx^2 = (a^2+x^2)\,dy^2.$$

On en tire

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2+a^2}} = 0;$$

si nous prenons, par exemple, le signe + devant les deux radicaux, l'in-

tégrale générale est représentée par l'équation

$$(x+\sqrt{x^2+a^2})(y+\sqrt{y^2+a^2})=C,$$

qui donne l'un des systèmes de lignes de courbure. Si l'on pose

$$\lambda = x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2}, \tag{34}$$

l'équation précédente peut encore s'écrire

$$\lambda+\sqrt{\lambda^2+a^4}=C,$$

d'après l'identité

$$(x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2})^2+a^4=\left[xy+\sqrt{(x^2+a^2)(y^2+a^2)}\right]^2,$$

et il s'ensuit que les projections de l'un des systèmes de lignes de courbure sont représentées par l'équation (34), où λ désigne une constante arbitraire. On verrait de même que les projections des lignes de courbure de l'autre système sont représentées par l'équation

$$x\sqrt{y^2+a^2}-y\sqrt{x^2+a^2}=\mu. \tag{35}$$

En tenant compte de l'équation du paraboloïde $xy=az$, les relations (34) et (35) peuvent encore s'écrire

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=C, \qquad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=C';$$

or

$$\sqrt{x^2+z^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{y^2+z^2}$$

représentent les distances du point (x, y, z) aux deux axes Oy et Ox respectivement. Les lignes de courbure du paraboloïde sont donc *des courbes telles que la somme ou la différence des distances de l'un quelconque de leurs points aux deux axes* Ox et Oy *est constante.*

247. Développée d'une surface. — Soit C une ligne de courbure de la surface S; lorsque le point M décrit la courbe C, la normale MN à la surface reste tangente à une courbe Γ. Appelons A le point de contact, et soient X, Y, Z ses coordonnées; la coordonnée Z est donnée par l'une quelconque des équations (32), qui se réduisent à une seule, puisque C est une ligne de courbure. Ces équations (32) peuvent s'écrire

$$Z-z=\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy};$$

on obtient encore une fraction équivalente à ces deux-là en multipliant les deux termes du premier rapport par dx, les deux

termes du second par dy, et les combinant par voie d'addition, ce qui donne

$$Z - z = \frac{dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2}{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}.$$

Mais dx, dy, dz sont proportionnels aux cosinus directeurs α, β, γ de la tangente, et l'on a encore

$$Z - z = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + (p\alpha + q\beta)^2}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2} = \frac{1}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}.$$

Si nous comparons cette formule à la formule (7), qui donne le rayon de courbure R, pris avec son signe, de la section normale tangente à la ligne de courbure, on voit que la relation précédente peut s'écrire

$$(36) \qquad Z - z = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = R\nu,$$

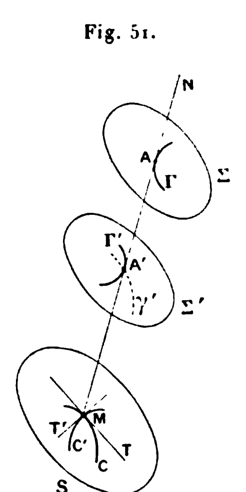
ν étant le cosinus de l'angle aigu que fait la direction positive de la normale avec Oz. Mais $z + R\nu$ est précisément égal à la valeur de Z pour le centre de courbure de cette section normale. Il s'ensuit que *le point de contact* A *de la normale* MN *avec son enveloppe* Γ *coïncide avec le centre de courbure de la section normale principale tangente à* C. La courbe Γ est donc le lieu même de ces centres de courbure. Si l'on considère toutes les lignes de courbure du même système que la ligne C, le lieu des courbes Γ correspondantes est une surface Σ à laquelle toutes les normales de S restent tangentes. Car la normale MN, par exemple, est tangente en A à la courbe Γ située sur Σ.

Considérons maintenant la seconde ligne de courbure C' passant par M et coupant orthogonalement la première C. La normale à la surface S le long de C' reste de même tangente à une courbe Γ' qui est le lieu des centres de courbure des sections normales tangentes à C'. Le lieu de cette courbe Γ' pour l'ensemble des lignes de courbure du même système que C' est une surface Σ' à laquelle sont tangentes toutes les normales de S. Les deux surfaces Σ, Σ' ne sont pas, en général, analytiquement distinctes, mais constituent deux nappes d'une seule surface représentée par une équation indécomposable.

La normale MN à la surface S est tangente à ces deux nappes Σ,

Σ', aux deux centres de courbure principaux A et A′ de la surface S au point M. Il est facile de trouver les plans tangents à ces deux nappes aux points A et A′ (*fig.* 51). Lorsque le point M décrit la courbe C, la normale MN engendre une surface développable D ayant Γ pour arête de rebroussement; d'autre part, le point de contact A′ de cette normale MN avec Σ' décrit une courbe γ' distincte de Γ', car la droite MN ne peut rester tangente

Fig. 51.



à la fois aux deux courbes Γ et Γ'. La développable D et la surface Σ' sont donc tangentes au point A′, et, par suite, le plan tangent en A′ à Σ' est tangent à la développable D le long de MN; c'est donc le plan NMT, passant par la tangente à C. On verrait de même que le plan tangent à la surface Σ au point A est le plan NMT′ passant par la tangente à la seconde ligne de courbure C′.

Les deux plans NMT, NMT′ sont rectangulaires, ce qui conduit à une propriété importante de la développée. Imaginons que d'un point quelconque O de l'espace on abaisse une normale OM sur la surface S, et soient A et A′ les centres de courbure principaux de S sur cette normale. Les plans tangents aux points A et A′ aux deux nappes Σ, Σ' de la développée sont orthogonaux; comme ces plans tangents passent au point O, on voit que *les deux nappes de la développée d'une surface* S, *vues d'un point quel-*

conque O de l'espace, paraissent se couper à angle droit. La réciproque de cette propriété sera démontrée plus loin.

248. Formules d'Olinde Rodrigues. — Désignons toujours par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à la surface, par R un rayon de courbure principal; les coordonnées du centre de courbure correspondant sont

$$(37) \qquad X = x + R\lambda, \qquad Y = y + R\mu, \qquad Z = z + R\nu.$$

Lorsque le point (x, y, z) décrit la ligne de courbure tangente à la section normale dont le rayon de courbure est R, ce centre de courbure décrit, nous venons de le voir, une courbe Γ tangente à la normale MN de S. On doit donc avoir

$$\frac{dX}{\lambda} = \frac{dY}{\mu} = \frac{dZ}{\nu},$$

ou, en remplaçant X, Y, Z par les valeurs (37),

$$\frac{dx + R\,d\lambda}{\lambda} = \frac{dy + R\,d\mu}{\mu} = \frac{dz + R\,d\nu}{\nu};$$

la valeur commune de ces rapports est zéro, car si on les combine par addition après avoir multiplié les deux termes du premier par λ, ceux du deuxième par μ, ceux du troisième par ν, on a un rapport équivalent dont le dénominateur est l'unité, tandis que le numérateur

$$\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz + R(\lambda\,d\lambda + \mu\,d\mu + \nu\,d\nu)$$

est identiquement nul. Nous obtenons ainsi les formules d'Olinde Rodrigues

$$(38) \qquad dx + R\,d\lambda = 0, \qquad dy + R\,d\mu = 0, \qquad dz + R\,d\nu = 0,$$

qui jouent un rôle important dans la théorie des surfaces. Bien entendu, ces formules ne s'appliquent qu'à un déplacement du point (x, y, z) sur une ligne de courbure.

249. Lignes de courbure en coordonnées curvilignes. — Lorsque les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point d'une surface sont exprimées au moyen de deux paramètres variables u, v, les

équations de la normale sont

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C},$$

A, B, C étant déterminés par les relations (21). Pour que cette droite engendre une surface développable, il faut et il suffit que l'on ait (nº 223)

$$(39) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix} = 0;$$

en remplaçant x, y, z, A, B, C par leurs expressions au moyen des variables u, v, on a l'équation différentielle des lignes de courbure.

Cherchons, par exemple, les lignes de courbure de l'hélicoïde

$$z = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

On peut poser ici

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta, \qquad z = a\theta;$$

les coefficients A, B, C doivent satisfaire aux deux relations

$$A \cos\theta + B \sin\theta = 0,$$

$$- A\rho \sin\theta + B\rho \cos\theta + Ca = 0.$$

Nous prendrons $C = \rho$ et, par suite, $A = a \sin\theta$, $B = -a\cos\theta$.

L'équation différentielle (39) devient ici, en développant et réduisant les termes semblables,

$$d\rho^2 - (\rho^2 + a^2)\, d\theta^2 = 0.$$

On en tire

$$d\theta = \pm \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}};$$

si nous prenons, par exemple, le signe $+$, il vient en intégrant,

$$\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2} = a e^{\theta - \theta_0}$$

et

$$\rho = \frac{a}{2}\left[e^{\theta - \theta_0} - e^{-(\theta - \theta_0)}\right].$$

Les projections de ces lignes de courbure sur le plan des xy sont des spirales toutes égales qu'il est facile de construire.

La même méthode permet aussi de former l'équation du second degré qui admet pour racines les rayons de courbure principaux. Les lettres A, B, C, λ, μ, ν ayant la même signification que plus haut, on a, au signe près,

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

nous adopterons, pour direction positive de la normale, celle qui est définie par les formules précédentes. Si R est un rayon de courbure principal, pris avec son signe, les coordonnées du centre de courbure correspondant sont

$$X = x + \rho A, \qquad Y = y + \rho B, \qquad Z = z + \rho C,$$

où l'on a posé

$$R = \rho\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Si le point (x, y, z) décrit la ligne de courbure tangente à la section normale principale dont le rayon de courbure est R, nous savons que le point (X, Y, Z) décrit une courbe Γ qui est tangente à la normale à la surface. On doit donc avoir

$$\frac{dx + \rho\, dA + A\, d\rho}{A} = \frac{dy + \rho\, dB + B\, d\rho}{B} = \frac{dy + \rho\, dC + C\, d\rho}{C}$$

ou, en appelant $d\rho + K$ la valeur commune de ces rapports,

$$(40) \qquad dx + \rho\, dA - AK = 0, \qquad dy + \rho\, dB - BK = 0, \qquad dz + \rho\, dC - CK = 0.$$

En éliminant ρ et K entre ces trois relations, on retrouve bien l'équation différentielle (39) des lignes de courbure; mais, si l'on remplace dx, dy, dz, dA, dB, dC par

$$\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial C}{\partial u}du + \frac{\partial C}{\partial v}dv$$

respectivement, puis qu'on élimine du, dv et K, on parvient à l'équation suivante qui détermine ρ,

$$(41) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \rho\frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} + \rho\frac{\partial A}{\partial v} & A \\ \frac{\partial y}{\partial u} + \rho\frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} + \rho\frac{\partial B}{\partial v} & B \\ \frac{\partial z}{\partial u} + \rho\frac{\partial C}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} + \rho\frac{\partial C}{\partial v} & C \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffira d'y remplacer ρ par $\frac{R}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ pour avoir l'équation du second degré qui donne les rayons de courbure principaux.

Les équations (39) et (40) permettent de répondre à un certain nombre de questions dont on s'est déjà occupé; ainsi, pour qu'un point de la surface soit un point parabolique, il faut et il suffit que le coefficient de ρ^2 dans l'équation (41) soit nul. Pour qu'un point soit un ombilic, il faut que l'équation (39) soit vérifiée identiquement, quels que soient du et dv.

Cherchons encore, comme application, les rayons de courbure principaux de l'hélicoïde droit à plan directeur. On a, dans ce cas, en modifiant un peu les notations employées plus haut,

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = av,$$
$$A = a\sin v, \qquad B = -a\cos v, \qquad C = u,$$

et l'équation (41) se réduit à

$$a^2\rho^2 = a^2 + u^2,$$

d'où l'on tire $R = \pm\frac{a^2+u^2}{a}$. *Les rayons de courbure principaux de l'hélicoïde sont donc égaux et de signes contraires.*

250. Théorème de Joachimsthal. — On peut quelquefois trouver par des considérations géométriques les lignes de courbure de certaines surfaces. Ainsi, il est à peu près évident que les lignes de courbure d'une surface de révolution sont les méridiens et les parallèles de cette surface, car ces courbes sont tangentes en chacun de leurs points à l'un des axes de l'indicatrice. Comme vérification, nous remarquerons que les normales le long d'un méridien forment un plan, et les normales le long d'un parallèle un cône de révolution, c'est-à-dire des surfaces développables.

Sur une surface développable, une première famille de lignes de courbure est formée des génératrices. La seconde famille se compose des trajectoires orthogonales des génératrices, c'est-à-dire des développantes de l'arête de rebroussement (n° 231); elles s'obtiennent par une quadrature. Si l'on connaît l'une d'elles, on peut en déduire toutes les autres sans quadrature. Tous ces résultats sont faciles à vérifier par le calcul.

La théorie des développées d'une courbe gauche a conduit

Joachimsthal à un théorème important, souvent utilisé dans cette théorie. Soient S, S′ deux surfaces se coupant suivant une courbe C, ligne de courbure pour chacune d'elles; la normale MN à la surface S le long de C engendre une surface développable, et la normale MN′ à la surface S′ le long de C engendre une autre surface développable. Or ces deux droites sont normales l'une et l'autre à la courbe C. Par suite, *si deux surfaces ont une ligne de courbure commune, elles se coupent sous un angle constant tout le long de cette ligne* (n° 231).

Réciproquement, *si deux surfaces se coupent sous un angle constant, et si la courbe d'intersection est une ligne de courbure pour l'une d'elles, elle est aussi une ligne de courbure pour la seconde.* On sait en effet que, si une famille de normales à une courbe gauche C engendre une surface développable, il en est de même des normales obtenues en faisant tourner chacune d'elles d'un angle constant dans le plan normal à C.

Toute courbe plane ou sphérique est une ligne de courbure du plan ou de la sphère. On déduit donc du théorème de Joachimsthal le corollaire suivant : *Pour qu'une courbe plane ou sphérique située sur une surface soit une ligne de courbure de cette surface, il faut et il suffit que la surface coupe le plan ou la sphère sous un angle constant.*

251. Théorème de Dupin. — Nous avons déjà parlé à diverses reprises des systèmes triples orthogonaux (n°s 43, 146). L'origine de cette théorie remonte à un théorème célèbre, dû à Dupin, que nous allons établir :

Étant données trois familles de surfaces formant un système triple orthogonal, l'intersection de deux surfaces de familles différentes est une ligne de courbure pour chacune d'elles.

Nous nous appuierons pour la démonstration sur la remarque suivante. Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface tangente à l'origine au plan des xy; on a, pour les valeurs $x = y = z = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, tandis que la dérivée $\frac{\partial F}{\partial z}$ n'est pas nulle si, comme nous le supposons, l'origine n'est pas un point singulier.

Pour que les axes Ox et Oy coïncident avec les axes de l'indicatrice, il faut et il suffit que l'on ait à l'origine $s = 0$. Mais la dérivée seconde $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ est fournie par la relation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial z} q + \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z} p + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} pq + \frac{\partial F}{\partial z} s = 0;$$

puisque p et q sont nuls à l'origine, pour que s soit nul aussi, il faut et il suffit que l'on ait

$$(42) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Cela posé, soient

$$F_1(x, y, z) = \rho_1, \qquad F_2(x, y, z) = \rho_2, \qquad F_3(x, y, z) = \rho_3,$$

les équations des trois familles du système. Les fonctions F_1, F_2, F_3 vérifient la relation

$$(43) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0,$$

et deux autres relations de même forme qu'on obtiendrait en permutant circulairement les indices 1, 2, 3.

Par un point quelconque M de l'espace il passe une surface de chacune des familles du système triple, et les tangentes aux courbes d'intersection de ces surfaces prises deux à deux forment un trièdre trirectangle. Pour établir le théorème de Dupin, il suffit de montrer que l'une quelconque de ces droites est un des axes de l'indicatrice pour l'une ou l'autre des surfaces du système auxquelles elle est tangente.

Imaginons pour cela que l'on ait pris le point M pour origine et les arêtes du trièdre trirectangle précédent pour axes de coordonnées, de façon que les trois surfaces du système qui passent à l'origine soient tangentes respectivement aux trois plans de coordonnées. On aura, pour $x = y = z = 0$,

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0 \gtrless 0,$$
$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0 \gtrless 0, \qquad \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_0 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)_0 \gtrless 0, \qquad \left(\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)_0 = 0.$$

Pour que les axes Ox et Oy, par exemple, soient les axes de l'indicatrice de la surface $F_1(x, y, z) = 0$, il suffit que l'on ait, pour l'origine, $\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\, \partial y}\right)_0 = 0$. Or si l'on différentie la relation (43) par rapport à y, en n'écrivant pas les termes qui s'annulent à l'origine, il vient

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\, \partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\, \partial z}\right)_0 = 0,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(44) \qquad \frac{\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\, \partial y}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0} + \frac{\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\, \partial z}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0} = 0.$$

Des relations analogues à la relation (43) on tirerait de la même façon deux autres conditions qui se déduisent de la condition (44) en permutant circulairement x, y, z et les indices 1, 2, 3,

$$(45) \quad \frac{\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\, \partial z}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0} + \frac{\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial z\, \partial x}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)_0} = 0, \qquad \frac{\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial z\, \partial x}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)_0} + \frac{\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\, \partial y}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0} = 0.$$

De ces conditions (44) et (45) on déduit immédiatement

$$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\, \partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\, \partial z}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial z\, \partial x}\right)_0 = 0,$$

d'où résulte le théorème énoncé.

Un exemple bien remarquable de système triple orthogonal est fourni par les surfaces homofocales du second degré (n° **147**), dont l'étude a sans doute conduit Dupin au théorème général. Il résulte de ce théorème que les lignes de courbure d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde (qui avaient déjà été obtenues par Monge) sont les courbes d'intersection de cette surface et des surfaces du second degré homofocales à celle-là.

Les paraboloïdes représentés par l'équation

$$\frac{y^2}{p-\lambda} + \frac{z^2}{q-\lambda} = 2x - \lambda,$$

où λ est un paramètre variable, forment aussi un système triple

orthogonal, ce qui nous donne les lignes de courbure du paraboloïde. Citons encore le système triple rencontré plus haut (n° 246)

$$\frac{xy}{z} = \alpha, \qquad \sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2} = \beta, \qquad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2} = \gamma.$$

La recherche des systèmes triples orthogonaux est un des problèmes les plus intéressants et les plus difficiles de la Géométrie infinitésimale. Il a fait l'objet d'un grand nombre de Mémoires dont on trouvera les résultats résumés dans un récent Ouvrage de M. Darboux (¹). Une surface quelconque S appartient à une infinité de systèmes triples orthogonaux; l'un de ces systèmes est formé par les surfaces parallèles à S et par les deux familles de surfaces développables engendrées par les normales à S le long des lignes de courbure de cette surface. Soient, en effet, O un point quelconque de la normale MN à la surface S au point M, MT et MT′ les tangentes aux deux lignes de courbure C, C′ passant en M. La surface parallèle à S qui passe au point O a son plan tangent parallèle au plan tangent en M à S; les surfaces développables engendrées par les normales le long de la courbe C ou de la courbe C′ ont pour plans tangents les plans NMT et NMT′ respectivement. Ces trois plans sont bien orthogonaux deux à deux.

De tout système triple orthogonal on peut déduire une infinité d'autres systèmes analogues, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, puisque cette transformation conserve les angles. Puisque toute surface, nous venons de le voir, fait partie d'un système triple orthogonal, on en conclut, ce qu'il est aisé de vérifier, que, dans toute transformation par rayons vecteurs réciproques, *les lignes de courbure de la surface transformée sont les transformées des lignes de courbure de la surface primitive.*

232. Application à quelques classes de surfaces. — On s'est proposé un grand nombre de problèmes sur la détermination des surfaces dont les lignes de courbure satisfont à des conditions géométriques données à l'avance. Nous indiquerons quelques-uns des résultats les plus simples.

Cherchons d'abord toutes les surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont des cercles. D'après le théorème de Joachimsthal, le plan du cercle doit couper la surface sous un angle constant; il s'ensuit

(¹) *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes;* 1898.



que les normales à la surface en tous les points du cercle C doivent rencontrer l'axe du cercle (c'est-à-dire la perpendiculaire élevée par son centre sur le plan du cercle), en un même point O. La sphère décrite du point O comme centre et passant par C est tangente à la surface tout le long de C; la surface considérée est donc l'enveloppe d'une sphère dépendant d'*un* paramètre variable. Inversement, toute surface enveloppe de sphères répond à la question, car les caractéristiques, qui sont des cercles, forment évidemment une première famille de lignes de courbure.

Les surfaces de révolution sont évidemment un cas particulier. Un autre cas intéressant est celui des *surfaces canaux*, ou surfaces enveloppes d'une sphère de rayon constant R dont le centre décrit une courbe arbitraire Γ. Les caractéristiques sont les cercles de rayon R dont le centre décrit Γ et dont le plan reste normal à Γ. Les normales à la surface sont aussi normales à la courbe Γ; on obtiendra donc les lignes de courbure du second système en prenant les traces sur la surface des développables engendrées par les normales à Γ.

Si les deux systèmes de lignes de courbure d'une surface sont des cercles, cette surface peut, d'après cela, être considérée de deux manières différentes comme l'enveloppe d'une sphère dépendant d'un paramètre variable. Soient S_1, S_2, S_3 trois sphères quelconques du même système, C_1, C_2, C_3 les caractéristiques correspondantes, et M_1, M_2, M_3 les points de rencontre de C_1, C_2, C_3 avec une ligne de courbure C′ du second système. La sphère S′ tangente à la surface en tous les points du cercle C′ est aussi tangente aux trois sphères S_1, S_2, S_3 aux points M_1, M_2, M_3; de sorte que *la surface cherchée est l'enveloppe d'une sphère variable qui reste tangente à trois sphères fixes*. Cette surface bien connue est la *cyclide de Dupin*. M. Mannheim a démontré d'une façon élégante qu'elle était la transformée d'un tore par rayons vecteurs réciproques. Soit γ le cercle orthogonal aux trois sphères S_1, S_2, S_3; si l'on effectue une transformation par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle un point de γ, ce cercle se change en une ligne droite OO′, et les sphères S_1, S_2, S_3 se changent respectivement en trois sphères Σ_1, Σ_2, Σ_3 orthogonales à la ligne droite OO′, ayant par conséquent leurs centres sur cette droite. Soient C'_1, C'_2, C'_3 les sections de ces sphères par un plan passant par OO′, C′ un cercle tangent à C'_1, C'_2, C'_3, et Σ′ la sphère admettant C′ pour grand cercle. Il est clair que, dans un mouvement de rotation autour de OO′, la sphère Σ′ reste tangente aux trois sphères Σ_1, Σ_2, Σ_3, et l'enveloppe de Σ′ est le tore ayant pour méridienne le cercle C′.

Proposons-nous encore de déterminer les surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont des courbes planes situées dans des plans parallèles. Prenons pour plan des xy un plan parallèle aux plans des lignes de courbure, et soit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = F(\alpha, z)$$

l'équation tangentielle de la section plane faite dans la surface par un plan

parallèle au plan des xy; $F(\alpha, z)$ est une fonction des deux variables α et z qui dépend de la surface considérée. Les coordonnées x, y d'un point de la surface s'obtiendront en joignant à l'équation précédente la relation

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = \frac{\partial F}{\partial\alpha}.$$

Les formules qui donnent x, y, z sont donc les suivantes

$$(46)\qquad x = F\cos\alpha - \frac{\partial F}{\partial\alpha}\sin\alpha, \qquad y = F\sin\alpha + \frac{\partial F}{\partial\alpha}\cos\alpha, \qquad z = z;$$

toute surface peut être représentée par des équations de cette forme, en choisissant convenablement la fonction $F(\alpha, z)$. Il n'y aurait exception que pour les surfaces réglées admettant le plan $z = 0$ comme plan directeur.

Un calcul facile donne, pour les coefficients A, B, C de l'équation du plan tangent,

$$A = \cos\alpha, \qquad B = \sin\alpha, \qquad C = -\frac{\partial F}{\partial z},$$

de sorte que le cosinus de l'angle que fait la normale avec Oz a pour expression

$$\nu = \frac{-F'(z)}{\sqrt{1 + F'^2(z)}}.$$

Pour que les sections planes situées dans les plans parallèles au plan xOy soient lignes de courbure, il faut et il suffit, d'après le théorème de Joachimsthal, que ces plans coupent la surface sous un angle constant, c'est-à-dire que ν soit indépendant de α. Il faut et il suffit pour cela que $F'(z)$ ne dépende que de la variable z, et par suite que $F(z)$ soit de la forme

$$F(z) = \varphi(z) + \psi(\alpha),$$

les fonctions φ et ψ étant arbitraires. Les formules (46) deviennent alors

$$(47)\qquad \begin{cases} x = \psi(\alpha)\cos\alpha - \psi'(\alpha)\sin\alpha + \varphi(z)\cos\alpha, \\ y = \psi(\alpha)\sin\alpha + \psi'(\alpha)\cos\alpha + \varphi(z)\sin\alpha, \\ z = z; \end{cases}$$

on obtient ainsi les surfaces les plus générales répondant à la question.

On peut donner de ces surfaces la génération suivante. Les deux premières des équations (47) représentent, quand on y considère z comme constant et α comme variable, une famille de courbes qui sont les projections sur le plan $z = 0$ des sections de la surface par des plans parallèles au plan des xy. Or ces différentes courbes sont toutes parallèles à la courbe obtenue en faisant $\varphi(z) = 0$; d'où l'on déduit la construction suivante : *on prend, dans le plan $z = 0$, une courbe arbitraire et les différentes courbes parallèles à celle-là, puis on déplace chacune de*

ces courbes, suivant une loi arbitraire, parallèlement à Oz; *la surface engendrée par les différentes positions de la courbe variable est la surface la plus générale répondant à la question.*

Ce mode de génération peut être, comme on le voit aisément, remplacé par le suivant : *Les surfaces demandées sont engendrées par une courbe plane de forme arbitraire dont le plan roule sans glisser sur un cylindre à base quelconque.* Ce sont donc des *surfaces moulures.*

On le vérifie facilement sur les formules (47) en étudiant les courbes planes $\alpha = \text{const.}$ Les deux familles de lignes de courbure sont précisément les courbes planes $z = C$ et $\alpha = C'$.

IV. — NOTIONS SUR LES SYSTÈMES DE DROITES.

La position d'une droite dans l'espace dépend de quatre paramètres variables. On peut donc considérer des assemblages de droites dépendant d'un, deux ou trois paramètres variables, suivant le nombre des relations que l'on établit entre les quatre paramètres dont dépend la position d'une droite. Une droite mobile, dépendant d'un paramètre variable, engendre une surface réglée. L'ensemble des droites qui dépendent de *deux* paramètres variables distincts est une *congruence de droites*. Enfin on appelle *complexe de droites* tout système de droites dépendant de *trois* paramètres.

253. Surfaces réglées. — Soient, dans un système d'axes rectangulaires,

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{48}$$

les équations de la génératrice mobile G, a, b, p, q étant des fonctions d'un paramètre variable u. Nous allons étudier comment varie la position du plan tangent à la surface S engendrée par cette droite, lorsque le point de contact se déplace sur la génératrice G. Les équations (48), jointes à l'équation $z = z$, donnent les expressions des coordonnées d'un point quelconque de la surface en fonction des paramètres indépendants z et u; l'équation du plan tangent est alors (n° 39)

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ a & b & 1 \\ a'z + p' & b'z + q' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

a', b', p', q' étant les dérivées de a, b, p, q par rapport à u. En remplaçant x par $az+p$, y par $bz+q$, et développant le déterminant, cette équation s'écrit

$$(49)\qquad (b'z+q')(X-aZ-p)-(a'z+p')(Y-bZ-q)=0.$$

Nous voyons d'abord que ce plan passe constamment par la génératrice G, ce qui était évident *a priori*, et en outre que ce plan tourne autour de la génératrice lorsque le point de contact décrit cette droite, à moins que la fraction $\frac{a'z+p'}{b'z+q'}$ ne soit indépendante de z, c'est-à-dire à moins que l'on n'ait $a'q'-b'p'=0$, cas que nous écarterons tout d'abord. La fraction précédente étant du premier degré en z, tout plan passant par la génératrice est tangent à la surface en un point de cette génératrice, et en un seul. Lorsque le point de contact s'éloigne indéfiniment sur la génératrice, le plan tangent tend vers un plan limite P′, qu'on appelle le *plan tangent* au point à l'infini sur la génératrice et qui est représenté par l'équation

$$(50)\qquad b'(X-aZ-p)-a'(Y-bZ-q)=0.$$

Soit ω l'angle de ce plan P′ avec le plan tangent au point (x, y, z) de la génératrice. Les paramètres directeurs des normales à ces deux plans sont respectivement b', $-a'$, $a'b-ab'$ et $b'z+q'$, $-(a'z+p')$, $b(a'z+p')-a(b'z+q')$; on a donc

$$\cos\omega=\frac{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2]^{-\frac{1}{2}}\{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2]z+b'q'+a'p'+(ab'-ba')(aq'-bp')\}}{\sqrt{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2]z^2+2z[b'q'+a'p'+(ab'-ba')(aq'-bp')]+q'^2+p'^2+(aq'-bp')^2}},$$

et l'on en tire, par un calcul facile,

$$(51)\qquad \operatorname{tang}\omega=\frac{(a'q'-b'p')\sqrt{1+a^2+b^2}}{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2]z+b'q'+a'p'+(ab'-a'b)(aq'-bp')}.$$

Le plan tangent est perpendiculaire au plan P′ en un point O_1 de la génératrice dont la coordonnée z_1 est donnée par la formule

$$(52)\qquad z_1=-\frac{a'p'+b'q'+(ab'-ba')(aq'-bp')}{a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2};$$

ce point O_1 est appelé *point central* de la génératrice, et le plan

tangent en ce point est le plan central P. L'angle θ que fait le plan tangent en un autre point de la génératrice avec le plan central est égal à $\frac{\pi}{2} - \omega$, et la formule (51) peut être remplacée par la suivante

$$\tang\theta = \frac{[a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2](z - z_1)}{(a'q' - b'p')\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Soit ρ la distance du point central au point de contact M du plan tangent, précédée du signe + ou du signe —, suivant que la direction O_1M fait un angle aigu avec Oz ou un angle obtus. On a $\rho = (z - z_1)\sqrt{1 + a^2 + b^2}$, et l'on peut encore écrire la formule précédente

$$(53) \qquad \tang\theta = k\rho,$$

en posant

$$(54) \qquad k = \frac{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}{(a'q' - b'p')(1 + a^2 + b^2)};$$

le facteur k est le *paramètre de distribution*. La formule (53) est l'expression, sous une forme très simple, de la loi suivant laquelle le plan tangent tourne autour de la génératrice. Cette formule ne renferme que des éléments ayant une signification géométrique; nous verrons en effet, un peu plus loin, comment on peut définir directement le paramètre k. Cette formule (53) présente cependant quelque ambiguïté, parce qu'on ne voit pas tout de suite dans quel sens on doit compter l'angle θ. Autrement dit, on ne sait pas *a priori* comment tourne le plan tangent autour de la génératrice, lorsque le point de contact se déplace. Ce sens de rotation est donné précisément par le signe de k.

Pour bien saisir ce point, imaginons un observateur couché sur la génératrice G : lorsque le point de contact se déplace en marchant des pieds vers la tête, cet observateur voit le plan tangent tourner de sa gauche vers sa droite ou de sa droite vers sa gauche. Il suffit d'un peu de réflexion pour reconnaître que le sens de rotation ainsi défini reste le même lorsque l'observateur se retourne sur la génératrice de façon à avoir la tête où il avait les pieds et inversement. Deux paraboloïdes hyperboliques ayant une génératrice commune, et symétriques par rapport à un plan passant par

cette génératrice, donnent une idée nette de ces deux dispositions. Cela posé, imaginons qu'on déplace d'une façon continue le trièdre des axes de coordonnées de façon à amener l'origine au point central O_1, l'axe des z venant coïncider avec la génératrice et le plan des xz avec le plan central. Il est clair que l'expression (54) du paramètre de distribution conserve une valeur constante, et la formule (53) devient, dans le nouveau système d'axes,

$$\tag{53 bis} \tang\theta = kz,$$

θ désignant l'angle du plan tangent avec le plan $y = 0$ compté dans un sens convenable.

Pour la valeur u_0 du paramètre qui correspond à l'axe Oz, on doit avoir $a = b = p = q = 0$, et l'équation du plan tangent (49) se réduit ici à

$$(b'z + q')X - (a'z + p')Y = 0,$$

Pour que l'origine soit le point central et le plan des xz le plan central, il faut que l'on ait $a' = 0$, $q' = 0$, et l'équation du plan tangent devient $Y = \frac{b'z}{p'}X$, tandis que la formule (54) donne $k = -\frac{b'}{p'}$. On voit donc que, dans la formule (53 *bis*), on doit compter l'angle θ de Oy vers Ox. Si le trièdre des axes a la disposition adoptée plus haut (n° 228), un observateur couché sur Oz verra le plan tangent tourner de gauche à droite si k est positif, et de droite à gauche si k est négatif.

On appelle *ligne de striction* d'une surface réglée le lieu des points centraux des différentes génératrices. Les coordonnées d'un point de cette ligne en fonction du paramètre u sont données par les équations (48) et (52).

Remarque. — Si l'on a, pour la génératrice considérée, $a'q' = b'p'$, le plan tangent reste le même tout le long de la génératrice. Lorsque cette relation est vérifiée pour toutes les valeurs de u, la surface réglée est développable (n° 223), et il est facile de retrouver les résultats déjà établis. En effet, si a' et b' ne sont pas nuls en même temps, le plan tangent est le même en tous les points de G, et devient indéterminé pour le point $z = -\frac{p'}{a'} = -\frac{q'}{b'}$, c'est-à-dire pour le point de contact de la génératrice avec son

enveloppe. En tenant compte de la relation $a'q' - b'p' = 0$, on vérifie aisément que la valeur de z_1 donnée par la formule (52) est identique à la précédente. La ligne de striction se confond avec l'arête de rebroussement; quant au paramètre de distribution, il est infini.

Si $a' = b' = 0$, la surface est un cylindre; le point central est indéterminé.

254. Le point central et le paramètre de distribution peuvent être définis d'une autre façon. Considérons, en même temps que la génératrice G, une génératrice voisine G_1, correspondant à la valeur $u + h$ du paramètre, et représentée par les équations

$$(55) \qquad x = (a + \Delta a)z + p + \Delta p, \qquad y = (b + \Delta b)z + q + \Delta q.$$

Soient δ la plus courte distance des deux droites G et G_1, α l'angle de ces droites et X, Y, Z les coordonnées du point de rencontre de G avec la perpendiculaire commune. Des formules bien connues de Géométrie analytique nous donnent

$$Z = -\frac{\Delta a\,\Delta q + \Delta b\,\Delta p + (a\Delta b - b\Delta a)[(a + \Delta a)\Delta q - (b + \Delta b)\Delta p]}{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2},$$

$$\delta = \frac{\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p}{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\,\sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1}}.$$

Lorsque h tend vers zéro, Z a pour limite l'expression trouvée plus haut pour z_1, tandis que $\frac{\sin\alpha}{\delta}$ a pour limite k. Le point central est donc la position limite du pied de la perpendiculaire commune à G et à une génératrice infiniment voisine, tandis que le paramètre de distribution est la limite du rapport $\frac{\sin\alpha}{\delta}$.

Remplaçons dans l'expression de δ, Δa, Δb, Δp, Δq par leurs développements suivant les puissances de h,

$$\Delta a = ha' + \frac{h^2}{1.2}a'' + \ldots,$$

et de même pour Δb, Δp, Δq; on a, pour le développement du

numérateur

$$\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p = h^2(a'q' - b'p') + \frac{h^3}{2}(a''q' + a'q'' - b''p' - b'p'') + \ldots,$$

tandis que le dénominateur est toujours du premier ordre en h. On voit que δ est en général un infiniment petit du premier ordre, sauf dans le cas des surfaces développables, où l'on a $a'q' - b'p' = 0$. Mais le coefficient de $\frac{h^3}{2}$ est la dérivée de $a'q' - b'p'$; ce coefficient est donc nul aussi et, par conséquent, dans une surface développable, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est du troisième ordre (n° 230). Cette remarque est due à M. Bouquet, qui a montré en outre que cette distance ne peut être constamment du quatrième ordre que si elle est nulle, c'est-à-dire dans le cas des tangentes à une courbe plane ou des surfaces coniques. Il suffit, pour le voir, de pousser le développement de $\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p$ jusqu'aux termes du quatrième ordre.

255. Congruences. Surface focale. — Tout ensemble de droites

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{56}$$

a, b, p, q dépendant de deux paramètres variables α, β, est appelé *congruence de droites*. Par un point de l'espace, il passe en général un certain nombre de droites de la congruence, car on a deux équations pour déterminer α et β, si l'on suppose x, y, z connues. Si l'on établit une relation entre les paramètres α et β, la droite G représentée par les équations (56) engendre une surface réglée qui n'est pas en général une surface développable. Pour que cette surface soit développable, il faudra que l'on ait

$$da\,dq - db\,dp = 0,$$

ou en remplaçant da par $\frac{\partial a}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta}d\beta$, ...

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta}d\beta\right)\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial q}{\partial \beta}d\beta\right) \\ &\qquad - \left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta}d\beta\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial p}{\partial \beta}d\beta\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{57}$$

De cette équation du second degré en $\frac{d\beta}{d\alpha}$, on tire deux valeurs,

en général distinctes, pour $\frac{d\beta}{d\alpha}$,

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \psi_1(\alpha, \beta), \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = \psi_2(\alpha, \beta). \tag{58}$$

Sous des conditions très générales qui seront précisées plus tard et que nous supposerons remplies, chacune de ces équations est vérifiée par une infinité de fonctions de α; chacune d'elles admet une intégrale, et une seule, prenant la valeur β_0 pour $\alpha = \alpha_0$. Toute droite G de la congruence appartient donc à deux surfaces développables, dont toutes les génératrices sont également des droites de la congruence. Soient Γ et Γ' les arêtes de rebroussement de ces deux développables, A et A′ les points de contact de G avec Γ et Γ' respectivement. Ces deux points A et A′ s'appellent les *points focaux* de la génératrice. On les obtient comme il suit, sans qu'il soit nécessaire d'avoir intégré l'équation (57) qui donne les développables de la congruence. La coordonnée z de l'un de ces points doit satisfaire à la fois aux deux relations

$$z\,da + dp = 0, \qquad z\,db + dq = 0,$$

ou, en remplaçant da, db, dp, dq par leurs développements,

$$z\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta}\,d\beta\right) + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial p}{\partial \beta}\,d\beta = 0,$$

$$z\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta}\,d\beta\right) + \frac{\partial q}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial q}{\partial \beta}\,d\beta = 0.$$

En éliminant z entre ces deux relations, on retrouve l'équation (57), mais, si l'on élimine le rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$, on obtient une équation du second degré qui détermine les deux points focaux

$$\left(z\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)\left(z\frac{\partial b}{\partial \beta} + \frac{\partial q}{\partial \beta}\right) - \left(z\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \beta}\right)\left(z\frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha}\right) = 0. \tag{59}$$

Le lieu des points focaux A, A′ se compose de deux nappes de surfaces Σ, Σ' dont on obtiendrait l'équation en éliminant α et β entre (56) et (59). Ces deux nappes ne sont pas d'ailleurs analytiquement distinctes en général, mais constituent deux nappes d'une même surface. Ce sont les deux nappes de la *surface focale*. Cette surface focale est aussi le lieu des arêtes de rebroussement des développables de la congruence. Il est clair en effet

que, d'après la définition même de la courbe Γ, la tangente à cette courbe en un point quelconque *a* appartient à la congruence, et que le point *a* est un de ses points focaux. Toute droite de la congruence est tangente aux deux nappes Σ, Σ', puisque cette droite est tangente à deux courbes situées respectivement sur ces deux nappes.

Il est facile, en reprenant un raisonnement déjà employé (n° 247) de trouver les plans tangents en A et A' aux surfaces Σ et Σ' (*fig.* 51). Imaginons, par exemple, que la droite G se déplace en restant tangente à Γ; cette droite reste aussi tangente à la surface Σ', et son point de contact A' avec cette nappe décrit une courbe γ' qui est nécessairement distincte de la courbe Γ'. La surface développable engendrée par G est donc tangente en A' à Σ', puisque les deux plans tangents ont en commun la droite G et la tangente à γ'. Il s'ensuit que le plan tangent en A' à Σ' est précisément le plan osculateur à la courbe Γ au point A. On verrait de même que le plan tangent en A à Σ est le plan osculateur en A' à la courbe Γ'. Ces deux plans sont appelés *plans focaux*.

Il peut arriver que l'une des nappes de la surface focale se réduise à une courbe C. Les droites de la congruence restent alors tangentes à la nappe Σ et rencontrent la courbe C; l'une des familles de développables se compose des cônes circonscrits à la surface Σ, ayant pour sommets les différents points de C. Si les deux nappes de la surface focale se réduisent à deux courbes C, C', les deux familles de développables sont formées par les cônes ayant leurs sommets sur l'une des courbes et passant par l'autre courbe. Lorsque les deux courbes C, C' sont des lignes droites, on a une *congruence linéaire*.

256. **Congruences de normales.** — Les normales à une surface forment évidemment une congruence, mais la réciproque n'est pas vraie : il n'existe pas toujours de surface normale à toutes les droites d'une congruence. En effet, si l'on considère la congruence formée par les normales à une surface S, les deux nappes de la surface focale sont précisément les deux nappes Σ, Σ' de la développée de S (n° 247), et nous avons vu qu'aux deux points de contact A, A' de la normale avec les deux nappes les plans tangents étaient rectangulaires. Cette propriété caractérise les con-

gruences de normales. Cherchons en effet la condition pour que la droite (56) reste normale à une surface; il faut et il suffit pour cela qu'il existe une fonction $f(\alpha, \beta)$ telle que la surface S représentée par les équations

$$(60) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q, \qquad z = f(\alpha, \beta)$$

ait précisément pour normale la droite G elle-même. Il faut pour cela que l'on ait

$$a \frac{\partial x}{\partial \alpha} + b \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$a \frac{\partial x}{\partial \beta} + b \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0;$$

ces conditions deviennent, en remplaçant x par $az + p$, y par $bz + q$, et en divisant par $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$,

$$(61) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(z\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\right) + \frac{a \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} + b \dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial \beta}\left(z\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\right) + \frac{a \dfrac{\partial p}{\partial \beta} + b \dfrac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$(62) \qquad \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{a \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} + b \dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{a \dfrac{\partial p}{\partial \beta} + b \dfrac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}\right);$$

si cette condition est vérifiée, les équations (61) donneront z par une quadrature. Les surfaces obtenues dépendent d'une constante introduite par l'intégration, et forment une famille de surfaces parallèles.

Pour avoir la signification géométrique de la condition (62), remarquons que, d'après sa nature même, cette relation est indépendante du choix des axes de coordonnées, et des variables indépendantes. Imaginons que l'on ait pris pour axe des z une droite de la congruence, et pour paramètres α et β les coordonnées du point de rencontre d'une droite quelconque de la congruence avec le plan $z = 0$. On a $p = \alpha$, $q = \beta$, tandis que a et b sont des fonctions des variables α et β, s'annulant pour $\alpha = \beta = 0$. La condition d'intégrabilité se réduit à $\dfrac{\partial a}{\partial \beta} = \dfrac{\partial b}{\partial \alpha}$ pour les valeurs $\alpha = 0$,

$\beta = 0$ des paramètres. D'autre part, l'équation (57) devient ici

$$\frac{\partial a}{\partial \beta} d\beta^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial b}{\partial \beta}\right) d\alpha\, d\beta - \frac{\partial b}{\partial \alpha} d\alpha^2 = 0;$$

cette équation, si l'on y remplace α et β par x et y respectivement, détermine les courbes du plan $z = 0$ qui sont les traces sur ce plan des développables de la congruence, et la condition $\frac{\partial a}{\partial \beta} = \frac{\partial b}{\partial \alpha}$ exprime que les deux courbes de cette espèce qui passent par l'origine s'y coupent à angle droit. Les plans tangents aux deux développables de la congruence qui renferment la droite $x = 0, y = 0$, sont donc rectangulaires, et nous obtenons comme conclusion l'importante proposition suivante : *Pour qu'une congruence de droites soit formée des normales à une surface, il faut et il suffit que les plans focaux passant par chaque droite de la congruence soient rectangulaires.*

Remarque. — Lorsque l'on prend pour paramètres variables α, β, les cosinus des angles que fait la droite avec les axes Ox et Oy, on a

$$a = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}, \quad b = \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}, \quad \sqrt{1+a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},$$

les équations (61) deviennent

$$(63) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right) + \alpha \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} + \beta \dfrac{\partial q}{\partial \alpha} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right) + \alpha \dfrac{\partial p}{\partial \beta} + \beta \dfrac{\partial q}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

et la condition d'intégrabilité (62) se réduit à $\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial p}{\partial \beta}$. Elle exprime que p et q sont les dérivées partielles d'une même fonction $F(\alpha, \beta)$, qui s'obtient par une quadrature, $p = \frac{\partial F}{\partial \alpha}$, $q = \frac{\partial F}{\partial \beta}$. On a ensuite z par l'intégration de l'équation aux différentielles totales

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right) = -\left(\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right) d\alpha - \left(\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\right) d\beta,$$

d'où l'on tire

$$z = \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\left(C + F - \alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \beta \frac{\partial F}{\partial \beta}\right),$$

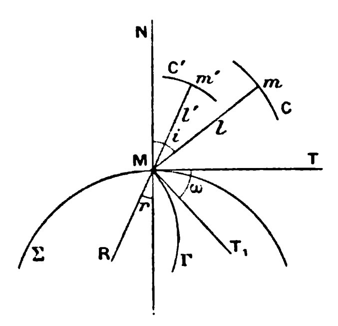
C étant une constante arbitraire.

257. Théorème de Malus. — Lorsque les rayons lumineux issus d'un point sont réfléchis ou réfractés par une surface, ils sont normaux à une famille de surfaces parallèles, après la réflexion ou la réfraction. Ce théorème, dû à Malus, a été étendu au cas d'un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions par Cauchy, Dupin, Gergonne et Quételet, et l'on peut énoncer la proposition générale suivante :

Si des rayons lumineux sont normaux à une surface, ils ne cessent pas de conserver cette propriété après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.

La réflexion pouvant être considérée comme une réfraction d'indice -1, il suffit évidemment de démontrer le théorème pour une réfraction unique. Soit S une surface normale aux rayons lumineux, mM un rayon incident qui rencontre en M la surface dirimante Σ, MR le rayon réfracté. D'après la loi de Descartes, le rayon incident Mm, le rayon réfracté MR et la normale MN sont dans un même plan, et l'on a entre les angles i et r (voir *fig.* 52) la relation $n \sin i = \sin r$. Pour fixer les idées, nous supposerons, comme dans le cas de la figure, $n < 1$. Soit l la distance Mm; sur

Fig. 52.



le prolongement du rayon réfracté portons une longueur $l' = Mm'$ égale à k fois la longueur l, k désignant un facteur constant qui sera déterminé tout à l'heure. Le point m' décrit une surface S′, et l'on peut choisir le facteur k de façon que le rayon réfracté Mm' soit normal à cette surface. En effet, soit C une courbe quelconque située sur S; lorsque le point m décrit C, le point M où le rayon incident perce Σ décrit une courbe Γ et le point correspondant m' décrit sur S′ une autre courbe C′. Soient s, σ, s' les arcs des trois courbes C, Γ, C′, ω l'angle de la tangente MT_1 à Γ avec la trace MT sur le plan tangent du plan normal qui passe par le rayon incident, φ et φ' les angles de MT_1 avec Mm et Mm'. Pour évaluer $\cos\varphi$, par exemple, imaginons que l'on projette sur MT_1 une longueur égale à l'unité portée sur Mm; on peut d'abord projeter cette longueur sur MT,

et projeter ensuite cette projection sur MT_1, ce qui donne la relation

$$\cos\varphi = \sin i \cos\omega$$

et l'on a de même $\cos\varphi' = \sin r \cos\omega$. Cela étant, appliquons la formule (10)' (n° 82), qui donne la différentielle d'un segment de droite aux deux segments Mm, Mm'; on a

$$dl = -d\sigma \cos\omega \sin i$$
$$dl' = -d\sigma \cos\omega \sin r - ds' \cos\theta,$$

en appelant θ l'angle de $m'M$ avec la tangente à la courbe C'. On déduit de là, en remplaçant dl' par $k\,dl$, la relation

$$\cos\omega\, d\sigma(k \sin i - \sin r) = ds' \cos\theta,$$

qui devient, en supposant $k = n$, $ds' \cos\theta = 0$. Le rayon Mm' est donc normal à la courbe C', et, comme C' est une courbe quelconque de la surface S', il s'ensuit que le rayon réfracté est précisément la normale à la surface S'. Cette surface S' s'appelle l'*anticaustique* ou la *caustique secondaire*. Il est clair qu'elle est l'enveloppe de la sphère décrite du point M comme centre avec un rayon égal à n fois la longueur Mm, et le résultat obtenu peut s'énoncer ainsi :

Si les rayons incidents sont normaux à une surface S, *considérons cette surface comme l'enveloppe de sphères ayant leurs centres sur la surface dirimante* Σ. *Pour obtenir l'anticaustique relative aux rayons réfractés, il faut prendre l'enveloppe de toutes les sphères que l'on obtient en réduisant le rayon des précédentes dans le rapport de l'unité à l'indice de réfraction.*

Cette enveloppe se compose de deux nappes, correspondant à des valeurs de l'indice de réfraction égales et de signes contraires. Il sera impossible en général de séparer analytiquement ces deux nappes.

258. Complexes. — Un complexe de droites est formé par l'ensemble des droites qui dépendent de trois paramètres variables. Soient

$$(64) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

les équations d'une droite; tout complexe de droites est défini par une certaine relation entre a, b, p, q

$$(65) \qquad F(a, b, p, q) = 0,$$

et inversement. Si F est un polynome entier en a, b, p, q, le complexe est *algébrique*. Les droites du complexe passant par un point donné (x_0, y_0, z_0) forment un cône ayant ce point pour sommet, dont on obtiendra l'équation en éliminant a, b, p, q entre les relations (64), (65)



et (66)

$$(66) \qquad x_0 = a z_0 + p, \qquad y_0 = b z_0 + q;$$

l'équation du cône du complexe est donc

$$(67) \qquad F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}, \frac{x_0 z - x z_0}{z - z_0}, \frac{y_0 z - y z_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

De même dans chaque plan il y a une infinité de droites appartenant au complexe; ces droites enveloppent une courbe appelée courbe du complexe. Si le complexe est algébrique, *l'ordre du cône du complexe est égal à la classe de la courbe du complexe.* Supposons en effet que l'on veuille avoir les droites du complexe passant par un point donné A et situées dans un plan P passant par ce point. On peut pour cela procéder de deux façons : on peut couper par le plan P le cône du complexe ayant son sommet en A, ou mener par le point A les tangentes à la courbe du complexe située dans le plan P. Comme on doit trouver le même nombre de droites, il en résulte l'exactitude du théorème énoncé.

Si le cône du complexe se réduit à un plan, le complexe est dit *linéaire* et l'équation (65) est de la forme

$$(68) \qquad Aa + Bb + Cp + Dq + E(aq - bp) + F = 0;$$

le lieu des droites du complexe qui passent par un point x_0, y_0, z_0 est le plan représenté par l'équation

$$(69) \quad \begin{cases} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(x_0 z - z_0 x) \\ \qquad + D(y_0 z - z_0 y) + E(y_0 x - x_0 y) + F(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

La courbe du complexe, devant être de classe *un,* se réduit à un point, c'est-à-dire que toutes les droites du complexe situées dans un plan passent par un point de ce plan, appelé *pôle* ou *foyer*. Un complexe linéaire établit donc une liaison entre les points et les plans dans l'espace, de telle façon qu'à un point correspond un plan passant par ce point, et à un plan correspond un point situé dans le plan. Il y a aussi une correspondance entre les droites de l'espace. Soit D une droite n'appartenant pas au complexe; soient F et F′ les foyers de deux plans passant par cette droite, et Δ la droite qui les joint. Tout plan passant par Δ a pour foyer le point φ où il rencontre la droite D, car les droites φF, $\varphi F'$ font évidemment partie du complexe. Il en résulte que toute droite rencontrant D et Δ fait partie du complexe, et enfin que le foyer d'un plan passant par D est le point de rencontre de ce plan avec la droite Δ. Les deux droites D et Δ sont dites *droites conjuguées;* chacune d'elles est le lieu des foyers des plans passant par l'autre.

Si la droite D s'en va à l'infini, les plans passant par D deviennent parallèles, et l'on voit que le lieu des foyers des plans parallèles à un plan fixe est une droite. Il existe toujours un plan tel que le lieu des foyers des plans parallèles soit une droite perpendiculaire à ce plan. Si

l'on a pris cette droite pour axe des z, le plan qui a pour foyer un point quelconque de Oz doit être parallèle au plan $z = 0$. D'après l'équation (69), il faut et il suffit pour cela que l'on ait $A = B = C = D = 0$; l'équation du complexe prend la forme simple

$$aq - bp + K = 0, \tag{70}$$

et le plan dont le foyer est au point (x, y, z) a pour équation

$$Xy - Yx + K(Z - z) = 0, \tag{71}$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes.

Comme application, cherchons les courbes dont les tangentes font partie du complexe précédent. Étant donnée une courbe de cette espèce, dont les coordonnées x, y, z sont fonctions d'un paramètre variable, la tangente en un point de cette courbe est représentée par les équations

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz};$$

pour que cette droite fasse partie du complexe, il faut et il suffit qu'elle soit située dans le plan (71), qui a pour foyer le point (x, y, z), c'est-à-dire que l'on ait

$$x\,dy - y\,dx = K\,dz. \tag{72}$$

On a vu plus haut (n° 218) comment on pouvait obtenir toutes les fonctions x, y, z d'un paramètre variable satisfaisant à cette relation; on a donc toutes les courbes répondant à la question.

Les résultats obtenus au n° 218 s'énoncent aisément dans la théorie des complexes. Ainsi, en différentiant l'équation (72), il vient

$$x\,d^2y - y\,d^2x = K\,d^2z, \tag{73}$$

et les relations (72) et (73) montrent que le plan osculateur au point (x, y, z) est précisément le plan (71). On peut donc énoncer la proposition suivante : *Lorsque les tangentes à une courbe gauche appartiennent à un complexe linéaire, le plan osculateur en un point de cette courbe est le plan qui a ce point pour foyer.* (Appell.)

Imaginons que d'un point O de l'espace on veuille mener des plans osculateurs à une courbe gauche Γ dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire. Soit M le point de contact d'un de ces plans. D'après le théorème précédent, la droite MO est une droite du complexe et par suite le point M est dans le plan qui a pour foyer ce point O. Inversement, si le point M de la courbe Γ est dans ce plan, la droite MO, qui appartient au complexe, est dans le plan osculateur en M, et ce plan osculateur passe au point O. Les points cherchés sont donc à l'intersection de la courbe Γ et du plan qui a le point O pour foyer (*cf.* n° 218).

Les complexes linéaires se présentent dans un grand nombre de théories géométriques et mécaniques [*voir*, par exemple, la Thèse de Doctorat de M. Appell et celle de M. Picard (¹)].

EXERCICES.

1. Trouver les lignes de courbure de la surface développable, enveloppe du plan mobile représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + R\sqrt{1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha)},$$

où α est un paramètre variable, $\varphi(\alpha)$ une fonction arbitraire de ce paramètre et R une constante donnée.

[LICENCE : Paris; août 1871.]

2. a, b, α, β étant des fonctions d'un paramètre variable, on demande les conditions pour que la droite $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ engendre une surface développable dont les lignes de courbure normales aux génératrices soient situées sur des sphères concentriques.

[LICENCE : Paris; juillet 1872.]

3. Déterminer les lignes de courbure de la surface représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$e^z = \cos x \cos y.$$

[LICENCE : Paris; juillet 1875.]

4. Étant donné un ellipsoïde à trois axes inégaux, représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

on considère l'ellipse E située dans le plan des xz. On demande, pour chaque point M de cette ellipse E : 1° les expressions des rayons de courbure principaux R_1, R_2 de l'ellipsoïde; 2° la relation qui existe entre R_1 et R_2; 3° le lieu des centres de courbure des sections principales, lorsque le point M se déplace sur l'ellipse E.

[LICENCE : Paris; novembre 1877.]

5. Former l'équation du second degré qui donne les rayons de courbure principaux en un point quelconque du paraboloïde défini, en coordonnées

---

(¹) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure;* 1876 et 1877.

rectangulaires, par l'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z;$$

2° Exprimer, en fonction de la variable z, chacun des deux rayons de courbure principaux, pour tout point de la ligne de rencontre du paraboloïde proposé avec le paraboloïde défini par l'équation

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 2z - \lambda.$$

[Licence : Paris; novembre 1880.]

6. Déterminer le lieu des centres de courbure des sections principales du paraboloïde $xy = az$, aux différents points de l'axe Ox.

[Licence : Paris; juillet 1883.]

7. Trouver l'équation de la surface, lieu des centres de courbure des sections planes d'une surface donnée S, passant en un point donné M de cette surface.

8. On donne une surface du second degré et une tangente MT en un point M de cette surface. On mène un plan passant par MT, et l'on prend le centre de courbure O de la section plane, puis le centre de courbure O′ de la développée de la section plane. Trouver le lieu du point O′ lorsque le plan sécant tourne autour de MT.

[Licence : Clermont; juillet 1883.]

9. Déterminer les lignes asymptotiques du tore engendré par un cercle tournant autour d'une de ses tangentes.

[Licence : Paris; novembre 1882.]

10. Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires et dans le plan zOx une courbe donnée C. Une surface est engendrée par une circonférence dont le plan reste parallèle au plan xOy, dont le centre décrit la courbe C et qui rencontre constamment l'axe Oz.

On demande de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface en prenant pour variables la coordonnée z d'un point quelconque et l'angle θ du rayon du cercle qui passe en ce point avec la trace du plan du cercle sur le plan zOx. Appliquer au cas où la courbe C est une parabole ayant le point O pour sommet et la droite Ox pour axe.

[Licence : Paris; juillet 1880.]

11. Déterminer les lignes asymptotiques d'une surface réglée, qui est tangente à une autre surface réglée en tous les points d'une génératrice Δ de la seconde surface, toutes les génératrices de la première surface rencontrant la droite Δ.

12. Trouver sur l'hélicoïde droit les lignes dont le plan osculateur contient la normale à la surface.

[Licence : Paris; juillet 1876.]

13. On demande les lignes asymptotiques de la surface réglée représentée par les équations

$$x = (1 + u)\cos v, \qquad y = (1 - u)\sin v, \qquad z = u.$$

[Licence : Nancy; novembre 1900.]

14*. Étant données une surface S et une droite Δ, les sections de la surface par des plans menés par la droite Δ, et les courbes de contact des cônes circonscrits à S ayant leurs sommets sur Δ, forment un réseau conjugué.

[Kœnigs.]

15*. Lorsque trois points d'une droite invariable décrivent trois plans rectangulaires, la droite demeure constamment normale à une famille de surfaces parallèles. On obtient l'une de ces surfaces en prenant le lieu du milieu du segment formé par le point où cette droite coupe l'un des plans coordonnés et par le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite.

[Darboux, *Comptes rendus*, t. XCII, p. 446; 1881.]

16*. Sur toute surface, on connaît une ligne de courbure imaginaire : c'est le lieu des points pour lesquels on a $1 + p^2 + q^2 = 0$.

On montre pour cela que l'équation différentielle des lignes de courbure peut être mise sous la forme

$$(dp\,dy - dq\,dx)(1 + p^2 + q^2) + (p\,dy - q\,dx)(p\,dp + q\,dq) = 0.$$

[Darboux, *Annales de l'École normale*; 1864.]

FIN DU TOME I.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE II.

FONCTIONS IMPLICITES. — DÉTERMINANTS FONCTIONNELS. CHANGEMENTS DE VARIABLES.

CHAPITRE III.

FORMULE DE TAYLOR. — APPLICATIONS ÉLÉMENTAIRES. MAXIMA ET MINIMA.

CHAPITRE IV.

INTÉGRALES DÉFINIES.

CHAPITRE V.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

CHAPITRE VI.

INTÉGRALES DOUBLES.

CHAPITRE VII.

INTÉGRALES MULTIPLES. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

CHAPITRE VIII.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

CHAPITRE IX.

SÉRIES ENTIÈRES. — SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

CHAPITRE X.

COURBES PLANES.

CHAPITRE XI.

COURBES GAUCHES.

CHAPITRE XII.

SURFACES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

ERRATA.

Page 25, ligne 18 : l'emploi de la lettre ∂, pour représenter les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables, est dû à Jacobi. Avant lui, on employait la lettre d.

Page 26, dernière ligne de la deuxième formule, *remplacer* le signe $-$ par le signe $+$.

Page 44, deuxième formule, *remplacer* F par F'_y.

Page 50, *donner* aux deux premières formules o pour second membre.

Page 51, dans la seconde équation de la ligne 8, *supprimer* le facteur 2 au second membre.

Page 53, *ajouter* = o à la suite du second membre de la formule de la ligne 9.

Page 163, ligne 1, *au lieu de* a, b), *lire* (a, b).

Page 168, ligne 1, *ajouter* II.

Page 172, première formule, la limite inférieure de la seconde intégrale est a.

Page 172, deuxième formule, la limite supérieure de la troisième intégrale est ξ.

Page 184, première formule, ω_0 et ω_1 sont les angles polaires correspondant aux extrémités de l'arc.

Page 193, dernière formule, *au lieu de* $\int_0$, *lire* $\int_0^i$.

Page 194, lignes 4 et 5 en remontant, *au lieu de* déminé, *lire* déterminé.

Page 197, dernière ligne, *au lieu de* $\varphi(x$, *lire* $\varphi(x)$.

Page 198, ligne 13, *supprimer* sa valeur absolue.

Page 213, ligne 3, *au lieu de* droite, *lire* demi-droite.

Page 214, avant-dernière formule, x_0 et X désignent les abscisses des points A et B.

Page 227, troisième formule, *mettre* entre parenthèses les termes qui suivent $\frac{l}{2}$.

Page 260, première formule, *au lieu de* $P^{2q}(a)$, *lire* $P^{(2q)}(a)$.

Page 302, ligne 16, *au lieu de* $f(\omega)$, *lire* $\varphi(\omega)$.

Page 303, *fig.* 28, *au lieu de* c^1, *lire* c^2.

Page 305, deuxième formule, *au lieu de* $F(x,y$, *lire* $F(x,y)$.

Page 305, avant-dernière formule, *au lieu de* $F(x,ydxay$, *lire* $F(x,y)dxdy$.

Page 307, formule 27, *au lieu de* $(\alpha_i^2+\beta_i^2z-\gamma_i$, *lire* $(\alpha_i^2+\beta_i^2)z+\gamma_i$.

Page 308, lignes 9 et 10, *au lieu de* du plan (u, v) de la région r_i, *lire* de la région r_i du plan (u,v).

Page 318, ligne 21, *ajouter* : ox est supposé en avant du plan yoz, pris comme plan de la figure.

Page 348, n° 149, au lieu de *formule de Green*, lire *formute d'Ostrogradsky*.

Page 356, formule (48), *au lieu de* $\int^x$, *lire* $\int_{x_0}^x$.

Page 360, *fig.* 35, *changer* le sens de la flèche placée au-dessous de m.

28219 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

28219 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

